Fyzikálny časopis 18 (1968), No. 2

DAS LAMELLARMODELL BEI ENDLICHEN SUPRALEITERN ZWEITER ART

SILVESTER TAKÁCS, Bratislava

EINFÜHRUNG

Wie bereits von Ginzburg und Landau [1] vermutet, tritt in höheren magnetischen Feldern bei Supraleitern 2. Art (bei denen der Parameter von Ginzburg–Landau $\varkappa > 1/\sqrt{2}$ ist) eine besondere Struktur auf. Die *reine* Supraphase wird zwar in höheren magnetischen Feldern unstabil, aber auch der normalleitende Zustand des Metalls wird noch durch viele supraleitende Gebiete zerspalten werden. Den Abrikosovschen Untersuchungen zufolge [2] kommen in einem unendlichen Supraleiter im longitudinalen Magnetfeld die normalleitenden Gebiete beim Übergang des supraleitenden Zustandes in form einzelner isolierter Flußwirbel zustande, ähnlich wie die normalen Anregungen im suprafiüssigen Helium. Nach weiterer Erhöhung des magnetischen Feldes bildet sich eine dreieckige, später eine quadratische Struktur mit der Gitterkonstante

$$\frac{\lambda}{\varkappa}\sqrt{\pi/2}, \tag{1}$$

wobei λ die Londonsche Eindringtiefe bei kleinem Magnetfeld bedeutet. Dieser Zustand wurde mit dem Namen *gemischter* Zustand (mixed state) bezeichnet. Kleiner et al. [3] haben gefunden, daß der hexagonalen *Bienenstruktur* ein energetisch noch günstigerer Zustand als der Abrikosovschen entspricht, und zwar mit einer von der Abrikosovschen nur sehr wenig unterschiedlichen Gitterkonstante.

Die Bildung der ersten Flußwirbel im longitudinalen Magnetfeld erfolgt für ein unendliches supraleitendes Gebiet bei dem unteren kritischen Magnetfeld H_{c_1}, das durch

$$H_{c_1} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}(\ln \varkappa + 0{,}081)H_c \tag{2}$$

gegeben ist, wobei H_c das thermodynamische kritische Magnetfeld darstellt, das aus einfachen thermodynamischen Erwägungen folgt. Bei diesem Feld verschwindet nämlich die Oberflächenenergie zwischen der normalleitenden und der supraleitenden Phase. Der normalleitende Zustand wird erst bei dem *oberen* kritischen Magnetfeld H_{c_2} hergestellt:[1])

$$H_{c_2} = \varkappa\sqrt{2}H_c.$$

Parallel zur Abrikosovschen Struktur mit den Flußwirbeln wurde das sog. *Lamellarmodell* [4] des gemischten Zustandes ausgearbeitet. Entsprechend diesem Modell werden die normalleitenden Gebiete im Supraleiter im magnetischen Feld in Form von parallellen Schichten aufgespalten. Da die untere kritische Feldstärke der Schichtenstruktur

$$H_{c_1} = \sqrt{\varkappa 2\sqrt{2}}\, H_c, \tag{3}$$

für $\varkappa > 1/\sqrt{2}$ größer als (2) ist, hat das Abrikosovsche Modell rein instinktiv mehr Vertrauen als das Goodmansche Lamellarmodell [4] genossen. Die ersten *kristallographischen* Untersuchungen (mit Hilfe der Neutronenbeugung) konnten zuerst nur eine Periodizität des gemischten Zustandes nachweisen, später gelang es jedoch in einigen Fällen die richtige (hexagonale) Struktur zu beweisen [5]. Boato et al. [6] haben experimentell erwiesen, daß der magnetische Fluß in die Zylinder, deren Durchmesser nicht allzu groß im Verhältnis zur Eindringtiefe λ sind, in Gestalt von einzelnen Abrikosovschen Flußwirbeln hineintritt. Nach Fetter [7] entspricht der Dreieckstruktur zwischen H_{c_1} und H_{c_2} eine stabile Lösung.

Infolge der Wechselwirkung mit den Flußlinien wirkt aber die Oberfläche des Supraleiters auf die Flußlinien als eine Barriere [8]. Der magnetische Fluß kann deshalb nicht bei dem unteren kritischen Magnetfeld H_{c_1} in das Innere des Supraleiters eindringen, sondern erst bei einer höheren magnetischen Feldstärke H_s, die von der selben Größenordnung wie H_c ist [8—13]. Wie in [13] gezeigt wurde, ist die *reine* Oberflächenbarriere eines makroskopischen Supraleiters 2. Art für die Abrikosovschen Flußwirbel bereits über dem Feld

$$H_s = \frac{1}{3} \tag{4}$$

wirkungslos. In der Gleichung (4) und von nun an werden konsequent die sehr oft benutzten relativen Einheiten [1] verwendet, in denen u. a. die relativen magnetischen Feldstärken H' in bezug auf das thermodynamische kritische Magnetfeld H_c,

$$H' = \frac{H}{\sqrt{2}H_c},$$

und die relativen Längen x' in bezug auf die Eindringtiefe λ,

$$x' = \frac{x}{\lambda},$$

angegeben werden.

[1]) Im longitudinalen Magnetfeld existiert über H_{c_2} eine supraleitende Oberflächenschicht, die erst bei $H_{c_3} = 1{,}69 H_{c_2}$ zerstört wird [21].

PROBLEMSTELLUNG

Obwohl die Abrikosovsche Struktur weit im Inneren des Supraleiters bereits bei H_{c_1} einem stabilen Zustand entspräche, wird auf Grund der Existenz der Oberflächenbarriere weiterhin der nunmehr metastabile supraleitende Zustand aufrechterhalten werden. Wann und in welcher Weise der magnetische Fluß in den Supraleiter hineingelangen wird, hängt von dem Verhalten und der energetischen Bilanz der auftretenden Abrikosovschen Wirbel bzw. der Goodmanschen Schichten nahe der Oberfläche ab. In dieser Arbeit werden die zu den Flußwirbeln analogen Eintrittsfeldstärken für die Goodmanschen Schichten abgeleitet und es wird ein Vergleich zwischen diesen und den ersteren angestellt. Es kann nämlich nicht von vornherein ausgeschlossen werden, daß die Schichten nahe der Oberfläche bei kleineren magnetischen Feldern als Wirbel auftreten könnten.

Die Flußwirbel können bei ihrer Entstehung als isoliert angesehen werden, weil sie noch sehr weit voneinander liegen. Die Entfernung a zwischen ihnen ist viel größer als 1 (die Eindringtiefe in den gewöhnlichen Einheiten). Die Entstehungsfeldstärke H_s wird dann aus der Bedingung berechnet, daß die Änderung der freien Energie infolge des Wirbelauftretens gerade in der Entfernung der Kohärenzlänge ξ von der Oberfläche negativ wird (d. h. die zu $1/a$ proportionalen Glieder gerade verschwinden). Die Flußwirbel und nun auch die Flußschichten können wegen der endlichen Kohärenzlänge bei der Entstehung als Inhomogenitäten angesehen werden, deshalb gilt im longitudinalen äußeren magnetischen Feld [2] (für $\varkappa \gg 1$)

$$\Delta H - H = -\frac{2\pi}{\varkappa}\sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{5}$$

wobei $\mathbf{r}_i$ die Flußlinien- bzw. die Flußschichtenkoordinaten bedeuten. Unterhalb des Eintrittsfeldes wird das magnetische Verhalten des supraleitenden Halbraumes (dieser erstrecke sich innerhalb $x > 0$) im longitudinalen äußeren Magnetfeld H_0 (es liege in der z-Richtung) durch die Londonsche Gleichung beschrieben:

$$\Delta H_1 - H_1 = 0. \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung der Grenzbedingung

$$H_1(0) = H_0 \tag{7}$$

lautet die Lösung von (6) folgendermaßen:

$$H_1 = H_0 \exp(-x). \tag{8}$$

In der Entfernung $x = b$ von der Oberfläche seien nun normalleitende Flußschichten von der angenommenen Länge a (in der y- und z-Richtung erstreckt) entstanden. Das gesamte magnetische Feld H wird sich aus der Wirkung des Feldes H_1 und dem Beitrag der einzelnen Schichten H_m zusammensetzen, wobei auch weiterhin die Grenzbedingung

$$H(0) = H_0 \tag{9}$$

und außerdem

$$H_m(0) = 0 \tag{10}$$

berücksichtigt werden muß.

Die zu (5) gehörige Lösung, die auch den oben angeführten Grenzbedingungen (9) und (10) genügt, lautet:

$$H_m = \frac{\pi}{\varkappa}\{\exp(-|x-b|) - \exp[-(x+b)]\}. \tag{11}$$

Ähnliche Verhältnisse treten auch beim Hohlzylinder auf [12]. Auf einen Hohlzylinder vom Radius $R \gg 1$ und der Dicke $d \ll R$ werde ein axiales magnetisches Feld angelegt. Die Grenzbedingungen unterhalb der Eintrittsfeldstärke besagen dann [12]:

$$H_1(R+d) = H_0, \tag{12}$$

$$H_1(R) = \frac{2}{R}H_0 \bigg/ \left(\operatorname{sh} d + \frac{2}{R}\operatorname{ch} d\right). \tag{13}$$

Für das Feld H_m sind die Grenzbedingungen bei der Entstehung der Flußschichten die folgenden:

$$H_m = 0 \tag{14}$$

für $r = R$ und $r = R + d$.

Die Grenzbedingungen (9), (10) und (14) für H_m verletzen nicht die Forderung, daß auch der Gesamtstrom an der Oberfläche des Supraleiters tangetial bleibe [13]. Da nämlich

$$H = H_1 + H_m$$

nur eine z-Komponente besitzt, die allein von der Koordinate x abhängt, hat die Stromdichte, die durch

$$\mathbf{j} = -\operatorname{rot}\mathbf{H}$$

gegeben ist, lediglich eine Komponente in der x-Richtung und der Gesamtstrom bleibt daher auch tangential.

Im Weiteren wird eine ausführliche Berechnung nur für den Hohlzylinder durchgeführt. Für den Halbraum erweisen sich die entsprechenden Überlegungen als vollkommen analog, die Ergebnisse sind außerdem erwartungsgemäß identisch mit denen, die man beim Hohlzylinder durch den Grenzübergang $R \to \infty$ und anschließend $d \to \infty$ erreichen kann. Der einzige (jedoch unwesentliche) Unterschied besteht darin, daß die freie Energie bei dem Hohlzylinder auf das Einheitsvolumen, bei dem Halbraum aber auf ein in der x-Richtung unendliches Parallelogramm bezogen wird. Dies muß bei dem Grenzübergang $d \to \infty$ für die freie Energie berücksichtigt werden, für die Eintrittsfeldstärke ist dagegen diese Einschränkung belanglos [12, 13].

Für den Hohlzylinder lautet die entsprechende Lösung von (5), die die Form einer zweidimensional unendlichen Schicht hat und auch den Grenzbedingungen (14) genügt,

$$H_m = \frac{\pi}{\varkappa}[\operatorname{ch}(d - |x-b|) - \operatorname{ch}(x - d + b)]/\operatorname{sh} d. \tag{15}$$

Wie bereits in der Arbeit [13] gezeigt wurde, kann man unter der Eintrittsfeldstärke die Verhältnisse für den Hohlzylinder von genügend großem Radius durch ein ebenes Problem ersetzen. Der Verlauf des magnetischen Feldes wird dann durch

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{sh} d}\operatorname{sh} x \tag{16}$$

gegeben, wobei $x = r - R$ ist.

Die entsprechenden Korrekturen für nicht genügend große Radien und sehr kleine Dicken des Hohlzylinders werden im Anhang ausführlich berechnet und diskutiert.

Bei den Schichten kommt die Flußquantisierung nicht in Frage (s. z.B. [14]), deshalb wird die den Flußwirbeln analoge Größe a als eine hypothetische

Abmessung der einzelnen in der y-Richtung nebeneinanderliegenden Schichten angesehen. Dabei wird a als eine einen verhältnismäßig großen wert erreichende Konstante angenommen, und die Schichten sollen sehr weit voneinander entfernt liegen. Da jedoch nur der Beitrag der Schichten zur freien Energie von Bedeutung ist, wird die genaue Kenntnis dieser Größen nicht verlangt. Man könnte auch so verfahren, als ob nur eine einzige unendliche Schicht vorhanden wäre.

Dann wird die Energiedichte F_B, bezogen auf das Einheitsvolumen [12, 13, 15], durch

$$F_B = \frac{\varepsilon}{d} + \frac{1}{d} \int \mathrm{d}x [H^2 + (\nabla H)^2] \tag{17}$$

gegeben. Durch partielle Integration des hier vorkommenden Integrals und unter Zuhilfenahme der Bestimmungsgleichung (5) sowie der Superpositionsannahme

$$H = H_1 + H_m,$$

erhält man die Energiedichte in der Form

$$F_B = \frac{\varepsilon}{d} + \frac{1}{d} \left[H_1 \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}x} + 2H_1 \frac{\mathrm{d}H_m}{\mathrm{d}x} \right]_0^d + \frac{4\pi}{\varkappa d} H_1(b) + \frac{2\pi}{\varkappa^2 d} H_m(b), \tag{18}$$

wobei durch ε die Selbstenergie der Flußschicht bezeichnet wird, die bei den Flußwirbeln den Wert [2]

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\varkappa^2} (\ln \varkappa + 0{,}081) \tag{19}$$

besitzt.

Nach Einsetzen der Lösungen (15) und (16) in die Gleichung (18) ergibt sich die Energiedichte zu

$$F_B = \frac{1}{d} H_0^2 \operatorname{cth} d + \frac{2\pi^2}{\varkappa^2 d} \left[\frac{\operatorname{ch} d - \operatorname{ch}(2b - d)}{\operatorname{sh} d} - 1 \right] + \frac{2\pi}{\varkappa^2 d} u, \tag{20}$$

mit

$$u = \frac{\varkappa^2}{2\pi} \varepsilon.$$

Für die mit dem supraleitenden Hohlzylinder verbundene magnetische Induktion erhält man

$$B = \bar{H} = \frac{H_0}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2} + \frac{2\pi}{\varkappa d} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} b + \operatorname{sh}(d - b)}{\operatorname{sh} d} \right]. \tag{21}$$

Die Änderung ΔF_H der freien Energie

$$F_H = F_B - 2H_0 B$$

infolge des Auftretens der Flußschicht im supraleitenden Hohlzylinder hat dann folgende Form:

$$\Delta F_H = \frac{2\pi^2}{\varkappa^2 d} \left[\frac{\operatorname{ch} d - \operatorname{ch}(2b - d)}{\operatorname{sh} d} - 1 \right] + \frac{2\pi}{\varkappa^2 d} u - \frac{4\pi}{\varkappa d} H_0 \times$$
$$\times \left[1 - \frac{\operatorname{sh} b + \operatorname{sh}(d - b)}{\operatorname{sh} d} \right]. \tag{22}$$

Aus diesem Ausdruck lassen sich drei wichtige Feldstärken berechnen. Um einen Vergleich mit den entsprechenden magnetischen Feldern für die Abrikosovschen Flußwirbel übersichtlicher anstellen zu können, bezeichnen wir die kritischen magnetischen Felder für die Schichten mit kleinen Buchstaben während diejenigen für die Flußwirbel auch weiterhin durch große Buchstaben gekennzeichnet bleiben.

a. Beim Nullsetzen der Größe (22) für $b = 1/\varkappa$ ergibt sich dasjenige Feld h_s, bei welchem die Flußschichten zuerst an der Oberfläche entstehen können [12, 13]. Der Existenz einer endlichen Kohärenzlänge wegen hat es nämlich keinen Sinn, die Flußwirbel und die Flußschichten näher zur Oberfläche als die Kohärenzlänge zu betrachten. Es sei hier erwähnt, daß die Größe der Kohärenzlänge in den auch hier verwendeten relativen Einheiten etwa den Wert $1/\varkappa$ hat.

b. Aus der Bedingung

$$\frac{\partial(\Delta F)}{\partial b} = 0$$

für die Entfernung $1/\varkappa$ von der Oberfläche folgt die Eintrittsfeldstärke h_{in}, die zu **Bean** und **Livingston** [8] analoge Feldstärke. In der Arbeit [13] wurde aber gezeigt, daß nicht immer dieses Feld h_{in} für die Flußeindringung maßgebend ist, vielmehr werden dafür die Feldstärken h_s und $h_{s\,max}$ verantwortlich sein.

c. Das letztgenannte Feld $h_{s\,max}$ ist die dritte Feldstärke, die aus (22) angegeben werden kann, und ist im störungsfreien Fall und bei idealer Oberfläche für die Flußeindringung von Bedeutung. Es ist dies diejenige Feldstärke, bei welcher das Auftreten der normalleitenden Schichten bereits im ganzen Supraleiter energetisch günstig wird; für die Flußschichten wird also bei größeren magnetischen Feldern keine Oberflächenbarriere mehr vorhanden sein.

Für die Wahl von u kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Entweder verwendet man den Wert (19) für die Flußwirbel und beschränkt damit die Wahl von a, oder man benutzt die Bedingung, daß weit im Inneren des Supraleiters (für $d = x/2$, beim dicken Hohlzylinder oder im Unendlichen, für den supraleitenden Halbraum)

$$h_s = h_{c_1} \tag{23}$$

sein sollte. Aus der letzteren Bedingung, die offensichtlich viel besser als die erstere fundiert ist, weil sie die richtigen Verhältnisse weit im Inneren des Supraleiters widerspiegelt und keine zusätzlichen Einschränkungen auferlegt, erhält man

$$u = \sqrt{\varkappa\sqrt{2}}. \tag{24}$$

ERGEBNISSE UND DISKUSSION

Zunächst seien die erhaltenen Ergebnisse für den Hohlzylinder angeführt. Für diesen werden die beiden wichtigen, bereits in den Arbeiten [12, 15] betrachteten Grenzfälle angegeben.

Für $d \ll 1$ gilt (bei $\varkappa d \gg 1$)

$$h_s = (u + 2\pi/\varkappa - \pi)/d, \tag{25}$$

$$h_{in} = 2\pi/\varkappa d. \tag{26}$$

Da $h_s > h_{in}$ ist, gilt auch

$$h_s = h_{s\,\max}.$$

Dabei ist aber $h_s \gg (H_s, H_{s\,\max})$, deshalb werden im Hohlzylinder die Flußwirbel bei viel kleineren äußeren magnetischen Feldern als die Flußschichten entstehen und auch eintreten können. Im gesamten supraleitenden Hohlzylinder wird das Auftreten der Flußwirbel energetisch günstiger als das der Flußschichten sein.

Für $d \gg 1$ und $\varkappa \gg 1$ ergibt sich

$$h_s = \frac{1}{2}\,\frac{u - \pi(\exp(-2/\varkappa) - \exp(-2d))}{1 - 2\exp(-d)}, \tag{27}$$

$$h_{in} = \frac{\pi}{\varkappa}\,\frac{\exp(-2/\varkappa) - \exp(-2d)}{\exp(-1/\varkappa) - \exp(-d)}. \tag{28}$$

Bei dem Grenzübergang $d \to \infty$ erhält man ohne weitere Schwierigkeiten

die Ergebnisse für den supraleitenden Halbraum, also im wesentlichen für einen makroskopischen Supraleiter. Einfachheitshalber sollen hier ausschließlich diese Ergebnisse diskutiert und mit den zugehörigen Werten für die Wirbel verglichen werden. Für $\varkappa \gg 1$ gilt

$$h_s = \frac{1}{2}[u - \pi\exp(-2/\varkappa)], \tag{29}$$

$$h_{in} = \frac{\pi}{\varkappa}\exp(-1/\varkappa). \tag{30}$$

Die beiden zuletzt angegebenen Feldstärken werden bei $\varkappa \doteq 10$ einander gleich. Für $\varkappa > 10$ ist demnach

$$h_s = h_{s\,\max}.$$

Für alle Werte von $\varkappa \gg 1$ ist allerdings

$$H_{s\,\max} < h_s.$$

Das Auftreten der Flußwirbel an der Oberfläche wird somit bei kleineren magnetischen Feldern energetisch günstig.

Das bisher Gesagte gilt nur für eine ideale Oberfläche. Wenn nämlich irgendwelche Störungen an der Oberfläche deren Glattheit beeinflussen, werden die Flußwirbel und auch die Flußschichten auch weiter als $1/\varkappa$ von der Oberfläche entfernt aufkommen können, wobei die Entfernung von der Oberfläche von irgendeiner gemittelten Größe genommen wird. Dann wird H_{in} bzw. h_{in} eine wichtige Größe für den Flußeintritt darstellen. Es ist aus (30) ersichtlich, daß für $\varkappa \gg 1$ die Flußschichten nach der Entstehung bereits bei kleineren magnetischen Feldern die Oberflächenbarriere *hinuntergleiten* können als dies bei den Flußwirbeln der Fall ist. Wenn die Schichten aber weiter ins Innere des Supraleiters hineindringen, wird hier ein weiterer Übergang zu den Flußwirbelu stattfinden müssen, da weit von der Oberfläche die Wirbel ja immer einer kleineren freien Energie als die Schichten entsprechen [14].

Dicht an der Oberfläche entspricht bei $H \sim H_s$ dem Auftreten der Flußwirbel eine kleinere freie Energie als dem der Flußschichten. Nachher kommt eine Zwischenentfernung; in diesem Gebiet wirkt bereits für $\varkappa > 10$ bei $H \sim H_s$ die Kraft auf die Flußlinien auch ins Innere des Supraleiters. Die Kraft ergibt sich nämlich aus der ersten Ableitung der freien Energie nach der Flußlinienkoordinate b. Über das Feld h_{in} hinaus ist aber bei den Schichten diese Ableitung für $b > 1/\varkappa$ überall negativ. Die Kraft wirkt in Richtung der sinkenden freien Energie. Wenn daher durch irgendeine Störung eine Goodmansche Schicht gebildet wird, kann diese in den Supraleiter auch eintreten.

Ob die Flußwirbel oder die Flußschichten an einer unregelmäßigen Oberfläche gebildet und eintreten werden, hängt von der *Tiefe* und *Breite* der Oberflächenunregelmäßigkeiten ab. Bei sehr *tiefen* Unregelmäßigkeiten werden die Flußwirbel bereits bei Feldern $H \gtrsim H_{c_1}$, andererseits bei *flachen* aber verzogenen Unregelmäßigekeiten werden die Schichten bei Feldern $H \gtrsim h_{in}$ gebildet und eintreten.

Für $\varkappa > 25{,}5$ wird sogar $h_{in} < h_{c_1}$. Der Flußeintritt kann also bereits in den Feldern $H \gtrsim h_{c_1}$ nicht mehr vom Supraleiter aufgehalten werden, weil die Kraft auf die infolge von Oberflächenstörungen entstandenen Flußschichten in den Supraleiter hinein gerichtet ist.

Ein kombiniertes Verhalten — die gleichzeitige Bildung und der anschließende Eintritt der Flußwirbel *und* Flußschichten — ist bei der vollständigen Untersuchung auch nicht von der Hand zu weisen. Wie in den vorher betrachteten Fällen, auch in diesem Fall werden die Schichten weiter von der Oberfläche in einzelne Abrikosovsche Wirbel übergehen müssen, da diese Struktur eine kleinere freie Energie besitzt und keine Barierre diesem Übergang widersetzt wird.

Der Flußeintritt wurde mit Hilfe kleiner ferromagnetischer Teilchen auch optisch beobachtet [16]. In einigen Fällen erfolgte der Flußeintritt in Paketen von mehreren Flußwirbeln; das Paket löste sich nachher im Inneren des Supraleiters. Möglicherweise war der Eintritt durch eine Flußschicht getragen worden, und die Aufnahmen zeigten bereits den Übergang dieser Schichten (welche als Paket von Flußwirbeln aussahen) in die einzelnen Flußwirbel.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, daß bei der anderen Wahl von u,

$$u = \ln \varkappa + 0{,}081,$$

was der Abrikosovschen Größe von H_{c_1} entspricht, ein Wert $\varkappa_{gr}$ existiert, unterhalb dessen die Bildung der Schichten bei kleineren magnetischen Feldern als die der Wirbel begünstigt wird:

$$\varkappa_{gr} \doteq 27.$$

Wenn also die Selbstenergie der Schichteinheitsfläche gleich der Selbstenergie der Einheitslänge einer Abrikosovschen Flußlinie gewählt wird, dann wird für die kleineren $\varkappa$-Werte die Oberflächenbarriere eines massiven Supraleiters 2. Art von den Schichten bei kleineren magnetischen Feldern als von den Abrikosovschen Flußwirbeln überwunden. Bei Supraleitern mit größeren $\varkappa$-Werten als $\varkappa_{gr}$ werden dagegen die Flußwirbel bei kleineren magnetischen Feldern als die Flußschichten die Oberflächenbarriere überwinden. Für unregelmäßige Oberflächen des Supraleiters sind die Eintrittsfeldstärken h_{in} von der Wahl von u unabhängig. Durch solche Oberflächen wird der Flußeintritt je nach der Art der Unregelmäßigkeiten erfolgen (Flußschichten, Flußwirbel, bzw. beide Möglichkeiten gleichzeitig).

Die hier berechneten Eintrittsfeldstärken, genauso wie die von [12, 13], sind in Diskrepanz mit den Ergebnissen von Galaiko [17]. Dieser untersuchte die Stabilität des supraleitenden Zustandes gegenüber beliebigen Schwankungen im Rahmen der mikroskopischen Bardeen—Cooper—Schrieffer-Theorie (BCS-Theorie) [18] und fand, daß der gemischte Zustand in der Nähe der Sprungtemperatur erst für

$$H > 0{,}55$$

erreicht wird. Es wird dabei aber von der Annahme Gebrauch gemacht, daß die charakteristische Abmessung der *gefährlichen Fluktuationen* ungefähr der Kohärenzlänge gleich ist. Diese Forderung wird jedoch weder bei den Arbeiten [12, 13] erfüllt, wo über H_s vom energetischen Standpunkt aus an der Oberfläche bereits eine Struktur gebildet werden kann, noch im vorliegenden Fall, wo die Abmessung der Schichten die Kohärenzlänge um ein vielfaches überragt. Hierdurch wird der Unterschied zu Galaikos Ergebnissen erklärt [19].

ANHANG

Bei den Flußwirbeln lieferte das Feld $H_1(R)$ für $d \ll 1$, obwohl es im Verhältnis zu H_0 vernachlässigt werden konnte, einen sehr wesentlichen Beitrag zu der freien Energie und somit auch zu der Eintrittsfeldstärke H_s [20]. Das Feld $H_1(R)$ konnte bei $\varkappa = 100$ und $d = 0{,}2$ erst von $R > 100$ cm an vernachlässigt werden.

Wir untersuchen nun, wie die Verhältnisse bei den Flußschichten liegen. Zu diesem Zweck wird konsequent die vollständige Lösung der Gleichung (6) für den Hohlzylinder benutzt:

$$H_1 = H_0 \left(\operatorname{sh} x + \frac{2}{R} \operatorname{ch} x\right) \Big/ \left(\operatorname{sh} d + \frac{2}{R} \operatorname{ch} d\right),$$

die aber auch nur in der Näherung $R \gg 1$, $d \ll R$ gilt (hier genügt es allerdings $R > 20$ zu nehmen).

Die in der Gleichung (20) vernachlässigten Glieder liefern dann den folgenden Beitrag zur freien Energie:

$$-\frac{4\pi}{\varkappa d} H_0 \left[\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} d} - \frac{\operatorname{sh} b + \frac{2}{R} \operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} d + \frac{2}{R} \operatorname{ch} d} + \frac{2}{R} \frac{\operatorname{sh}(d-b)}{\operatorname{sh} d}\right] =$$

$$= -\frac{4\pi}{\varkappa d} \frac{H_0}{\operatorname{sh} d \left(\operatorname{sh} d + \frac{2}{R} \operatorname{ch} d\right)} \left[\operatorname{sh} b \operatorname{sh} d + \frac{2}{R} \operatorname{sh} b \operatorname{ch} d - \right.$$

$$- \operatorname{sh} b \operatorname{sh} d - \frac{2}{R} \operatorname{ch} b \operatorname{sh} d + \frac{2}{R} \operatorname{sh}(d - b)\Bigg].$$

Dieser Beitrag verschwindet für alle d und R, deshalb sind die Ergebnisse von (25) und (26) auch in dem Extremfall

$$d \to 0$$

richtig. Somit ist

$$(h_{in}, h_s) \gg H_s = \frac{0,65}{2\varkappa d},$$

wodurch wiederum die Tatsache bestätigt wird, daß in den Proben von kleineren Abmessungen die Flußwirbel bei kleineren magnetischen Feldern als die Flußschichten gebildet werden [6].

SCHRIFTTUM

[1] Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., ЖЭТФ *20* (1950), 1064.
[2] Абрикосов А. А., ЖЭТФ *32* (1957), 1442.
[3] Kleiner W. H., Roth L. M., Autler S. H., Phys. Rev. *133* (1964), A 1226.
[4] Goodman B. B., Phys. Rev. Letters *6* (1961), 597.
[5] Cribier D., Jacrot B., Farnoux B., Madhav Rao L., J. Appl. Phys. *37* (1966), 952.
[6] Boato G., Gallinaro G., Rizutto C., Solid State Commun. *3* (1965), 173.
[7] Fetter A. L., Phys. Rev. *147* (1966), 153.
Fetter A. L., Hohenberg P. C., Pincus P., Phys. Rev. *147* (1966), 140.
[8] Bean C. P., Livingston L. D., Phys. Rev. Letters *12* (1964), 14.
[9] Joseph A. S., Tomasch W. J., Phys. Rev. Letters *12* (1964), 219.
De Blois R. W., De Sorbo W., Phys. Rev. Letters *12* (1964), 499.
[10] Böbel G., Ratto C. F., Solid State Commun. *3* (1965), 177.
[11] De Gennes P. G., Solid State Commun. *3* (1965), 127.
[12] Takács S., Z. Phys. *199* (1967), 495.
[13] Takács S., Phys. Status Solidi *21* (1967), 709.
[14] Goodman B. B., Rev. Mod. Phys. *36* (1964), 12.
[15] Абрикосов А. А., ЖЭТФ *46* (1964), 1464.
[16] Träuble H., Essmann U., Phys. Status Solidi *20* (1967), 95.
[17] Галайко В. П., ЖЭТФ *50* (1966), 717.
[18] Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev. *108* (1957), 1175.
[19] Takács S., Vortrag auf der VI. Intern. Tagung über Phys. u. Techn. der tiefen Temp., Wroclaw 1967 (unveröff.).
[20] Takács S., Z. Phys. *203* (1967), 226.
[21] Saint-James D., de Gennes P. G., Phys. Letters *7* (1963), 306.

Eingegangen am 4. 10. 1967

Elektrotechnický ústav
Slovenskej akadémie vied,
Bratislava