Fyzikálny časopis 18 (1968), No. 3

ПОЛОЖЕНИЕ И ЗНАЧЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПЕРЕСЫЩЕНИЯ В ДИФФУЗИОННЫХ КАМЕРАХ

ЯН ХРАПАН, (Ján Chrapan), Братислава

Для успешной работы диффузионных камер необходимо возникновение слоя пара в достаточно пересыщенном состоянии. Из теории диффузионных камер [1] вытекают довольно сложные соотношения, по которым можно с достаточной точностью установить ход пересыщения в объеме камеры при заданных краевых условиях. В этой работе выведены соотношения, по которым можно найти положение и значение максимального пересыщения в объеме камеры. Форма соотношений выгодна для численной обработки. Соотношения позволяют табулирование положения и значения максимального пересыщения, что важно главным образом в случаях, в которых диффуизонные камеры работают в небольших промежутках времени и не всегда при одинаковых краевых условиях.

В дальнейшем мы заменим диффузионную каеру моделью: планпараллельным слоем пара при заданных краевых условиях.

Пусть сохраняем краевые плоскости планпараллельного слоя пара в насыщенном состоянии при разных температурах $T_1 < T_2$. При равномерном распределении $T_1 \leqslant T \leqslant T_2$ температура в объеме пара является линейной функцией положения

$$T(z) = \alpha z + T_1, \tag{1}$$

где независимая переменная z обозначает координату в декартовой сыстеме координат, перпендикулярную к краевым плоскостям планпараллельного слоя пара с началом сыстемы координат на уровне краевой плоскости с температурой T_1.

При заданных краевых условиях давление на граничных плоскостях планпараллельного слоя пара не одинаково и с тем связанная неоднородность в объеме пара выравнивается с помошью бародиффузии. В стациoнарном состоянии пара для распределения давления $p_1 \leqslant p \leqslant p_2$ в объеме планпараллельного слоя пара применимо уравнение Лапласа

$$\Delta p = 0.$$

Переписав это уравнение для одной переменной и разрешив его, получим

$$p(z) = \beta z + p_1, \tag{2}$$

где p_1 — давление насыщенного пара на уровне плоскости с температурой T_1.

Если высоту планпараллельного слоя обозначим буквой h, то из уравнений (1) и (2) вытекает

$$\alpha = (T_2 - T_1)/h, \tag{3}$$

$$\beta = (p_2 - p_1)/h, \tag{4}$$

где p_2 обозначает давление насыщенного пара на уровне плоскости с температурой T_2.

В объеме планпараллельного слоя при заданных краевых условиях, определенных температурой T_1 и T_2 и давлением p_1 и p_2, давление пара задано уравнением (2).

Сравнивая значения давления $p(z)$, заданного уравнением (2), со значениями давления $p_0(z)$ (давление пара в насыщенном состоянии при температуре, определенной уравнением (1)), получаем, что отношение этих значений

$$S(z) = \frac{p(z)}{p_0(z)} \tag{5}$$

на краевых плоскостях планпараллельного слоя пара равняется 1, а в интервале независимой переменной $0 < z < h$ всегда больше 1. Это обозначает, что в объеме планпараллельного слоя пара при заданных условиях пар находится в пересыщенном состоянии. Отношение (5) определяет степень этого пересыщения в окрестности данной точки в объеме слоя.

Зависимость давления $p_0(z)$ насыщенных паров от температуры $T(z)$ можно выразить соотношением [2; (VII, 6)]

$$p_0(z) = \exp\{- A/[T(z) + C] + B\}, \tag{6}$$

где постоянные A, B, C зависят от природы пара и $T(z)$ представляет абсолютную температуру пара.

Из уравнения (1) и (2) можно получить

$$p_0(z) = \exp[- 1/s(z) + B]$$

где

$$s(z) = (\eta^{-1} - \xi^{-1})z/h + \xi^{-1}, \tag{7}$$

$$\xi = A/(T_1 + C) > 0, \tag{8}$$

$$\eta = A/(T_2 + C) > 0 \tag{9}$$

и относительно первоначального условия $T_1 < T_2$ справедливо неравенство

$$\xi > \eta. \tag{10}$$

На граничных плоскостях планпараллельного слоя сохраняем пар в насыщенном состоянии и поэтому на этих местах зависимость давления от температуры задана уравнением (6), по которому

$$p_1 = [p_0(z)]_{z=0} = \exp(- \xi + B),$$

$$p_2 = [p_0(z)]_{z=h} = \exp(- \eta + B).$$

Подставив эти значения в соотношение (4) и потом в соотношение (2), после небольшого переобразования получим

$$p(z) = \{[\exp(\xi - \eta) - 1]\, z/h + 1\} \exp(- \xi + B). \tag{11}$$

С помощью выражений (11) и (6) из уравнения (5) для степени пересыщения пара в объеме планпараллельного слоя получим соотношение

$$S(z) = \{[\exp(\xi - \eta) - 1]z/h + 1\} \exp[1/s(z) - \xi]. \tag{12}$$

Здесь величина $s(z)$ задана соотношением (7).

По соотношению (12) степень пересыщения пара в данном слое является трансцендентной функцией положения.

Значение координаты z в объеме слоя изменяется в интервале

$$0 < z < h. \tag{13}$$

Для значения $z = 0$ или $z = h$ из соотношения (12) следует $S(0) = S(h) = 1$, в согласии с тем, что на граничных плоскостях слоя сохраняем пар в насыщенном состоянии. Для координаты z, для которой выполняется неравенство $0 < z < h$, покажем, что степень пересыщения $S(z)$, как это следует из (12), свегда больше 1. Это значит, что в обьеме слоя пар находится в пересыщенном состоянии. Доказательство будет основано на том, что покажем, что функция $S(z)$ имеет между значениями $S(0) = 1$ и $S(h) = 1$ в интервале независимо переменной $0 < z < h$ только один экстремум — максимум.

Взяв производную из уравнения (5) по z и приравнивая числитель нулю, для экстремальной величины пересыщения получаем

$$S(z_0) = \frac{p(z_0)}{p_0(z_0)} = \frac{p'(z_0)}{p_0'(z_0)}; \tag{14}$$

z_0 здесь представляет координату положения в объеме исследуемого слоя пара, в котором степень пересыщения экстремальна.

Можно показать, что

$$S''(z_0) = -[(\eta^{-1} - \xi^{-1})/hs(z_0)^2]^2 [1 - 2s(z_0)]$$

откуда вытекает, что экспериментальное значение пересыщения пара максимально, если второй сомножитель в предыдущем соотношении является положительной величиной, т. е., если

$$s(z_0) < 1/2. \qquad (15)$$

Этот максимум представляет собой единственный экстремум функции (12) в интервале (13) независимой переменной.

Подставив (11) и (6) в выражение (14) и учитывая соотношение (7), получаем

$$s(z_0)^2 - s(z_0) + 1/\xi - (\eta^{-1} - \xi^{-1})/[\exp(\xi - \eta) - 1] = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$s(z_0)_{1,2} = 1/2 \pm \{1/4 - \xi^{-1} + (\eta^{-1} - \xi^{-1})/[\exp(\xi - \eta) - 1]\}^{1/2}. \qquad (16)$$

Ввиду неравенства (15) перед корнем в соотношении (16) можно брать только отрицательный знак.

Согласно выражению (7), для значения $s(z_0)$ должно быть справедливым условие

$$1/\xi < s(z_0) < 1/\eta, \qquad (17)$$

чтобы выполнилось неравенство (13).

Подставив левую сторону условия (17) в выражение (16), в котором перед корнем выберем отрицательный знак, при предположении

$$\xi > 2 \qquad (18)$$

получим

$$(\eta^{-1} - \xi^{-1})/[\exp(\xi - \eta) - 1] < 1/\xi^2.$$

На основе неравенства (10) введем обозначение $\xi - \eta = \varepsilon > 0$, после того

$$\varepsilon\xi/\eta < \exp(\varepsilon) - 1,$$

или, так как

$$\xi/\eta = 1 + \varepsilon/\eta,$$

$$\varepsilon(1 - \varepsilon/\eta) < \exp(\varepsilon) - 1.$$

Разложив первый член правой стороны в ряд Маклорена, получим

$$1/\eta < 1/2 + \varepsilon/3! + \ldots.$$

По полученному результату левая сторона неравенства (17) выполнится, если

$$\eta > 2. \qquad (19)$$

Этот результат одновременно подтверждает предположение (18) в соответствии с неравенством (10).

Что касается правой стороны условия (17), то после его применения в соотношении (16), в котором перед корнем берется знак минус и после применения неравенства (19), получаем

$$1/\eta^2 < (\eta^{-1} - \xi^{-1})\{1 + 1/[\exp(\xi - \eta) - 1]\}.$$

На основе обозначения $\xi - \eta = \varepsilon > 0$, введенного по неравенству (10), будет

$$1 - \exp(-\varepsilon) < \varepsilon\eta/\xi,$$

или, учитывая

$$\eta/\xi = 1 - \varepsilon/\xi,$$

получаем

$$1 - \exp(-\varepsilon) < \varepsilon(1 - \varepsilon/\xi). \qquad (20)$$

Разложим второй член левой стороны неравенства (20) в ряд Маклорена; после небольших переобразований можно писать

$$1/\xi < 1/\varepsilon$$

или

$$\varepsilon = \xi - \eta < \xi,$$

и наконец

$$\eta > 0.$$

Из выведенного вытекает, что при условии (19) будет выполнена и правая сторона неравенства (17).

Решая уравнение (7) на основе известного значения $s(z_0)$, вычисленного из уравнения (16), взятого с отрицательным знаком перед корнем, для координаты положения максимального пересыщения пара получим соотношение

$$z_0/h = s(z_0) - \xi^{-1}]/(\eta^{-1} - \xi^{-1}). \qquad (21)$$

Применив (21) в выражении (12) и используя одновременно уравнение (16), после небольшого переобразования получим выражение для максимального пересыщения пара

$$S(z_0) = \{[\exp(\xi - \eta) - 1]\, s(z_0)^2 \exp[1/s(z_0) - \xi]\}/(\eta^{-1} - \xi^{-1}). \qquad (22)$$

Подставив постоянные A и C ($A_{H_2O} = 4041{,}213$ °К, $C_{H_2O} = -37{,}65$ °К, $A_{C_2H_5OH} = 4566{,}688$ °К, $C_{C_2H_5OH} = -15{,}02$ °К), определенные по данным из работы [3] и дальше подставив конкретные значения T_1, T_2 в выражения (8), (9) или (21) и (22), можем построить таблицу 1.

Таблица 1

T_1 [°C]	T_2 [°C]	z_0/h		$S(z_0)$	
		H_2O	C_2H_5OH	H_2O	C_2H_5OH
−20	40 50	0,196 0,173	0,257 0,184	4,71 6,62	3,40 5,66
−30	30 40	0,182 0,159	0,194 0,171	6,03 8,86	5,04 7,24
−40	20 30	0,167 0,146	0,220 0,158	8,11 12,44	5,34 9,61

В таблице 1 вычислены положение и величина максимального пересыщения для условий, легко достигаемых в диффузионных камерах, наполненных воздухом при атмосферическом давлении с примесью водяных паров этилового спирта. Эти данные хорошо совпадают с экспериментальными данными, измеренными автором.

Таблица 2

T_1 [°C]	T_2 [°C]	z_0/h	
		H_2O	C_2H_5OH
−20	40 50	0,19 ± 0,01 0,17 ± 0,01	0,26 ± 0,02 0,18 ± 0,02
−30	30 40	0,18 ± 0,01 0,16 ± 0,01	0,18 ± 0,02 0,17 ± 0,02
−40	20 30	0,17 ± 0,01 0,15 ± 0,01	0,22 ± 0,02 0,16 ± 0,02

В таблице 2 показаны экспериментальные данные по положению максимума пересыщения в камере, наполненой воздухом при атмосферическом давлении, полученные из измерений перегиба кривой падения температуры с высотой в камере.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Slätis H., Nucl. Instr. *1* (1957), 213.
[2] Карапетьянц М. Х., Химическая термодинамика. Гос. научно-техн. изд. химической лит. Москва—Ленинград 1949.
[3] Forsythe W. E., *Smithsonian Physical Tables.* Smithsonian Institution Washington 1956, 370, 600.

Поступило в Редакцию 19 января 1967 г.

Katedra jadrovej fyziky
Prírodovedeckej fakulty UK
Bratislava