Fyzikálny časopis 19 (1969), No. 4

TENZOR ODRAZU A LOMU ELEKTROMAGNETICKÝCH VĹN VO ŠTVORROZMERNEJ FORMULÁCII

LADISLAV DUNAJSKÝ, Nitra

Odraz a lom elektromagnetických vĺn na rovinnom rozhraní dvoch ľubovoľných prostredí invariantne opisujú rovnice (6) a (7) v Minkowského štvorrozmernom priestoro-čase. Štvorrozmerné tenozory odrazu $\hat{r}$ a lomu $\hat{t}$ určujú vzťahy (11)–(19). Ďalej sme urobili transformáciu tenzoru odrazu, lomu a tenzorov elektromagnetického poľa dopadajúcej, odrazenej a lomenej vlny podľa vzťahov (20)–(22). Týmito transformáciami sme dostali vzťahy (23)–(25).

ÚVOD

V súvislosti s diskusiou o fázových posuvoch, ktorá prebiehala i na stránkach tohto časopisu, autor týchto riadkov v článku [1] zaviedol tenzor odrazu (lomu), ktorý priraďuje vektor intenzity elektrického poľa odrazenej (lomenej) vlny k vektoru intenzity elektrického poľa dopadajúcej vlny. V nasledujúcich riadkoch invariantne opíšeme odraz a lom rovinných harmonických elektromagnetických vĺn na rovinnom rozhraní dvoch ľubovoľných prostredí v Minkowského štvorrozmernom priestore-čase. Pri tomto opise použijeme symboliku, ktorú zaviedol akademi. D. Ilkovič a jeho škola v článkoch [2—5].

Maxwellove rovnice v štvorrozmernej formulácii napsíšeme podľa článku [2] alebo knihy [6] pre špeciálny prípad ľubovoľného prostredia bez prúdu a náboja v tvare:

$$\Box \,.\, \mathbf{F} = 0, \tag{1}$$

$$\Box \,.\, \mathbf{G} = 0, \tag{2}$$

kde $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ sú antisymetrické tenzory elektromagnetického poľa tvaru:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{H} \times \mathbf{I} + ic(\boldsymbol{Dl} - \boldsymbol{lD}), \tag{3}$$

$$\mathbf{G} = \frac{i}{c}(\boldsymbol{E} \times \mathbf{I}) + (\boldsymbol{Bl} - \boldsymbol{lB}). \tag{4}$$

Tu $\mathbf{I} = \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk}$ je trojrozmerný tenzor identity a $\boldsymbol{l}$ je jednotkový vektor v smere tzv. časlovej osi. Zo vzťahov (3) a (4) bezprostredne vyplýva, že

$$\mathbf{D} = ic\mathbf{I} \,.\, \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \mathbf{G} \,.\, \mathbf{I}. \tag{5}$$

INVARIANTNÉ OPÍSANIE ODRAZU A LOMU ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN

Dopadajúcu resp. odrazenú vlnu v prvom prostredí charakterizuje tenzor $\mathbf{G}_1^+$, resp. $\mathbf{G}_1^-$ a lomenú vlnu v druhom prostredí tenzor $\mathbf{G}_2^+$. Dopadajúca vlna je daná, obrazená a lomená vlna závisí od dopadajúcej vlny, materiálových konštánt oboch prostredí a uhla dopadu. Obidve prostredia nech sú v pokoji.

Maxwellove rovnice (1) a (2) sú lineárne a homogénne. V dôsledku tohto tenzor elektromagnetického poľa odrazenej vlny $\mathbf{G}_1^-$ a lomenej vlny $\mathbf{G}_2^+$ je lineárnou homogénnou funkciou tenzoru elektromagnetického poľa dopadajúcej vlny $\mathbf{G}_1^+$. Homogénny lineárny vzťah medzi dvoma tenzormi druhého stupňa udáva tenzor štvrtého stupňa.

Teda odraz a lom elektromagnetickej vlny opisujú vzťahy:

$$\mathbf{G}_1^- = \mathbf{r} : \mathbf{G}_1^+, \tag{6}$$

$$\mathbf{G}_2^+ = \mathbf{t} : \mathbf{G}_1^+. \tag{7}$$

V tých rovniciach symbol: značí dve skalárne násobenia za sebou, $\mathbf{r}$ je štvorrozmerný tenzor odrazu a t je štvorrozmerný tenzor lomu.

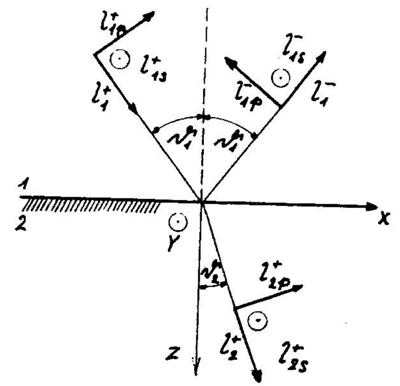
Rovnice (6) a (7) sme mohli napísať práve pre lineárnosť Maxwellových rovníc.

Tenzory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{t}$ je výhodné (pozri [1]) explicitne vyjadriť v súradnicovej sústave, ktorej priestorové jednotkové vkektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ sú orientované podľa obr. 1. Hraničné podmienky pre intenzitu elektrického a magnetického poľa majú teraz tvar:

$$\begin{aligned} E_{2x}^+ - E_{1x}^- &= E_{1x}^+, \\ E_{2y}^+ - E_{1y}^- &= E_{1y}^+, \\ H_{2x}^+ - H_{1x}^- &= H_{1x}^+, \\ H_{2y}^+ - H_{1y}^- &= H_{1y}^+. \end{aligned} \tag{8}$$

Vyjadrením súradníc H pomocou E a opačne na základe Maxwellových rovníc dostaneme obvyklým postupom, ako závisia súradnice vektorov elektromagnetického poľa odrazovej a lomenej vlny od dopadajúcej vlny, od uhla dopadu a od látkových konštánt oboch prostredí. Výsledky týchto výpočtov možno zapísať takto:

$$\begin{aligned} E_{1x}^- &= r_2 E_{1x}^+, & E_{2x}^+ &= t_2 E_{1x}^+, \\ E_{1y}^- &= r_3 E_{1x}^+, & E_{2y}^- &= t_3 E_{1y}^+, \\ E_{1z}^- &= r_1 E_{1z}^+, & E_{1z}^+ &= t_1 E_{1z}^+. \end{aligned} \tag{9}$$



Obr. 1.

$$\begin{aligned} H_{1x}^- &= r_4 H_{1x}^+, & H_{2x}^+ &= \frac{\mu_1}{\mu_2} t_4 H_{1x}^+, \\ H_{1y}^- &= r_5 H_{1y}^+, & H_{2y}^+ &= \frac{\mu_1}{\mu_2} t_5 H_{1y}^+, \\ H_{1z}^- &= r_6 H_{1z}^+, & H_{2z}^+ &= \frac{\mu_1}{\mu_2} t_6 H_{1z}^+. \end{aligned} \tag{10}$$

Koeficienta odrazu a lomu sú explicitne vyjadrené takto {po zavedení týchto substitúcií pre stručnosť zápisov

$$a = \cos\vartheta_1, \qquad b = \cos\vartheta_2,$$

kde ϑ_1 (ϑ_2) je uhol dopadu (lomu);

$$m_1 = \mu_2 n_1, \qquad m_2 = \mu_1 n_2,$$

kde μ je permeabilita a n index lomu, pričom dolné indexy pri μ a n značia číslo prostredia}:

$$r_2 = -r_1 = \frac{m_1 b - m_2 a}{m_1 b + m_2 a}, \tag{11}$$

$$r_3 = \frac{m_1 a - m_2 b}{m_1 a + m_2 b}, \tag{12}$$

$$r_4 = -r_6 = \frac{m_2 b - m_1 a}{m_2 b + m_1 a}, \tag{13}$$

$$r_5 = \frac{m_2a - m_1b}{m_2a + m_1b}, \tag{14}$$

$$t_2 = \frac{bn_2}{an_1} t_1 = \frac{2m_1b}{m_1b + m_2a}, \tag{15}$$

$$t_3 = \frac{2m_1a}{m_1a + m_2b}, \tag{16}$$

$$t_4 = \frac{bn_2}{an_1} t_6 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{2m_2b}{m_2b + m_1a}, \tag{17}$$

$$t_5 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{2m_2a}{m_2a + m_1b}. \tag{18}$$

Zo vzťahov (10) vidíme, že súradnice odrazeného, resp. lomeného vektora u a m závisia len od príslušnej súradnice dopadajúcej vlny. Uvedomiac si toto, na základe týchto vzťahov možno napísať tenzor odrazu **r** a lomu **t** v tvare:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r_1(\mathbf{ijji} + \mathbf{jiij}) + r_2(\mathbf{jkkj} + \mathbf{kjjk}) + \\
&+ r_3(\mathbf{kiik} + \mathbf{ikki}) + r_4(\mathbf{illi} + \mathbf{liil}) + \\
&+ r_5(\mathbf{jllj} + \mathbf{ljjl}) + r_6(\mathbf{kllk} + \mathbf{lkkl}), \\
\mathbf{t} &= t_1(\mathbf{ijji} + \mathbf{jiij}) + t_2(\mathbf{jkkj} + \mathbf{kjjk}) + \\
&+ t_3(\mathbf{kiik} + \mathbf{ikki}) + t_4(\mathbf{illi} + \mathbf{liil}) + \\
&+ t_5(\mathbf{jllj} + \mathbf{ljjl}) + t_6(\mathbf{kllk} + \mathbf{lkkl}).
\end{aligned} \tag{19}$$

Súradnice tenzorov **r** a **t** sú len funkciou n_1, n_2; μ_1, μ_2 a ϑ_1, lebo medzi ϑ_1 a ϑ_2 plastí vzťah:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2.$$

TRANSFORMÁCIA TENZOROV ODRAZU A LOMU

Zjednodušenie vzťahov predchádzajúcej kapitoly možno docieliť na základe priečnosti elektromagnetických vĺn (t.j. súradnice diád $\mathbf{l}_1$ - $\mathbf{l}_1$- a $\mathbf{l}_1$ $\mathbf{l}$m sa rovnajú nule). Spojme dopadajúcou, odrazenou a lomenou vlnou sústavu jednotkových vektorov podľa obr. 1. Príslušné transformačné vzťahy majú tvar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos \vartheta_1 \mathbf{l}_{1p}^+ + \sin \vartheta_1 \mathbf{l}_1^+, \\
\mathbf{j} &= \mathbf{l}_{1s}^+, \\
\mathbf{k} &= -\sin \vartheta_1 \mathbf{l}_{1p}^+ + \cos \vartheta_1 \mathbf{l}_1^+, \\
\mathbf{l} &= \mathbf{l};
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= -\cos \vartheta_1 \mathbf{l}_{1p}^- + \sin \vartheta_1 \mathbf{l}_1^-, \\
\mathbf{j} &= \mathbf{l}_{1s}^-, \\
\mathbf{k} &= -\sin \vartheta_1 \mathbf{l}_{1p}^- - \cos \vartheta_1 \mathbf{l}_1^+, \\
\mathbf{l} &= \mathbf{l};
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos \vartheta_2 \mathbf{l}_{2p}^+ + \sin \vartheta_2 \mathbf{l}_2^+, \\
\mathbf{j} &= \mathbf{l}_{2s}^+, \\
\mathbf{k} &= -\sin \vartheta_2 \mathbf{l}_{2p}^+ + \cos \vartheta_2 \mathbf{l}_2^+, \\
\mathbf{l} &= \mathbf{l}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Po vykonaní týchto transformácií te×zory dopadajúcej, odrazenej a lomene vlny budú mať tvar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_\nu^\pm &= \frac{i}{c} E_\nu^\pm (\mathbf{l}_{\nu p}^\pm \mathbf{l}_\nu^\pm - \mathbf{l}_\nu^\pm \mathbf{l}_{\nu p}^\pm) + B_{\nu p}^\pm (\mathbf{l}_{\nu p}^\pm \mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{l}_{\nu p}^\pm) + \\
&+ B_{\nu s}^\pm (\mathbf{l}_{\nu s}^\pm \mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{l}_{\nu s}^\pm) + \frac{i}{c} E_{\nu p}^\pm \mathbf{l}_\nu^\pm \mathbf{l}_{\nu s}^\pm - \mathbf{l}_\nu^\pm \mathbf{l}_{\nu s}^\pm).
\end{aligned} \tag{23}$$

Horný index + platí pre dopadajúcu a lomenú vlnu a − pre odrazenú. Dolný index 0 nadobúda hodnotu 1 pre dopadajúcu a odrazenú vlnu a hodnotu 2 pre lomenú.

Tenzor **r**, resp. **t** aj teraz má sprostredkovať vzťahy (6), resp. (7), a preto jeho prvých a druhých faktorov transformujeje podľa vzťahov (21), resp. (22) a tretích a štvrtých v oboch prípadoch podľa vzťahu (20). Po vykonaní týchto transformácií dostaneme vzťahy, v ktorých explicitne vypíšeme len tie zložky, ktoré sprostredkπjú vzťah nenulových zložie tenzorov **G**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r_s(\mathbf{l}_{1p}^-\mathbf{l}_1^-\mathbf{l}_1^+\mathbf{l}_{1p}^+ + \mathbf{l}_1^-\mathbf{l}_{1p}^-\mathbf{l}_{1p}^+\mathbf{l}_1^+) + r_p(\mathbf{l}_1^-\mathbf{l}_{1s}^-\mathbf{l}_{1s}^+\mathbf{l}_1^+ + \mathbf{l}_{1s}^-\mathbf{l}_1^-\mathbf{l}_1^+\mathbf{l}_{1s}^+) + \\
&+ r_s'(\mathbf{l}_{1s}^-\mathbf{l}\mathbf{l}\mathbf{l}_{1s}^+ + \mathbf{l}\mathbf{l}_{1s}^-\mathbf{l}_{1s}^+\mathbf{l}) + r_p'(\mathbf{l}_{1p}^-\mathbf{l}\mathbf{l}\mathbf{l}_{1p}^+ + \mathbf{l}\mathbf{l}_{1p}^-\mathbf{l}_{1p}^+\mathbf{l}),
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= t_s(\mathbf{l}_2^+\mathbf{l}_{2s}^+\mathbf{l}_{1s}^+\mathbf{l}_1^+ + \mathbf{l}_{2s}^+\mathbf{l}_2^+\mathbf{l}_1^+\mathbf{l}_{1s}^+) + t_p(\mathbf{l}_2^+\mathbf{l}_{2s}^+\mathbf{l}_{1s}^+\mathbf{l}_1^+ + \mathbf{l}_{2s}^+\mathbf{l}_2^+\mathbf{l}_1^+\mathbf{l}_{1s}^+) + \\
&+ t_s'(\mathbf{l}_{2s}^+\mathbf{l}\mathbf{l}\mathbf{l}_{1s}^+ + \mathbf{l}\mathbf{l}_{2s}^+\mathbf{l}_{1s}^+\mathbf{l}) + t_p'(\mathbf{l}_{2p}^+\mathbf{l}\mathbf{l}\mathbf{l}_{1p}^+ + \mathbf{l}\mathbf{l}_{2p}^+\mathbf{l}_{1p}^+\mathbf{l}).
\end{aligned} \tag{25}$$

V posledných dvoch vzťahoch uvedené súradnice tenzorov dávajú vzťahy:

$$r_s = r_3, \quad r_p = r_1, \quad r_s' = r_5, \quad r_p' = r_6,$$

$$t_s = t_3, \quad t_p = \frac{n_2}{n_1} t_1, \quad t_s' = t_5, \quad t_p' = \frac{n_2}{n_1} t_6.$$

LITERATÚRA

[1] Dunajský L., Czech. J. Phys. *B 12* (1962), 665 a 742.
[2] Ilkovič D., Mat.-fyz. čas. *5* (1955), 222.
[3] Garaj J., Mat.-fyz. čas *5* (1955), 22.
[4] Garaj J., Mat.-fyz. čas. *5* (1955), 114.
[5] Krempaský J., Mat.-fyz. čas. *5* (1955), 124.
[6] Ilkovič D., *Fyzika*. SVTL, Bratislava 1959,722.

Došlo 12. 7. 1968

Katedra fyziky
Prevádzkovo-ekonomickej fakulty VŠP,
Nitra

DESCRIPTION OF REFLECTION AND REFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN MINKOWSKI FOUR-DIMENSIONAL SPACE

Ladislav Dunajský

Summary

Reflection and refraction of electromagnetic wave at the boundary between the two arbitraty media is described invariantly by means of equations (6) and (7) in Minkowski four-demensional sprace. Four-dimensional tensors of reflection $\hat{r}$ and refraction $\hat{t}$ are given by means of relations (11)—(19). Further tensor of reflection, refraction and tensor of electromagnetic field were transformed by means of relations (20)—(22). By means of these transformations relations (23)—(25) were obtained.