Fyzikálny časopis 20 (1970), No. 4

VPLYV ROZMEROV ROTAČNÉHO ELIPSOIDU NA MERANIE JEHO MAGNETICKÉHO MOMENTU

IVAN ČERVEŇ, Bratislava

Pri meraní magnetického momentu guľových vzoriek indukčnou Weissovou-Forrerovou metódou platí priama úmernosť medzi magnetickým momentom vzorky a zmenou indukčného toku vyvolanou oddialením vzorky z mernej cievky. V práci sú vyjadrené a tabelované funkcie, ktoré udávajú odchýlky od tohto pravidla pre vzorky s tvarom podlhovastého rotačného elipsoidu. Ukazuje sa, že pre konfokálne vzorky v tej istej polohe sú tieto odchýlky rovnaké.

ÚVOD

Pri meraní magnetického momentu vzoriek, ktoré majú tvar gule, indukčnou Weissovou-Forrerovou [1] metódou, sa stretávame so skutočnosťou, že zmena indukčného toku vyvolaná oddialením vzorky z mernej cievky je priamo úmerná magnetickému momentu vzorky [2]. Môžeme to vyjadriť vzťahom

$$\Delta\Phi/m = \text{konšt.}, \tag{1}$$

kde $\Delta\Phi$ je zmena indukčného toku, m — magnetický moment vzorky. Treba zdôrazniť, že podiel $\Delta\Phi/m$ od rozmerov vzorky (t. j. jej polomeru) nezávisí. Ak sa však pri meraní stretneme so vzorkami iného tvaru ako guľového, uvedená priama úmernosť už presne neplatí. Pokiaľ má vzorka tvar elipsoidu, možno ohodnotiť vplyv rozmerov vzorky na odchýlky od vzťahu (1) bez principiálnych ťažkostí. Cieľom tohto príspevku je rozobrať tento vplyv pre vzorky, ktoré majú tvar podlhovastého sféroidu (t. j. podlhovastého rotačného elipsoidu).

Budeme uvažovať kruhový závit s polomerom R, postavený svojou rovinou kolmo na smer vektora indukcie $\boldsymbol{B}_0$ pôvodného homogénneho magnetického poľa. Vzorku vložíme do poľa tak, aby jej stred bol totožný so stredom závitu. Ďalej rozoberieme dva prípady, líšiace sa orientáciou vzorky vzhľadom na vektor indukcie $\boldsymbol{B}_0$.

I. DLHŠIA OS VZORKY JE ROVNOBEŽNÁ S VEKTOROM $\mathbf{B}_0$, ČIŽE KOLMÁ NA ROVINU ZÁVITU

Pre ohodnotenie merania magnetického momentu indukčnou metódou je dôležité vypočítať indukčný tok cez plochu ohraničenú závitom. Treba pritom vyjadriť magnetické pole v okolí vzorky, na čo sa v tomto prípade najlepšie hodia sféroidálne súradnice [3], ktoré budeme označovať symbolmi ξ, η, ψ. Medzi kartézskymi a sféroidálnymi súradnicami platia vzťahy

$$x = c\xi\eta, \quad y = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\cos\psi, \quad z = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\sin\psi,$$

kde c je ohnisková vzdialenosť sústavy konfokálnych súradnicových plôch.

Celkom podobným postupom, ako je v [3] použitý pre elipsoid, môžeme riešením Laplaceovej rovnice, ale zapísanej vo sféroidálnych súradniciach, dospieť ku skalárnym magnetickým potenciálom, opisujúcim magnetické pole vo sféroide a jeho okolí. Potenciál pôvodného poľa nech je $\varphi_0 = -H_0 x$, kde H_0 je jeho intenzita, ako vektor orientovaná v kladnom smere osi x. Potom pre potenciál vo vzorke dostaneme $\varphi_1 = -H_0 x/A$, pričom

$$A = 1 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\,\xi_0(\xi_0^2 - 1)\int_{\xi_0}^{\infty}\frac{ds}{s^2(s^2 - 1)},$$

μ_0 je permeabilita prostredia v okolí vzorky, μ — permeabilita materiálu vzorky, $\xi_0 = a/\sqrt{a^2 - b^2}$, a — hlavná, b — vedľajšia polos sféroidu. Predpokladali sme pritom, že $b \leqslant R$.

Pri takomto označení potenciál mimo vzorky má tvar

$$\varphi_2 = (-H_0 c\xi\eta/A)\left[1 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\,\xi_0(\xi - 1)\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{ds}{s^2(s^2 - 1)}\right].$$

Z uvedených potenciálov môžeme počítať ďalšie dôležité hodnoty: indukciu poľa vo vzorke $\mathbf{B}_1 = \mu\mathbf{B}_0/\mu_0 A$, magnetickú polarizáciu vo vzorke $\mathbf{J} = (\mu - \mu_0)\,\mathbf{B}_0/\mu_0 A$ (2)
a zložky vektora indukcie mimo vzorky. Pre výpočet indukčného toku cez plochu ohraničenú závitom nám stačí zložka $B_{2\xi}$:

$$B_{2\xi} = \frac{B_0\eta}{A}\sqrt{(\xi^2 - 1)/(\xi^2 - \eta^2)}\left\{A + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\,\frac{ab^2}{(a^2 - b^2)^{3/2}}\left[\frac{\xi}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right]\right\}. \tag{3}$$

Indukčný tok budeme počítať cez sféroidálnu plochu prechádzajúcu závitom

a konfokálnu so vzorkou. K takejto ploche je $B_{2\xi}$ zložkou normálovou, ostatné zložky vektora $\mathbf{B}$ sú zložkami tengenciálnymi. Pre indukčný tok potom môžeme písať:

$$\Phi = \int_0^1\int_0^{2\pi} B_{2\xi} h_2\, d\eta h_3\, d\psi, \tag{4}$$

kde $$h_2 = c\sqrt{(\xi^2 - \eta^2)/(1 - \eta^2)} \text{ a } h_3 = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \tag{5}$$

sú metrické súčinitele sféroidálnych súradníc η, resp. ψ [3]. Po dosadení príslušných hodnôt zo vzťahov (2), (3) a (5) do integrálu (4), po jeho vyriešení a úprave výsledku dostaneme

$$\Phi = B_0\pi R^2 + \pi R^2 J\,\frac{1}{c^3}\left[\frac{c}{R^2}\sqrt{R^2 + c^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{R^2 + c^2} - c}{\sqrt{R^2 + c^2} + c}\right].$$

Ak oddialime vzorku zo stredu závitu do nekonečna, zmení sa indukčný tok o hodnotu $\Delta\Phi = \Phi - B_0\pi R^2$. Po zavedení označenia $m_C = \frac{4}{3}\pi ab^2 J$ (Coulombov magnetický moment vzorky) a $\gamma = c/R$ môžeme písať:

$$\Delta\Phi/m_C = \frac{3}{4}\,\frac{1}{R}\,f(\gamma), \quad \text{kde}$$

$$f(\gamma) = \frac{1}{\gamma^3}\left[\gamma\sqrt{1 + \gamma^2} + \ln\left(\sqrt{1 + \gamma^2} - \gamma\right)\right]. \tag{6}$$

V tomto prípade sa podiel $\Delta\Phi/m_C$ od vzťahu (1) líši funkciou $f(\gamma)$. Je zaujímavé, že hodnoty funkcie $f(\gamma)$ nezávisia priamo od veľkosti polosí vzorky, ale len od jej ohniskovej vzdialenosti c (resp. $\gamma = c/R$), takže sú pre všetky konfokálne vzorky rovnaké. Niektoré hodnoty funkcie $f(\gamma)$ sú uvedené v Tab. 1 a jej priebeh je znázornený na obr. 1.

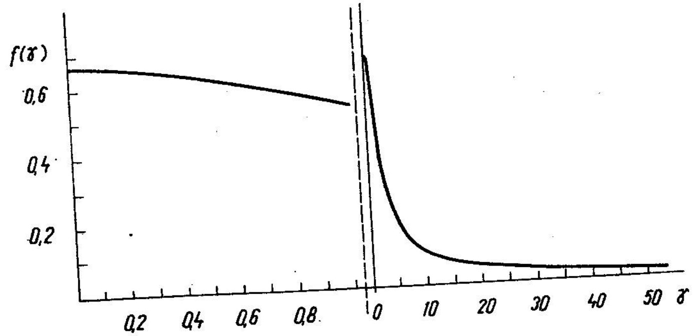
Tabuľka 1

Hodnoty funkcie $f(\gamma)$

γ	0	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
$f(\gamma)$	0.6667	0.6663	0.6647	0.6588	0.6224	0.5328	0.3786

γ	5	10	20	50	100	500	1000
$f(\gamma)$	0.1855	0.0975	0.0496	0.0199	0.0100	0.0020	0.0010

Vzťah pre zmenu indukčného toku $\Delta\Phi$ možno napísať aj v takom tvare, aby v ňom namiesto magnetického momentu vystupovala magnetická polarizácia vzorky. Takýto tvar je vhodný najmä pre veľmi dlhé vzorky. Ak zave-



Obr. 1.

dieme ďalšie pomerné hodnoty $\alpha = a/R$, $\beta = b/R$, môžeme pre zmenu indukčného toku, ktorá vznikne oddialením vzorky do nekonečna, písať

$$\Delta\Phi = \pi R^2 J \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^3} [\gamma\sqrt{1+\gamma^2} + \ln(\sqrt{1+\gamma^2} - \gamma)],$$

alebo stručnejšie

$$\Delta\Phi = \pi R^2 J \, . \, h(\alpha, \beta),$$

kde $h(\alpha, \beta) = \alpha\beta^2 f(\gamma)$, a $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.
Niektoré hodnoty funkcie $h(\alpha, \beta)$ sú uvedené v Tab. 2.
Funkcia $h(\alpha, \beta)$ jednoducho súvisí s demagnetizačným faktorom. Ak uvážime

Tabuľka 2

Hodnoty funkcie $h(\alpha, b)$

α/β \ β	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1
1.01	0.6693	0.4885	0.2303	0.0840	0.0182	0.0054	0.00067
1.02	0.6719	0.4909	0.2319	0.0847	0.0183	0.0054	0.00068
1.05	0.6796	0.4981	0.2366	0.0868	0.0188	0.0056	0.00070
1.10	0.6917	0.5096	0.2442	0.0903	0.0197	0.0058	0.00073
1.50	0.7670	0.5814	0.2949	0.1149	0.0261	0.0079	0.00099
2	0.8264	0.6389	0.3393	0.1394	0.0334	0.0103	0.00132
5	0.9442	0.7546	0.4382	0.2064	0.0610	0.0215	0.00312
10	0.9797	0.7898	0.4707	0.2329	0.0770	0.0304	0.00534
20	0.9933	0.8033	0.4835	0.2440	0.0851	0.0360	0.00756
50	0.9986	0.8086	0.4886	0.2487	0.0888	0.0390	0.00927
100	0.9996	0.8096	0.4896	0.2496	0.0896	0.0397	0.00975
500	0.9999	0.8099	0.4899	0.2499	0.0899	0.0399	0.00998

demagnetizačný faktor D pre podlhovastý rotačný elipsoid zapísaný v sústave SI [4], zistíme, že platí vzťah

$$D = 1 - h(\alpha, 1),$$

kde $h(\alpha, 1)$ predstavuje funkciu $h(\alpha, \beta)$ pri $\beta = b/R = 1$, čo odpovedá závitu tesne obopínajúcemu vzorku.

II. DLHŠIA OS VZORKY JE KOLMÁ NA VEKTOR $\mathbf{B}_0$, ČIŽE LEŽÍ V ROVINE ZÁVITU

Kartézsku súradnicovú sústavu volíme pri tomto usporiadaní tak, aby os x splývala s dlhšou osou sféroidu a os y mala smer vektora $\mathbf{B}_0$. Potenciál pôvodného homogénneho poľa nech má tvar $\varphi_0 = - H_0 y$. Riešením Laplaceovej rovnice dostaneme potom pre potenciál vo vzorke

$$\varphi_1 = - H_0 y/A', \tag{7}$$

pre potenciál mimo vzorky

$$\varphi_2 = - \frac{H_0 c}{A'} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos\psi \left[1 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \xi_0(\xi_0^2 - 1) \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{ds}{(s^2 - 1)^2}\right], \tag{8}$$

pričom $A' = 1 + \dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \xi_0(\xi_0^2 - 1) \displaystyle\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{ds}{(s^2 - 1)^2}$.

Ostatné symboly majú rovnaký význam ako v časti I. Teraz však platí $b < a \leqq R$.

Z potenciálov (7) a (8) môžeme vypočítať ďalšie dôležité hodnoty:

indukciu vo vzorke $\mathbf{B}_1 = \dfrac{\mu}{\mu_0} \dfrac{\mathbf{B}_0}{A'}$,

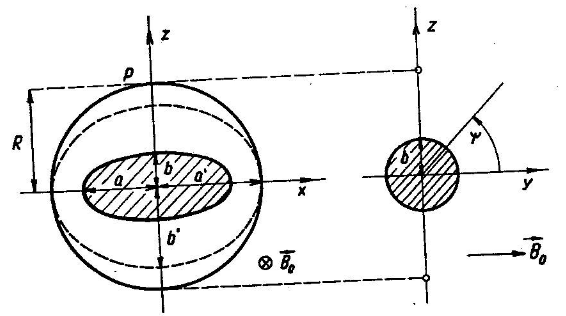
magnetickú polarizáciu vo vzorke $J = \dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \dfrac{\mathbf{B}_0}{A'}$ (9)

a zložky indukcie mimo vzorky

$$B_{2\psi} = - \frac{B_0}{A'} \sin\psi \left[1 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \xi_0(\xi_0^2 - 1) \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{ds}{(s^2 - 1)^2}\right], \tag{10}$$

$$B_{2\xi} = \frac{B_0}{A'} \cos\psi \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}} \left\{\xi \left[1 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \xi_0(\xi_0^2 - 1) \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{ds}{(s^2 - 1)^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \xi_0(\xi_0^2 - 1) \frac{1}{\xi^2 - 1}\right\}. \tag{11}$$

Výpočet indukčného toku cez plochu ohraničenú závitom si rozdelíme na dve časti (obr. 2). Do prvej časti zahrnieme oblasť ohraničenú elipsou



Obr. 2.

s polosami a' a b', (na obr. 2 vytiahnutá čiarkovane), ktorá je konfokálna so vzorkou. Hlavná polos tejto elipsy sa rovná polomeru závitu R. Jej rotáciou okolo osi x vznikne sféroidálna plocha, cez polovicu ktorej budeme počítať prvú časť indukčného toku — Φ_1. Tok cez zvyšok plochy kruhu s polomerom R bude predstavovať druhú časť indukčného toku — Φ_2. Pri výpočte Φ_1 sa uplatní len zložka $B_{2\xi}$ (11), takže môžeme písať

$$\Phi_1 = 2 \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_{2\xi}\, h_2 \mathrm{d}\eta\, h_3 \mathrm{d}\psi .$$

Po dosadení metrických súčiniteľov (5), vzťahu (9) a po výpočte integrálu dostaneme:

$$\Phi_1 = B_0 \pi a' b' + \pi a' b' J \frac{ab^2}{c^3} \left[\frac{c^3}{R(R^2 - c^2)} - \frac{Rc}{2(R^2 - c^2)} - \frac{1}{4} \ln \frac{R - c}{R + c} \right].$$

Pri počítaní Φ_2 sa výhoda sféroidálnych súradníc stráca. Hodnotu Φ_2 však možno získať numerickou integráciou

$$\Phi_2 = 4 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (- B_{2\psi})\, h_1 \mathrm{d}\xi\, h_2 \mathrm{d}\eta , \qquad (12)$$

kde $h_1 = c \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)/(\xi^2 - 1)}$ je metrický súčiniteľ súradnice ξ. Pre integračné medze pritom platí:

$$\xi_1 = R/c , \qquad \xi_2 = (R^2 + c^2)^{1/2}/c , \qquad \eta_1 = 0 , \qquad (13)$$

$$(\eta_2)^2 = (1/2c^2)\,\{R^2 + c^2 - \sqrt{(R^2 + c^2)^2 - 4c^2\xi^2[R^2 - c^2(\xi^2 - 1)]}\}.$$

Hodnoty ξ_1 a ξ_2 odpovedajú krajným elipsám, po ktorých integrujeme — ξ_1 čiarkovanej elipse, ξ_2 elipse prechádzajúcej bodom P (obr. 2). Hodnota $\eta_1 = 0$ predstavuje konfokálnu hyperbolu, prechádzajúcu začiatkom súradnicovej sústavy — teda totožnú s osou z. Hodnotu η_2 získame ako sféroidálnu súradnicu

priesečníka elipsy, po ktorej momentálne integrujeme, a kružnice s polomerom R, predstavujúcej závit.

Keďže symetria poľa v okolí vzorky umožňuje integrovať cez štvrtinu zvyšku plochy kruhu, vystupuje vo vzťahu (12) číselný faktor 4.

Po dosadení $B_{2\psi}(10)$ (pri hodnote $\psi = \pi/2$) do integrálu (12), môžeme pre Φ_2 napísať

$$\Phi_2 = B_0(\pi R^2 - \pi a' b') - 2J \frac{ab^2}{c} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{\eta_2} \left[\frac{\xi}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right] \cdot \frac{\xi^2 - \eta^2}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta .$$

Úhrnný tok cez plochu ohraničenú závitom potom je $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$:

$$\Phi = B_0 \pi R^2 + J \pi R \sqrt{R^2 - c^2} \frac{ab^2}{c^3} \left[\frac{c^3}{R(R^2 - c^2)} - \frac{Rc}{2(R^2 - c^2)} - \frac{1}{4} \ln \frac{R - c}{R + c} \right] - 2J \frac{ab^2}{c} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{\eta_2} \left[\frac{\xi}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right] \frac{\xi^2 - \eta^2}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta .$$

Ak opäť zavedieme pomernú hodnotu $\gamma = c/R$ a použijeme označenie $\frac{4}{3} \pi a b^2 J = m_C$, môžeme pre zmenu indukčného toku vyvolanú oddialením vzorky do nekonečna napísať

$$\Delta\Phi = \frac{3}{4} m_C \frac{1}{R} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma^3} \left[\frac{\gamma^3}{1 - \gamma^2} - \frac{\gamma}{2(1 - \gamma^2)} - \frac{1}{4} \ln \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right] - \frac{2}{\gamma} \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{\eta_2} \left[\frac{\xi}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right] \frac{\xi^2 - \eta^2}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \right\}. \qquad (14)$$

čo však môžeme napísať aj v tvare

$$\Delta\Phi / m_C = \frac{3}{4} \frac{1}{R} g(\gamma) .$$

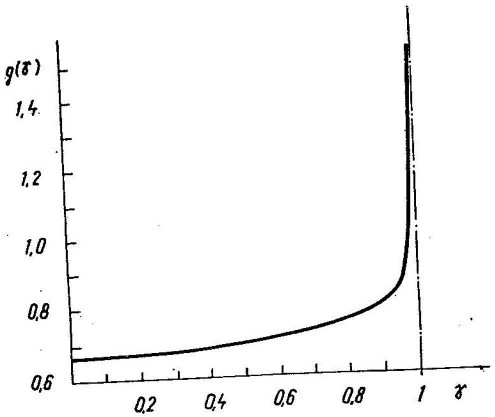
Funkcia $g(\gamma)$ (t. j. výraz vo veľkej zátvorke vo vzťahu (14)) má teraz rovnaký význam ako v časti I funkcia $f(\gamma)$. Ak si všimneme integračné medze (13), zistíme, že funkcia $g(\gamma)$, rovnako ako $f(\gamma)$, nezávisí priamo od rozmerov vzorky, ale len od jej ohniskovej vzdialenosti c (resp. $\gamma = c/R$). Hodnoty funkcie $g(\gamma)$ sú teda opäť pre všetky konfokálne vzorky rovnaké, a niektoré z nich sú uvedené v tab. 3. Priebeh funkcie $g(\gamma)$ je uvedený na obr. 3.

Tabuľka 3

Hodnoty funkcie $g(\gamma)$

γ	0	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$g(\gamma)$	0.6667	0.6669	0.6677	0.6708	0.6761	0.6839	0.6948

γ	0.7	0.8	0.9	0.95	0.97	0.98	0.99
$g(\gamma)$	0.7296	0.7586	0.8054	0.8609	0.9371	1.0559	1.5075



Obr. 3.

Hodnoty funkcií $f(\gamma)$, $g(\gamma)$ a $h(\alpha, \beta)$ sa počítali s min. presnosťou 1/1000 vlastnej hodnoty počítačom Minsk 22 na Katedre matematických strojov Elektrotechnickej fakulty SVŠT v Bratislave.

Záverom chcem poďakovať prom. mat. Guregovej, pracovníčke tejto katedry, za pomoc pri programovaní.

LITERATÚRA

[1] Weiss P., Forrer R., Ann. de Physique *12* (1929), 279.
[2] Červeň I., Fyz. čas. SAV *19* (1969), 250.
[3] Stratton J. A., *Teorie elmag. pole.* SNTL, Praha 1961.
[4] Brož J. a kol., *Základy fyz. měření (I)*. SPN, Praha 1967.

Došlo 25. 10. 1969

Katedra fyziky
Elektrotechnickej fakulty SVŠT,
Bratislava