Fyz. čas. SAV 21 (1971), No. 1

PRÍSPEVOK KU GEOMETRICKEJ ŠTRUKTÚRE SENZORICKÉHO PRIESTORU

BRANISLAV MAMOJKA*, Bratislava

V poslednom čase je snaha vyjadriť relácie medzi senzorickými veličinami pomocou geometrických rovníc. To viedlo k zavedeniu senzorického priestoru [1], ktorého metriku generuje základný zákon udávajúci vzťah medzi senzorickými a signálnymi veličinami [2]. Mnohé úlohy senzorickej fyziky prešli tým na adekvátne úlohy geometrické [3]. Najkratšia vzdialenosť medzi dvoma bodmi v senzorickom priestore hrá ústrednú úlohu v senzorickej fyzike, pretože prostredníctvom nej sa určuje tzv. afinita dvoch vnemov. Táto vzdialenosť je daná prostredníctvom rovníc pre geodetické čiary. V senzorickej fyzike má veľký význam, aby tieto rovnice tvorili systém nezávislých diferenciálnych rovníc, čo vedie na úlohu určiť Christoffelove symboly druhého druhu tak, aby sústavu rovníc pre geodetické čiary netvorili spriahnuté diferenciálne rovnice. Toto vedie v poslednom dôsledku na požiadavky na metrickú štruktúru senzorického priestoru, a tým aj na určenie vlastností základného senzorického zákona.

Geodetické čiary určuje sústava diferenciálnych rovníc [1]

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{1}$$

kde x^i sú súradnice, s je parameter a Γ^i_{kl} sú Christoffelove symboly druhého druhu.

Pri zápise vzorcov budeme používať Einsteinove sumačné pravidlo, t. j. budeme sčítať podľa dvoch rovnakých indexov, z ktorých jeden je kovariantný a druhý kontravariantný. Toto pravidlo sa nevzťahuje na indexy v zátvorkách.

Aby sa systém rovníc (1) rozpadol na systém nezávislých rovníc, je potrebné, aby Christoffelove symboly druhého druhu, len ak sú všetky tri indexy rovnaké, neboli nulové a aby pre symbol Γ^i_{ii} platilo

$$\Gamma^i_{ii} = f_{(i)}(x^i),$$

* Fyzikálny ústav SAV, BRATISLAVA, Dúbravská cesta.

kde $f_{(i)}$ je i-tá funkcia, ktorá závisí len od x^i. Potom geodetické čiary určujú rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + f_{(i)}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0.$$

Tieto rovnice možno upraviť na tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\mathrm{e}^{\int f_{(i)}\mathrm{d}x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right] = 0.$$

Ich riešenia sú

$$\int \mathrm{e}^{\int f_{(i)}\mathrm{d}x^i}\,\mathrm{d}x^i = a_{(i)}\,s + b_{(i)}, \tag{2}$$

$a_{(i)}$ a $b_{(i)}$ sú konštanty, ktoré môžeme určiť napríklad zadaním dvoch bodov, ktorými geodetická čiara prechádza, a hodnotou parametra v týchto bodoch.

Budeme teda hľadať všeobecný tvar metrického tenzora, pre ktorý majú Christoffelove symboly vyššie požadované vlastnosti.

Christoffelove symboly spĺňajúce požiadavky nezávislosti diferenciálnych rovníc (1) môžeme zapísať v tvare

$$\Gamma^i_{kl} = f_{(i)}\delta^i_k\delta^i_l, \tag{3}$$

δ^i_k je jednotkový tenzor, pričom

$$\Gamma^i_{kl} = \tfrac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right), \tag{4}$$

kde g_{ik} sú zložky metrického tenzora. Christoffelove symboly prvého druhu súvisia s Christoffelovými symbolmi druhého druhu vzťahom

$$\Gamma_{m,kl} = g_{mi}\Gamma^i_{kl} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{5}$$

Zo vzťahov (3) a (5) dostávame systém diferenciálnych rovníc pre metrický tenzor

$$\sum_i g_{mi}f_{(i)}\,\delta^i_k\delta^i_l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{6}$$

Metrický tenzor musí byť regulérny, t. j. musí platiť

$$\det(g) = \|g\| \neq 0. \tag{7}$$

Riešením systému (6) a podmienkou (7) dostaneme hľadaný metrický tenzor. Uvážme teraz prípady s rozličnými predpokladmi o indexoch k, l, m:

a) Nech $l \neq k = m$ (táto podmienka je ekvivalentná podmienke $k \neq l = m$, pretože $\Gamma_{m,kl} = \Gamma_{m,lk}$).

Z rovnice (6) dostaneme

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^k} = 0,$$

a odtiaľ

$$\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^l} = 0.$$

Pretože táto rovnica platí pre všetky $l \neq k$, jej riešením je podmienka

$$g_{kk} = g_{kk}(x^k). \tag{8}$$

b) Nech $k = l = m$. Potom má rovnica (6) tvar

$$g_{kk} f_{(k)} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k}.$$

Vzhľadom na (8) môžeme parciálnu deriváciu zameniť totálnou. Riešenie má tvar

$$g_{kk} = C_{kk} e^{2\int f_{(k)} \mathrm{d}x^k}, \tag{9}$$

C_{kk} sú konštanty.

c) Nech $k = l \neq m$. V tomto prípade má (6) tvar

$$g_{mk} f_{(k)} = \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^k} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^m}.$$

Na základe (8) je druhý člen na pravej strane predchádzajúcej rovnice nulový. Potom g_{mk} spĺňa rovnicu

$$g_{mk} f_{(k)} = \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^k}.$$

Ak uvážime symetriu metrického tenzora, dostaneme druhú rovnicu

$$g_{mk} f_{(m)} = \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^m}.$$

Tieto rovnice majú riešenia

$$g_{mk} = h_k e^{\int f_{(k)} \mathrm{d}x^k},$$

$$g_{mk} = h_m e^{\int f_{(m)} \mathrm{d}x^m},$$

kde h_k nie je funkciou x^k a h_m nie je funkciou x^m. Dostávame tak riešenia v tvare

$$g_{mk} = H_{mk} e^{\left[\int f_{(k)} \mathrm{d}x^k + \int f_{(m)} \mathrm{d}x^m\right]}, \tag{10}$$

kde H_{mk} nie je funkciou x^k a x^m.

d) Nech všetky indexy sú rôzne. Rovnica (6) má tvar

$$\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} = 0.$$

Ak do nej dosadíme rov. (10) a použijeme označenie

$$B_{mk} = B_{km} = e^{\left[\int f_{(k)} \mathrm{d}x^k + \int f_{(m)} \mathrm{d}x^m\right]},$$

dostaneme

$$B_{mk} \frac{\partial H_{mk}}{\partial x^l} + B_{ml} \frac{\partial H_{ml}}{\partial x^k} - B_{kl} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x^m} = 0, \tag{11a}$$

a cyklickou zámenou indexov dostaneme ďalšie dve rovnice:

$$B_{kl} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x^m} + B_{km} \frac{\partial H_{km}}{\partial x^l} - B_{lm} \frac{\partial H_{lm}}{\partial x^k} = 0, \tag{11b}$$

$$B_{lm} \frac{\partial H_{lm}}{\partial x^k} + B_{lk} \frac{\partial H_{lk}}{\partial x^m} - B_{km} \frac{\partial H_{km}}{\partial x^l} = 0. \tag{11c}$$

Sčítaním rovníc (11a), (11b) a (11c) dostaneme:

$$B_{km} \frac{\partial H_{km}}{\partial x^l} + B_{ml} \frac{\partial H_{ml}}{\partial x^k} + B_{lk} \frac{\partial H_{lk}}{\partial x^m} = 0. \tag{11d}$$

Ak od (11d) odčítame ktorúkoľvek z rovníc (11a), (11b) a (11c) vychádza

$$B_{mk} \frac{\partial H_{mk}}{\partial x^l} = 0. \tag{11e}$$

B_{mk} predpokladáme nenulové (v opačnom prípade $g_{mk} = 0$ a úvahy o B_{mk} sú zbytočné). Pretože H_{mk} nezávisia od x^k a x^m a rovnica (11e) platí pre všetky l rôzne od k a m je jej riešenie

$$H_{mk} = C_{mk}. \tag{11f}$$

C_{mk} sú symetrické konštanty ($C_{mk} = C_{km}$).

Pomocou rovníc (9), (10) a (11f) vyjadríme metrický tenzor

$$g_{mk} = C_{mk} e^{\left[\int f_{(k)} \mathrm{d}x^k + \int f_{(m)} \mathrm{d}x^m\right]}. \tag{12}$$

Metrický tenzor musí spĺňať aj podmienku (7).

$$\|g\| = \|C\| \exp [2 \sum_l \int f_{(l)} \mathrm{d}x^l] \neq 0. \tag{13}$$

Aby bolo splnené (13) a vzhľadom na symetriu metrického tenzora musí platiť:

$$C_{mk} \text{ je regulárna a symetrická matica.} \tag{14}$$

Rovnicami (12) a (14) je určený najvšeobecnejší metrický tenzor spĺňajúc podmienku (3).

Rovnicou (12) je teda udaný najvšeobecnejší tvar zložiek metrického tenzora, ak diferenciálne rovnice pre geodetické čiary majú byť nezávislé. Tvar metrického tenzora (12) nám aj vydeľuje triedu funkcií, ktorými môže byť základný senzorický zákon vyjadrený, ak majú byť rovnice (1) nezávislými.

LITERATÚRA

[1] Majerník V., *Relations between the signal and sensory space in sensory communication.* Congress report of the 5th Int. Congress on Cybernetics. Namur 1968, 772.
[2] Stevens S. S., *Mathematics, Measurements and Psychophysics.* In: *Handb. of Exp. Psychol.* J. Wiley and Sons, New York 1961.
[3] Majerník V., Fyz. čas. SAV *20* (1970), 200.

Došlo 7. 5. 1970