Fyzikálny časopis 18 (1968), No. 3

О СОВМЕСТИМОСТИ МЕТОДА ОБРАТНОГО БУТСТРАПА И ГРУПП G_2 И C_2

ЮРАЙ ШЕБЕСТА (Juraj Šebesta), Братислава

ВВЕДЕНИЕ

В начале 60-х годов в исследовании сильно-взаимодействующих частиц сформировались два направления: метод систематизации элементарных частиц в мультиплеты по неприводимым представлениям группы SU_3 (работы Гелл-Манна [1] и Неемана [2]) и динамический метод бутстрапа — *зашнуровки* — предложенный в работе [3] и впервые использованный в работе [4] для задачи $\pi\pi$-рассения.

Когда после первых крупных успехов теоретико-группового метода физики стали искать динамическое начало симметрий, появились первые работы, в которых высказывалась мысль, что именно бутстрап может являться этим дунамическим началом симметрий сильных взаимодействий.

Впервые гипотезу о возможности объяснения симметрий при помощи метода *зашнуровки* высказали Чу и Фраучи в 1962-м году. Вскоре появились работы, в которых было показано, каким образом это можно сделать. Надо отметить, что в этой области были достигнуты определенные успехи [5—11].

Одним из направлений в попытках обнаружить связь бутстрапа и симметрий являются работы, в которых обобщается принцип обратного бутстрапа, обнаруженный Чу [12] между нуклоном и нуклонным резонансом, на случай мультиплетов, содержащих нуклон N и нуклонный резонанс N^*.

Например в работе [13] показано, что обратный бутстрап имеет место также между неприводимыми представлениями группы SU_2, к которым принадлежат N и N^*. Более того, оказывается, что можно построить последовательность резонансов с I, $J = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ и т. д., возникающих при рассеянии π на предыдущем члене последовательности, и в рамках группы SU_2 и в рамках группы SU_3.

Автор работы [14] обобщил механизм обратного бутстрапа на октетную модель SU_3, показав, что в SU_3 имеет место обратный бутстрап между октетом барионов и декуплетом барионных резонансов, к которым принадлежат N и N^* соответственно. Обратный бутстрап имеет место также в группе SU_6, как показано в работе [15].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы уже упомянули, что обратный бутстрап имеет место в группах SU_2, SU_3 и SU_6. В связи с этим возникает вопрос: Имеет ли место обратный битстрап для неприводимых представлений, содержающих N и N^*, других компактных полупростых групп Ли, например, G_2 и C_2. Выяснению этого вопроса и посвящена эта работа.

Конкретно, в случае группы G_2 наша задача заключается в следующем: Рассматриваем рассеяние септета псевдоскалярных мезонов $7(0^-)$, членом которого является пион, на септете барионов $7\ [1/2^+]$[1]. Обратный бутстрап утверждает следующее [12]: доминирующее силы для нуклона появляются от обмена N^*-резонансом, и наоборот, N^*-резонанс — это связанное состояние пиона и нуклона, которое удерживается вместе благодаря обмену нуклоном. Наша цель — показать, что в случае рассеяния септета $7(0^-)$ на септете $7\ [1/2^+]$ доминирующие силы для септета $7\ [1/2^+]$, членом которого является нуклон, появляются от обмена мультиплетом $14\ [3/2^+]$, членом которого является резонанс N^*, и, в свою очередь, доминирующее силы для этого мультиплета появляются от обмена септетом $7(0^-)$.

В случае группы C_2: Рассматриваем рассеяние декуплета псевдоскалярнях мезонов на квинтете барионов.[2] Наша задача — показать, что силы для квинтета появляются от обмена некоторым мультиплетом, содержащим N^*, и силы для этого мультиплета появляются от обмена квинтетом.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для наших вычислений используем метод, предложенный в работе [13]. Это статистический предел метода N/D.

Мезон-барионное состояние характеризуется спином J, изотопическим спином I и полной энергией W. Как обычно, в качестве переменной возьмем величину $\omega = W - M$, где M — масса нуклона. Амплитуда рассеяния в P-волне имеет вид:

1) Классификация частиц по неприводимым представлениям группы C_2, которой пользуемся, предложена в работе [16].

2) Классификацию частиц по неприводимым представлениям группы C_2, которой пользуемся, мы переняли из работы [17].

$$f_{IJ}(\omega) = (1/q^3)\, e^{i\delta_{IJ}} \sin \delta_{IJ} \tag{1}$$

где $q^2 = \omega^2 - 1$. Масса мезона здесь равна единице, а δ_{IJ} — сдвиг фазы. Силы, ответственные за рассеяние, получаются из соотношения кроссинг-симметрии:

$$f_{IJ}(\omega) = \sum_{I'J'} \alpha_{II'}\, \beta_{JJ'}\, f_{I'J'}(-\omega) \tag{2}$$

где α и β — перекрестные матрицы для изотопического спина и спина соответственно. Выражение (2) — это соотношение между амплитудой с данным I, J в одном канале и амплитудами с определенными I, J в перекрестном канале. В статическом пределе переход от канала S к каналу U означает замену переменной ω на $-\omega$. В статическом пределе амплитуды в правой и левой сторонах уравнения (2) содержат P-волну, и поэтому изотопспиновая и спиновая матрицы имеют конечную размерность.

Если в промежуточном состоянии встречается какой-нибудь резонанс или связанное состояние, то амплитуда рассеяния обладает полюсом

$$\gamma_{IJ}/(\omega_{IJ} - \omega)$$

где ω_{IJ} — положение резонанса с изотопическим спином I и спином J. Из уравнения (2) видно, что сила в перекрестном канале (борновское приближение) имеет вид:

$$B_{IJ} = \sum_{I'J'} \alpha_{II'}\, \beta_{JJ'}\, \frac{\gamma_{I'J'}}{\omega_{I'J'} + \omega} \tag{3}$$

где $J, J' = 1/2, 3/2$. В правой части суммируем по всем возможным парам (I', J'). Если состояние с квантовыми числами (I', J') отсутсвует, то полагаем $\gamma_{I'J'} = 0$. Найденное таким образом выражение B_{IJ} используем как исходное приближение для вычислений по N/D методу [15]:

$$f_{IJ}(\omega) = N_{IJ}(\omega)/D_{IJ}(\omega) \tag{4}$$

где

$$N_{IJ}(\omega) = \sum_{I'J'} \alpha_{II'}\, \beta_{JJ'}\, \frac{\gamma_{I'J'} D_{IJ}(-\omega_{I'J'})}{\omega_{I'J'} + \omega} \tag{5}$$

и

$$D_{IJ}(\omega) = 1 - \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_1^{\lambda} d\omega' \frac{(\omega'^2 - 1)^{3/2} N_{IJ}(\omega')}{(\omega' - \omega_0)(\omega' - \omega)} \tag{6}$$

где ω_0 — точка вычитания, выбранная так, чтобы функция D в этой точке была нормирована на единицу. Параметр λ — это обрезающий фактор, который исключает вклад высоко-энергетических состояний и коротко-действующих сил. Дело в том, что мы учитываем лишь вклад от низко-энергетических состояний, хотя бутстрап, вообще говоря, предпологает, что вклады с силы дают все существующие частицы. Нами не учитываются также неупругие эффекты. Поэтому ,полученные уравнения гарантируют только унитарность и дают точные сингулярности лишь сил, появляющихся от вклада B_{IJ} в f_{IJ}.

Дальше предположим, что неупругие силы, которыми мы пренебрегаем, имеют хорошое поведение, т. е. $D(\omega)$ приблизительно линейно. Это значит, что если имеется состояние с определенными (I, J), то можно написать:

$$D(\omega) = \frac{\omega_{IJ} - \omega}{\omega_{IJ} - \omega_0}. \tag{7}$$

Тогда из уравнения (5) получаем:

$$\gamma_{IJ} = -\left[\frac{N_{IJ}(\omega)}{D'_{IJ}(\omega)}\right]_{\omega=\omega_{IJ}} = \sum_{I'J'} \alpha_{II'} \beta_{JJ'} \gamma_{I'J'}. \tag{8}$$

Величины γ_{IJ} в левой части носят название *полученные* (output) и величины в правой части — *входные* (input). Условие самосогласованности бутстрапа заключается как раз в том, что *полученные* величины должны равняться *входным*. В матричной записи это можно выразить соотношением

$$\Gamma = \mathbf{C}\,\Gamma \tag{9}$$

где Γ — столбцы, членами которых являются величины γ_{IJ}, и $\mathbf{C}$ — прямое произведение изотоп-спиновой и спиновой перекрестных матриц.

Удобно ввести величину

$$F_{IJ} = \sum_{I'J'} \alpha_{II'} \beta_{JJ'} \gamma_{I'J'}. \tag{10}$$

Ее можно использовать в качестве разумной оценки сил в состоянии с парой величин (I, J). Можно ожидать, что если величина F_{IJ} отрицательна для некоторого состояния, то соответствующая *полученная* величина γ_{IJ} тоже будет отрицательной, и такое состояние не может существовать. Если же величина F_{IJ} положительна и большая, то можно ожидать, что в состоянии с γ_{IJ} будет интересующая нас частица с малой массой. В случае когда F_{IJ} мало, либо в данном состоянии вообще нет частиц,

либо ее масса столь большая, что эта частица для нашего рассмотрения неинтересна. Наше рассуждение носит лишь качественный характер. Для получения точных результатов надо было бы решать уравнения (5) и (3).

Применим изложенный метод к нашей задаче.

1. Группа G_2

Рассеивающиеся пионы и барионы помещены в септеты $7(0^-)$ и $7\,[1/2^+]$ соответственно [16]. Связанные состояния частиц, принадлежащих некоторым неприводимым представлениям, согласно теоретико-групповому подходу, должны принадлежать к прямому произведеиню двух данных представлений. Это прямое произведение, как правило, приводимо и разлагается на прямую сумму неприводимых представлений [17]. В нашем конкретном случае прямое произведение неприводимых представлений группы G_2 с размерностями 7 разлагается согласно схеме [17]:

$$7 \otimes 7 = 1 \oplus 7 \oplus 14 \oplus 27. \tag{11}$$

Это означает, что существуют четыре инвариантных амплитуды рассения с квантовыми числами, характерными для неприводимых представлений с размерностями 1, 7, 14, 27 соответственно. Перекрестная матрица внутренней симметрии группы G_2, аналогичная изотоп-спиновой матрице в случае группы SU_2, равна (см. приложение):

$$\alpha_{II'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 7 & 14 & 27 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -33/8 & 41/8 & 0 & 0 \\ 41/56 & 13/8 & -37/14 & 9/7 \\ 0 & -37/28 & 2 & 9/28 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 7 \\ 14 \\ 27. \end{array} \tag{12}$$

Числа 1, 7, 14, 27 при столбцах и строках обозначают размерности представлений, которым принадлежат соответствующие столбцы или строки.

Спиновая перекрестная матрица для спинов $J, J' = 1/2, 3/2$ хорошо известна [12], [13]:

$$\beta_{JJ'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1/2 & 3/2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1/2 \\ 3/2 \end{array} \tag{13}$$

где опять числа 1/2 и 3/2 при столбцах и строках обозначают, к каким значениям спина относятся соотвествующие столбцы и строки.

Прямое произведение приведенных матриц дает:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 11/8 & 11/2 & -41/24 & 41/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11/4 & -11/8 & 41/12 & 41/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -41/168 & 41/42 & -13/24 & 13/6 & 37/42 & -74/21 & -3/7 & 12/7 \\ 41/84 & 41/168 & 13/12 & 13/24 & -37/21 & -37/12 & 6/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 37/84 & -37/21 & -2/3 & 8/3 & 3/14 & 3/28 \\ 0 & 0 & -37/42 & -37/84 & 4/3 & 2/3 & 3/14 & 3/28 \\ 0 & 0 & -1/3 & 4/9 & -1/18 & 2/9 & -1/6 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/9 & 1/9 & 1/9 & 1/18 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \quad (13a)$$

Мы предпологаем, что обратный бутстрап будет иметь место для представлений 7, 1/2 и 14, 3/2; для состояния 7, 1/2 доминирующими будут силы от обмена мультиплетом 14, 3/2 и наоборот, основной вклад в силы для состояния 14, 3/2 будет давать обмен представлением 7, 1/2. Поэтому остальными представлениями мы пренебрегаем. Таким образом, подставляя матрицы (12) и (13) в уравнение (8), получаем следующие выражения для величин $\gamma_{7,1/2}$ и $\gamma_{14,3/2}$:

$$\gamma_{7,1/2} = -13/24\gamma_{7,1/2} - 74/21\gamma_{14,3/2} \quad (14)$$

$$\gamma_{14,3/2} = -37/42\gamma_{7,1/2} + 2/3\gamma_{14,3/2}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) находим соотношения для величин $\gamma_{7,1/2}$ и $\gamma_{14,3/2}$:

$$\gamma_{7,1/2} \doteq -2{,}5\gamma_{14,3/2} \quad (14a)$$

$$\gamma_{7,1/2} \doteq -0{,}3\gamma_{14,3/2}. \quad (15a)$$

Из этих двух равенств лишь первое более менее соотвествует эксперименту [12], и то с точностью до знака. Поэтому соотношение (15а) мы вообще не будем принимать во внимание.

Подставляя (14а) в (1) и опять используя матрицы α и β, получим оценку сил в состоянии 7, 1/2 и 14, 3/2:

$$F_{7,1/2} \doteq -2{,}25\gamma_{14,3/2} \quad (16)$$

$$F_{14,3/2} \doteq -1{,}2\gamma_{7,1/2}. \quad (17)$$

2. Группа G_2

Рассеивающиеся пионы помещены в декуплет и барионы в квинтет [17]. Прямое произведение неприводимых представлений группы G_2 с размерностями 5 и 10 разлагается согласно схеме [17]:

$$5 \otimes 10 = 5 \oplus 10 \oplus 35. \quad (18)$$

Это означает, что существуют три инвариантных амплитуды рассеяния с квантовыми числами, характерными для неприводимых представлений

с размерностями 5, 10, 35, соотвественно. Перекрестная матрица бнутренней симметрии группы G_2, которая соответсвует изотоп-спиновой перекрестной матрице в группе SU_2, равна (см. приложение):

$$\alpha_{II'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 10 & 35 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/9 & -13/9 & 7/3 \\ -13/18 & 5/9 & 7/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 10 \\ 35. \end{array} \quad (19)$$

Циффры 5, 10, 35 при столбцах и строках обозначают рамерности представлений, которым принадлежат соотвествующие строки или столбцы.

Спиновая перекрестная матрица та же, что и в случае группы G_2.

Умножая приведенные перекрестные матрицы, получаем:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1/27 & 4/27 & 13/27 & -52/27 & -7/9 & 28/9 \\ 2/27 & 1/27 & -26/27 & -13/27 & 14/9 & 7/3 \\ 13/54 & -52/54 & -5/27 & 20/27 & -7/18 & 28/18 \\ -26/54 & -13/54 & 10/27 & 5/27 & 14/18 & 7/18 \\ -1/9 & 4/9 & -1/9 & 4/9 & -1/9 & 4/9 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{bmatrix} \quad (19a)$$

Мы предполагаем, что обратный бутстрап будет иметь место для представлений 5 и 35, поэтому остальными состояниями пренебрегаем. Таким образом, подставляя матрицы (19) и (13) в уравнение (8), получаем следующие выражения для величин $\gamma_{5,1/2}$ и $\gamma_{35,3/2}$:

$$\gamma_{5,1/2} = -1/27\gamma_{5,1/2} + 28/9\gamma_{35,3/2} \quad (20)$$

$$\gamma_{35,3/2} = 2/9\gamma_{5,1/2} + 1/9\gamma_{35,3/2}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) находим соотношения для величин $\gamma_{5,1/2}$ и $\gamma_{35,3/2}$:

$$\gamma_{5,1/2} = 3\gamma_{35,3/2} \quad (20a)$$

$$\gamma_{5,1/2} = 4\gamma_{35,3/2}. \quad (21a)$$

Из этих равенств первое лучше соответветсвует эксперименту, поэтому дальше будем им пользоваться.

Подставляя (20а) в (10) и опять используя матрицы α и β, получим оценку сил в состояниях 5, 1/2 и 35, 3/2.

$$F_{5,1/2} = 3\gamma_{35,3/2} \quad (22)$$

$$F_{35,3/2} \doteq 0{,}26\gamma_{5,1/2}. \quad (23)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для того, чтобы имел место обратный бутстрап между неприводимыми представлениями групп G_2 и C_2, к которым принадлежат нуклон N и нуклонный резонанс N^*, необходимо, чтобы величины $F_{7,1/2}$, $F_{14,3/2}$, $F_{5,1/2}$ и $F_{35,3/2}$ выражались через $\gamma_{14,3/2}$, $\gamma_{7,1/2}$, $\gamma_{35,3/2}$ и $\gamma_{5,1/2}$ соотвественно, т. е., чтобы доминирующими были силы от обмена частицами, принадлежащими к соотвествующим неприводимым представлениям. Кроме того, величины $F_{7,1/2}$, $F_{14,3/2}$, $F_{5,1/2}$ и $F_{35,3/2}$, выраженные таким образом, должны быть положительными и большими.

В наших вычислениях величины $F_{7,1/2}$ и $F_{14,3/2}$ получились отрицательными. Это значит, что обратный бутстрап, который мы надеялись получить, не имеет места в группе G_2.

Вычисленные нами величины $F_{5,1/2}$ и $F_{35,3/2}$ положительны и сравнительно большие. Это дает нам возможность ожидать, что обратный бутстрап между мультиплетами 5, 1/2 и 35, 3/2 будет иметь место.

Кроме того, если посмотреть на матрицу $\mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}$, то видим, что основной вклад в рассеяние пионов на барионах в случае группы G_2 дает для состояния 7, 1/2 состояние 7, 3/2, а не состояние 14, 3/2, как мы ожидали. Аналогично, основной вклад в состояние 14, 3/2 дает не состояние 7, 1/2, а состояние 14, 1/2. Этот факт нас еще более убеждает в том, что обратный бутстрап между неприводимыми представлениями группы G_2 не имеет места.

В случае группы C_2 рассмотрение матрицы $\mathbf{C}$ дает те же результаты, что и нами использованный метод, т. е., обратный бутстрап может иметь место между представлениями с размерностью 5 и 35.

Полученные нами результаты, строго говоря, еще не доказывают, что группа G_2 неприемлема дла описания сильных взаимодействий, и, с другой стороны, что группа C_2 может хорошо описывать эти взаимодействия, поскольку в наших рассуждениях были использованы довольно жесткие ограничения и оценки сил носили лишь приближенный характер. Однако, эти результаты находятся в согласии с выводами других авторов [7], [18].

Учитывая выводы авторов работ [7] и [18], а также наши результаты, можно прийти к заключению, что группа G_2 вряд ли будет играть важную роль в теории симметрии сильных взаимодействий элементарных частиц. О группе C_2 такого сказать нельзя.

В заключение мне хотелось бы выразить сердечную благодарность деканату физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова за предоставленную мне возможность заниматься на физическом факультете, где была написана эта работа.

Особенно хочу поблагодарить кандидата физико-математических наук В. Г. Кадышевского за чуткое руководство при писании этой работы и оказанную мне помощь. Я также благодарен доктору М. Петрашу за полезные и стимулирующие дискуссии и Я. Пишуту и М. Ноге за ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При вычислении перекрестной матрицы для внутренней симметрии мы использовали свойства этой матрицы, приведенные в работах [15] и [19]. Приведем эти свойства:

1) $\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\alpha} = 0, 1, 2, \ldots$ в зависимости от симметрии амплитуд, получаемых в разложении указанного в тексте прямого произведения, при переходе от канала S к каналу U. В случае группы G_2 амплитуды f_1 и f_{27} симметричны и амплитуды f_7 и f_{14} антисимметричны, поэтому $\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\alpha} = 0$. В случае же группы C_2 симметрична лишь амплитуда f_5, в то время как амплитуды f_{10} и f_{35} антисимметричны. Поэтому $\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\alpha} = 1$.

2) Сумма элементов каждой строки равна единице.

3) Элементы строки, принадлежащей представлению 27, положительны и равны квадратам коэффициентов Клебша-Гордона соответствующей группы.

4) Отношение элементов перекрестной матрицы равно отношению размерностей представлений, к которым принадлежат столбцы, содержащие эти элементы

$$C_{ii'}/C_{i'i} = N_{i'}/N_i .$$

5) Если перейти от канала S к каналу U и затем от канала U к каналу S, то мы должны получить тождество, т. е., между перекрестными матрицами, описывающими эти переходы, должно иметь место соотношение

$$\sum_{I'} \alpha_{I''I'}\,\alpha_{I'I} = \delta_{I''I}$$

Используя эти свойства можем вычислить матрицы, приведенные в тексте.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gell—Mann M., Phys. Rev. *125* (1962), 1067.
[2] Neeman Y., Nucl. Phys. *26* (1961), 222.
[3] Chew G. F., Frautschi R., Phys. Rev. Letters *7* (1961), 397.
[4] Chew G. F., Mandelstam S., Nuovo Cimento *19* (1961), 752.
[5] Abers E., Zachariasen F., Zemach Ch., Phys. Rev. *134* (1963), 1831.
[6] Capps R. H., Phys. Rev. Letters *10* (1063), 312.

[7] Capps R. H., Phys. Rev. *134* (1964), B 460.
[8] Cutkosky R. E., Pekka Tarjanne, Phys. Rev. *132* (1963), 1354.
[9] Pekka Tarjanne, Cutkosky R. E., Phys. Rev. *133* (1964), B 1292.
[10] Cutkosky R. E., Phys. Rev. *131* (1963), 1888.
[11] Hwa R. C., Patil S., Preprint, Institute for Advanced Study, Princeton N. J., USA.
[12] Chew G. F., Phys. Rev. Letters *9* (1963), 233.
[13] Abers E., Balázs P. R. L., Hara Y., Phys. Rev. *136* (1964), B 1382.
[14] Virendra S., Nuovo Cimento *33* (1964), 763.
[15] Udgaonkar B., Lecture in *High-energy physics and elementary particles*, Vienna 1965.
[16] Behrends R. E., Landovits L. F., Phys. Rev. Letters *6* (1963), 296.
[17] Behrends R. E., Dreitlein J., Fronsdal C., Lee W., Rev. Mod. Phys. *34* (1962), 1.
[18] Harari H., Nuovo Cimento *33* (1964), 752.
[19] Martin A. W., Glinn W. D., Phys. Rev. *136* (1964), B 1515.

Поступило в Редакцию 7 июня 1967 г.

Katedra teoretickej fyziky
Prírodovedeckej fakulty UK,
Bratislava