Fyzikálny časopis 20 (1970), No. 4

ZUR GEOMETRIE DES SENSORISCHEN RAUMES

VLADIMÍR MAJERNÍK, Bratislava

In der vorliegenden Arbeit werden einige, vom allgemeinen Standpunkt der sensorischen Physik wichtigen geometrischen Parameter des sensorischen Raumes, dessen Metrik durch das Weber-Fechnersche Gesetz generiert ist, bestimmt.

EINLEITUNG

Zur quantitativen Beschreibung von allgemeinen physikalischen Systemen kann auf verschiedenen Ebenen der Abstraktion herangetreten werden. In der abstraktesten Ebene der Beschreibung eines physikalischen Systems tritt die Menge seiner physikalischen Zustände $\sum = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ sowie die auf dieser Menge gegebene algebraische Struktur auf. Vom mathematischen Standpunkt kann die Menge der Zustände $\sum$, je nach der auf ihr definierten algebraischen Struktur, einen Ring, eine Algebra, eine Struktur u. ä. bilden.

Die physikalischen Zustände sind durch bestimmte ihnen zugeordnete Werte der physikalischen Parameter $f_1, f_2, \ldots, f_n$ charakterisiert:

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \{f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}\} \\ S_2 &\equiv \{f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_n^{(2)}\} \\ &\;\;\vdots \\ S_m &\equiv \{f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \ldots, f_n^{(m)}\}. \end{aligned}$$

Vom geometrischen Standpunkt kann jedem Zubstand ein Punkt im sog. Signalraum zugeordnet werden [1]. Die Relationen zwischen den Elementen der Menge $\sum$ können dann, falls wir die geometrische Struktur des Signalraumes kennen, bestimmte geometrische Form bekommen.

In gewissen Fällen können den Zuständen der Menge $\sum$ Elemente der Menge $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ zugeordnet werden, wobei jedem Zustand $Z_i \in Z$ wiederum eine n-tität der zugehörigen physikalischen Parameter $g_1, g_2, \ldots, g_n$ zugeordnet werden kann:

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv \{g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \ldots, g_n^{(1)}\} \\ Z_2 &\equiv \{g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, \ldots, g_n^{(2)}\} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ Z_m &\equiv \{g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \ldots, g_n^{(m)}\}. \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung der geometrischen Struktur der Menge Z, die im weiteren als Raum bezeichnet wird, ist es notwendig die Transformationsbeziehungen zwischen den Parametern des Raumes $\sum$ und den entsprechenden Parametern des Raumes Z,

$$\begin{aligned} g_1 &= F_1(f_1, f_2, \ldots, f_n) \\ g_2 &= F_2(f_1, f_2, \ldots, f_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ g_n &= F_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) \end{aligned} \tag{a}$$

zu kennen.

Den Raum Z nennen wir das Abbild des Raumes $\sum$. Bei Kenntnis der Transformationsbeziehungen (a) kann aus der geometrischen Struktur des Raumes $\sum$ auf die des Raumes Z geschlossen werden. Es kommt vor, daß die geometrische Struktur des Raumes $\sum$ sowie die Beziehungen (a) bekannt sind und es ist erwünscht den Raum Z zu beschreiben. Dies ist der Fall z. B. zwischen dem Signalraum und dem sensorischen Raum in der sensorischen Physik [1]. Durch die Beziehungen (a) ist die Geometrie des sensorischen Raumes und somit auch die vom Standpunkt der sensorischen Physik benötigten Grundparameter bestimmt. Die Beziehungen (a) sind in der sensorischen Physik, zumindest in erster Näherung, durch das Weber-Fechnersche Gesetz [1], [5] gegeben. Dieses bestimmt daher auch die Struktur des sensorischen Raumes.

Bei quantitativer Behandlung von im Rahmen des sensorischen Raumes beschriebenen Perzeptionsphänomenen wurden verschiedene quantitative Kriterien, die in unmittelbarer Beziehung zu den geometrischen Größen des sensorischen Raumes stehen [1], wie z. B. Afinität vom zwei Wahrnehmungen, eingeführt. Zu den geometrischen Größen, die bei der Beurteilung von sensorischen Eigenschaften der Menge der Wahrnehmungen eine wichtige Rolle spielen, gehören vor allem die Entfernung von zwei Punkten des sensorischen Raumes, die Größe des Volumenelementes u. ä.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung einiger relevanten Parameter des sensorischen Raumes (der geodetischen Länge usw.), dessen Metrik durch das Weber-Ferchnersche Transformationsgesetz generiert ist.

1. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Im Raum, dessen Metrik durch einen metrischen Tensor $\{g_{ij}\}$ gegeben ist, wird die Gleichung für die kürzeste (geodetische) Verbindung von zwei festen Punkten mittels Variationsrechnung hergeleitet. Die Länge der Verbindungslinie soll extremal und ihre Variation somit gleich Null sein.

Wir werden die zwei willkürlich aber fest gewählten Punkte verbindende geodetische Linie

$$x^i = x^i(t) \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

im n-dimensionalen Raum aus der Kurvenschar X von Kurven verschiedener Länge, deren parametrische Darstellung

$$x^i = x^i(t, \alpha) \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{2}$$

lautet und die die beiden festen Punkte verbinden, mittels Längenvariation nach dem Parameter α suchen. Die Länge einer Kurve aus der betrachteten Schar X ist gegeben durch

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt, \tag{3}$$

wobei die Größe s über die $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ und $\dfrac{dx^i(t, \alpha)}{dt}$ [3] von α abhängt.

Nach Durchführung der Variation erhalten wir für die geodetische Linie ein System von Differentialgleichungen folgenden Types

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

wobei

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_l \tfrac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

die Christoffelschen Dreiindizessymbole zweiter Art [4] darstellt.

Mit Hilfe des Skalars

$$g = \mathrm{Det}\,\{g_{ij}\} = \begin{vmatrix} g_{11}\, g_{12} \dots g_{in} \\ g_{21}\, g_{22} \dots g_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ g_{ni}\, g_{n} \dots g_{nn} \end{vmatrix}$$

kann das Volumenelement des n-dimensionalen Raumes [4] bestimmt werden:

$$\mathrm{d}W = g\, \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^n. \tag{5}$$

Hieraus erhalten wir für das n-dimensionale Volumen W des Raumteiles $\mathfrak{A}$

$$W = \int_{\mathfrak{A}} \sqrt{g} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^n, \tag{6}$$

und für das m-dimensionale Volumen $W_m (m < n)$ eines Raumbereiches $\mathfrak{B}$ des Raumes das über $\mathfrak{B}$ erstreckte m-fache Integral

$$W_{(m)} = \int_{\mathfrak{B}} \sqrt{\gamma} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^m, \tag{7}$$

wobei

$$\gamma = \mathrm{Det}\, \gamma_{\alpha\beta},$$

mit

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial F_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial F_j}{\partial x^\beta}.$$

Hierbei sind $F_i (i = 1, 2, \dots, n)$ Transformationsfunktionen zwischen den Koordinaten im Signalraum $x^1, x^2, \dots, x^n$ und im sensorischen Raum.

2. METRIK DES SENSORISCHEN RAUMES

Die Transformationsgleichungen der Form (a) zwischen Signalgrößen und sensorischen Größen stellen eigentlich das Grundgesetz der sensorischen Physik dar. Ihre Gestalt wurde noch im vorigen Jahrhundert von Weber und Fechner [5] angegeben; sie werden deshalb auch als Weber-Fechnersches Gesetz bezeichnet. Wie bekannt, setzt das Weber-Fechnersche Gesetz einen rein logaritmischen Zusammenhang zwischen sensorischen Größen und Signalgrößen voraus. In letzter Zeit wurden auch Gesetze anderer Form, vor allem von Stevens [6, 7], angegeben, bei denen der Zusammenhang zwischen sensorischen Größen und Signalgrößen durch eine Potenzfunktion gegeben ist. Von Stevens stammt auch eine Modifikation des ursprünglichen Weber--Fechnerschen Gesetzes, und zwar in der Form [2]

$$s^i = \varkappa^i \ln (x^i + k^i),$$

wobei x^i eine bestimmte Signalgröße und s^i das zu dieser Größe gehörende sensorische Korrelat darstellt; $\varkappa^i$ und k^i sind gewisse Konstanten. Falls wir die Transformationsbeziehungen zwischen den Signalgrößen und den sensorischen Größen nach dem modifizierten Weber-Fechnerschen Gesetz als Grundlage heranziehen, so bekommen wir die Beziehungen (a) in der Form

$$\begin{aligned} s^1 &= \varkappa^1 \ln(x^1 + k^1) \\ s^2 &= \varkappa^2 \ln(x^2 + k^2) \\ &\vdots \\ s^n &= \varkappa^n \ln(x^n + k^n). \end{aligned} \tag{8}$$

Die Transformationsgleichungen (8) stellen allerdings nur einen stark idealisierten Fall von reellen Transformationsbeziehungen dar, da die Abhängigkeit einer gewissen sensorischen Größe von nur einer einzigen Signalgröße vorausgesetzt wird, was aber in der sensorischen Physik allgemein gesehen äußerst selten ist. Ferner sollten auch weitere, auf die sensorischen Parameter einfließenden Phänomene, wie etwa Adaptation, Zeitabhängigkeit und dergleichen mit berücksichtigt werden. Durch diese käme in die Transformationsgleichungen (8) ein Zeitfaktor hinein, der sich mathematisch dahingehend äußern würde, daß auf der rechten Seite dieser Gleichungen Zeit als Parameter auftreten würde.

Im Prinzip kann bei Einführung der Metrik im Signalraum und im sensorischen Raum auf zweierlei Art vorgegangen werden:

a. Man setzt voraus, die Metrik des sensorischen Raumes sei euklidisch und die Transformationsbeziehungen (a) bestimmen dann eine solche Metrik im Signalraum, für die dies erfüllt ist. Den Signalraum mit dieser Metrik werden wir als Raum S' bezeichnen.

b. Man setzt voraus, die Metrik des Signalraumes sei euklidisch. Die Metrik im sensorischen Raum wird dann durch Umkehrtransformation zu den Beziehungen (a) generiert.

Die Komponenten des metrischen Tensors $\{g_{ij}\}$, der die geometrische Struktur des Raumes S' bestimmt, sind gegeben durch die Beziehungen [4]

$$g_{ij} = \sum_i \frac{\partial s^1}{\partial x^i} \frac{\partial s^1}{\partial x^j},$$

wobei $s^1, s^2, \dots, s^n$ durch die Beziehungen (a) bestimmt sind.
Hinsichtlich dessen, daß $g_{ij} = 0$ für $i = j$ und daß

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = \frac{\varkappa^i}{x^i + k^i}$$

ist, wird der metrische Tensor des Raumes S' die Form

$$\{g_{ij}\} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\varkappa^1}{x^1+k^1}\right)^2 & & \ldots 0 \ldots & \\ & \left(\frac{\varkappa^2}{x^2+k^2}\right)^2 & & \\ & & \ddots & \\ \ldots 0 \ldots & & & \left(\frac{\varkappa^n}{x^n+k^n}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

haben.

3. EINIGE GEOMETRISCHEN PARAMETER DES RAUMES S'

Im folgenden werden wir uns mit einigen relevanten geometrischen Parametern des Raumes, dessen metrischer Tensor vom Typ (9) ist, befassen. Zunächst soll die Gleichung für die geodetische Linie zwischen zwei Punkten

$$A^1 \equiv (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$$

$$A^2 \equiv (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n),$$

bestimmt werden. Um die Gleichung (4) benutzen zu können, müssen wir zunächst die Christoffelschen Symbole zweiter Art Γ^i_{jk} nach der Beziehung

$$\Gamma^i_{jk} = \tfrac{1}{2} \sum_l g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{10}$$

ermitteln, wobei sich die Summierung über l erstreckt. Den kontravarianten Tensor g^{il} bestimmen wir aus dem kontravarianten Tensor g_{ik} nach der Beziehung

$$\sum_k g_{ik} g^{kl} = \delta^l_i.$$

Mit der Bezeichnung

$$a^i = \left(\frac{\varkappa^i}{x^i + k^i} \right)^2$$

können die Elemente des metrischen Tensors in der Form

$$g_{ik} = a^i \delta_{ik} \qquad \text{bzw.} \qquad g^{il} = \frac{1}{a^i} \delta^{il}$$

geschrieben werden.

Die Christoffelschen Symbole zweiter Art können nach der Beziehung (10) berechnet werden:

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_l \tfrac{1}{2} \frac{1}{a^i} \delta^{il} \left[\frac{\partial(a^j \delta_{jl})}{\partial x^k} + \frac{\partial(a^k \delta)_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial(a^j \delta_{jk})}{\partial x^l} \right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{1}{a^i} \left[\delta_{ji} \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \delta_{ki} \frac{\partial a^k}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right]. \tag{11}$$

Führt man weiter die Bezeichnung

$$\frac{\partial a^j}{\partial x^k} = b^j \delta_{jk},$$

mit

$$b^j = -2 \frac{(\varkappa^j)^2}{(x^j + k^j)^3}$$

ein, so bekommen wir für (11)

$$\Gamma^i_{jk} = \tfrac{1}{2} \frac{1}{a^i} \delta_{ki} \delta_{kj} b^k. \tag{12}$$

Nach Einsetzen der Christoffelschen Symbole aus (12) in die die geodetische Kurve bestimmende Beziehung (4) erhalten wir ein System von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} - \frac{1}{x^i + k^i} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

deren Lösung die Gestalt

$$x^i = C_2^i \exp(C_1^i s) - k^i \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

hat, wobei die Integrationskonstanten C_2^i und C_1^i durch die Randbedingungen gegeben sind. In unserem Fall soll die geodetische Linie durch die Punkte A^1 und A^2 verlaufen. Um die Lage zu vereinfachen, nehmen wir an, daß der Parameter s im Punkt A^1 den Wert 0 und im Punkt A^2 den Wert 1 annimt. Somit erhalten wir für $s = 0$

$$x_1^i = C_2^i - k^i,$$

und für $s = 1$

$$x_2^i = C_2^i \exp(C_1^i) - k^i,$$

woraus für die Integrationskonstanten

$$C_2^i = x_1^i + k^i, \qquad C_1^i = \ln \frac{x_2^i + k^i}{x_1^i + k^i} \tag{15}$$

folgt.

Nach Einsetzen von (15) in die allgemeine Lösung der Gleichungen (13) erhalten wir die parametrische Form der Gleichung der im Raum S' durch die Punkte A^1 und A^2 verlaufenden geodetischen Linie

$$x^i = (x_1^i + k^i) \exp\left\{s \,.\, \ln\left[\frac{x_2^i + k^i}{x_1^i + k^i}\right]\right\} - k^i. \tag{16}$$

Der Skalar $\|g\| = \mathrm{Det}\,\{g_{ij}\}$ ist gleich dem Produkt der Diagonalelelemente der Matrix (9)

$$\|g\| = \left(\frac{\varkappa^1}{x^1 + k^1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varkappa^2}{x^2 + k^2}\right)^2 \cdots \left(\frac{\varkappa^n}{x^n + k^n}\right)^2.$$

Für das Volumenelement des Raumes S' erhalten wir somit nach (5) die Beziehung

$$\mathrm{d}W = \frac{\varkappa^1}{x^1 + k^1} \cdot \frac{\varkappa^2}{x^2 + k^2} \cdots \frac{\varkappa^n}{x^n + k^n} \,\mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n.$$

Analogisch kann auch die Determinante γ und folglich nach (7) das m-dimensionale Volumenelement des Raumes S' bestimmt werden.

Wird im Signalraum euklidische Metrik vorausgesetzt, so kann die geometrische Struktur des sensorischen Raumes völlig analog bestimmt werden. Die Beziehungen zwischen Signalgrößen und sensorischen Größen bekommt man durch inverse Beziehungen zu den Transformationsbeziehungen (a)

$$\begin{aligned} x^1 &= \exp(s^1/\varkappa^1 - k^1) \\ x^2 &= \exp(s^2/\varkappa^2 - k^2) \\ &\;\;\vdots \\ x^n &= \exp(s^n\varkappa/^n - k^n), \end{aligned}$$

woraus wir für die Elemente des metrischen Tensors

$$g_{ik} = \left(\frac{1}{\varkappa^i}\right)^2 \exp(2s^i/\varkappa^i)\delta_{ik},$$

erhalten.

Mit den Christoffelschen Symbolen zweiter Art

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{\varkappa^i} \delta_{ik}\delta_{jk},$$

bekommen wir die Gleichung der geodetischen Linie

$$\frac{\mathrm{d}^2 s^i}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{\varkappa^i}\left(\frac{\mathrm{d}s^i}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0,$$

deren Lösung die Form

$$s^i = \varkappa^i \ln[\varkappa^i(As + B)],$$

hat, wobei s ein Parameter und A sowie B Integrationskonstanten sind. Analogisch wie im Raum S' können auch die Determinante $\|g\|$ und das Volumenelement des sensorischen Raumes ermittelt werden.

Die angeführten geometrischen Parameter des Raumes S' spielen eine wesentliche Rolle in der sensorischen Physik, insbesondere weil sie die Beziehungen im sensorischen Raum zu geometrisieren ermöglichen und dadurch die Einführung von quantitativen Methoden in der sensorischen Physik im allgemeinen erlauben.

Abschließend möchte ich an dieser Stelle Herrn Dipl.-Phys. D. Krúpa für seine Mitwirkung bei einigen Berechnungen meinen Dank aussprechen.

SCHRIFTTUM

[1] Majerník V., *Relations between the Signal and Sensory Space in Sensory Communication.* Congress report of the 5th International Congress on Cybernetics. Namur 1968, 772.

[2] Stevens S. S., *Mathematics, Measurements and Psychophysics.* In: *Handbook of Experimental Psychology.* J. Wiley and Sons, New York 1951.

[3] Рашевский П. К., *Риманова геометрия а тензоровый анализ.* Изд. Наука, Москва 1964.

[4] Duschek A., Hochrainer A., *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung,* II. Teil. Springer Verlag, Wien 1950.

[5] Fechner G. T., *Elemente der Psychophysik.* Breitkopf und Härtel, Leipzig 1860.

[6] Stevens S. S., Psychol. Rev. *43* (1936), 405.

[7] Stevens S. S., Psychol. Rev. *64* (1957), 153.

Eingegangen am 12. 3. 1970

Fyzikálny ústav SAV, Bratislava