Fyzikálny časopis 20 (1970), No. 2

ODVODENIE NAVIEROVEJ—STOKESOVEJ ROVNICE PRE STLAČITEĽNÚ VISKÓZNU KVAPALINU

IVAN NÁTER, Bratislava

V metodickom príspevku [1] je podané odvodenie Navierovej-Stokesovej rovnice pre nestlačiteľnú viskóznu kvapalinu. Vychádza sa tu zo základného predpokladu, že plošná sila vyvolaná viskozitou kvapaliny je lineárnou vektorovou funkciou plošného vektora priradeného plošnému elementu, na ktorý uvažovaná sila pôsobí. Funkčným operátorom je tzv. tenzor rýchlosti deformácie [2], ktorý je definovaný symetrickou časťou gradientu rýchlosti prúdenia kvapaliny v danom mieste:

$$\mathbf{R} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla). \tag{1}$$

Jednoduchosť a prehľadnosť spomínaného odvodenia závisí najmä od dôsledného používania symboliky a pravidiel vektorového a tenzorového počtu.

V nasledujúcom príspevku podávam podobným spôsobom odvodenie Navierovej-Stokesovej rovnice pre stlačiteľnú kvapalinu, vychádzajúc zo všeobecnejšieho predpokladu, že súradnice viskóznej časti celkového tenzora napätia v prúdiacej kvapaline sú lineárnymi funkciami súradníc spomínaného tenzora rýchlosti deformácie (1). Odvodenie tejto všeobecnejšej Navierovej-Stokesovej rovnice nie je ovšem nijakou novinkou, v učebniciach a odbornej literatúre sa však väčšinou uvádza v zložkovom tvare, čím sa, podľa môjho názoru, stáva neprehľadnejším.

Označme symbolom $\mathbf{P}_v$ tú časť celkového tenzora napätia $\mathbf{P}$ v prúdiacej kvapaline, ktorá má svoj pôvod vo viskozite kvapaliny, teda

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mathbf{P}_v,$$

kde p je celkový tlak v kvapaline zmenšený o časť vyvolanú viskozitou, $\mathbf{I}$ tenzor identity. Pokiaľ rýchlosť prúdenia nie je príliš veľká (pri laminárnom prúdení), môžeme predpokladať, že súradnice tenzora $\mathbf{P}_v$ sú lineárnymi funkciami súradníc tenzora deformácie rýchlosti $\mathbf{R}$. Tento predpoklad je vyjadrený vzťahom

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{C}^{(4)} \cdot\cdot\, \mathbf{R}, \tag{3}$$

kde $\mathbf{C}^{(4)}$ je tenzor štvrtého stupňa a je vynásobený dvojskalárne tenzorom $\mathbf{R}$.

So vzťahom (3) je úplne analogický vzťah, ktorým je vyjadrený súvis tenzora napätia $\mathbf{N}$ a tenzora deformácie $\mathbf{D}$ v pružnom prostredí (všeobecný Hookeov zákon). Tenzor deformácie je tu definovaný ako symetrická časť gradientu posunutia $\mathbf{u}$ jednotlivých bodov deformovaného telesa:

$$\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla).$$

Symetričnosť tenzora napätia a tenzora deformácie redukuje 81 súradníc tenzora $\mathbf{C}^{(4)}$ na 36 elastických koeficientov. Ako sa ďalej bežne dokazuje v náuke o pružnosti [2], v izotropnom pružnom prostredí sú len dva elastické koeficienty nezávislé a súvis medzi tenzorom deformácie a tenzorom napätia je

$$\mathbf{N} = 2G\mathbf{D} + L\varepsilon\mathbf{I}, \tag{4}$$

kde G a L sú Lammého konštanty a $\varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{u}$ je prvý skalár tenzora deformácie [2], [3]. Spôsob dôkazu platnosti vzťahu (4) je taký, že ho možno aplikovať na akékoľvek dve tenzorové funkcie miesta v izotropnom prostredí, ktoré sú spolu viazané vzťahom analogickým vzťahu (3), a sú reprezentované symetrickými tenzormi.

Pretože kvapalina je izotropným prostredím, môžeme hneď písať

$$\mathbf{P}_v = 2\eta\mathbf{R} + \xi(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{I},$$

kde η a ξ sú tzv. súčinitele prvej a druhej viskozity a div $\mathbf{v}$ je prvý skalár tenzora deformácie rýchlosti.

Celkový tenzor napätia (2) v prúdiacej viskóznej kvapaline je teda

$$\mathbf{P} = (-p + \xi \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{I} + \eta(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla).$$

Plošnú silu df, ktorá zo strany orientácie plošného vektora d$\mathbf{S}$ pôsobí na ľubovoľnú plôšku dS v kvapaline, môžeme písať

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}.$$

Pri odvodení Navierovej-Stokesovej rovnice vyjdeme z Newtonovej pohybovej rovnice. V prúdiacej kvapaline uzavretou plochou S vyčleňme určitú časť kvapaliny vnútri tejto plochy o objeme V. Ak intenzitu objemových síl v kvapaline označíme $\mathbf{E}$ a hustotu kvapaliny ϱ, pohybová rovnica pre vybranú časť kvapaliny je

$$\mathbf{a}\int \varrho \, \mathrm{d}V = \int \varrho\mathbf{E} \, \mathrm{d}V + \oint \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}, \tag{5}$$

kde $\mathbf{a}$ je zrýchlenie jej ťažiska, objemové integrály sa vzťahujú na celé vnútro uzavretej plochy a plošné vektory d$\mathbf{S}$ sú orientované na vonkajšiu stranu uzavretej plochy S, na ktorú sa vzťahuje plošná integrácia.

S po užitím Gaussovej vety upravíme rovnicu (5) na tvar

$$\mathbf{a}\int \varrho \, \mathrm{d}V = \int \varrho\mathbf{E} \, \mathrm{d}V + \int (\operatorname{div} \mathbf{P}) \, \mathrm{d}V$$

a ak ešte uvážime, že všetky tri integrály sa vzťahujú na ten istý, inač úplne ľubovoľný objem, dostaneme

$$\mathbf{a}\varrho = \varrho\mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{P}. \tag{6}$$

Upravme ešte s použitím známych pravidiel vektorového a tenzorového počtu výraz div $\mathbf{P}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \nabla \cdot [(-p + \xi\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + \eta(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)] =$$
$$= -\operatorname{grad} p + (\eta + \xi) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta\Delta\mathbf{v}.$$

Po dosadení do rovnice (6) a malej úprave dostaneme Navierovu-Stokesovu rovnicu v známom tvare:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{E} + \frac{1}{\varrho}[-\operatorname{grad} p + (\eta + \varrho) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta\Delta\mathbf{v}]. \tag{7}$$

Zrýchlenie $\mathbf{a}$ sme podľa Eulera vyjadrili ako súčet lokálneho a konvektívneho zrýchlenia [2]

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}.$$

S použitím podmienky nestlačiteľnosti kvapaliny div $\mathbf{v} = 0$ dostaneme z rovnice (7) ihneď Navierovu-Stokesovu rovnicu pre nestlačiteľnú kvapalinu [1].

LITERATÚRA

[1] Náter I., Mat.-fyz. čas. SAV 7 (1957), XX.
[2] Brdička M., *Mechanika kontinua.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.
[3] Ilkovič D., *Vektorový počet.* JČMF, Praha1950.

Došlo 1. 12. 1969

Katedra fyziky
Elektrotechnickej fakulty SVŠT,
Bratislava