Fyzikálny časopis 18 (1968), No. 2

VZŤAH MEDZI METÓDOU SKLADANIA JEDNOTLIVÝCH AMPLITÚD A METÓDOU HRANIČNÝCH PODMIENOK V OPTIKE TENKÝCH VRSTIEV

LADISLAV DUNAJSKÝ, Nitra

Pre amplitúdový koeficient odrazu r_{1n} a prechodu (lomu) t_{1n} sústavy tenkých vrstiev platia vzťahy, ak túto sústavu rozdelíme na dve podsústavy intermediálnou tenkou vrstou, ktorou je k-te prostredie:

$$r_{1n} = \frac{r_{1k} + (t_{1k}t_{k1} - r_{1k}r_{k1})r_{kn}N^2}{1 - r_{k1}r_{kn}N^2}, \tag{1}$$

$$t_{1n} = \frac{t_{1k}t_{kn}N}{1 - r_{k1}r_{kn}N^2}. \tag{2}$$

V týchto vzťahoch usporiadaná dvojica dolných indexov pri r a t vyjadruje, medzi ktorými prostrediami berieme príslušný amplitúdový koeficient odrazu a prechodu (lomu). Pre krátkosť písania mse zaviedli symbol

$$N = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}n_k d_k\right),$$

kde komplexný index lomu k-teho prostredia $n_k = \eta_k + \mathrm{i}\varkappa_k$ a d_k je hrúbka k-tej tenkej vrstvy.

Vzťahy (1) a (2) sa odvádzajú (pozri napr. [1]):

1) metódou skladania jednotlivých amplitúd,

2) metódou hraničných podmienok podľa elektromagnetickej teórie svetla.

O príspevku jednotlivých vedcov k tomuto problému sa hovorí v práci [2]. Metóda 2) vychádza z hraničných podmienok Maxwellových rovníc a prostredníctvom týchto rovníc je spojená s najvšeobecnejšími zákonitosťami elektromagnetického poľa. Metóda 1) je špecifická pre problémy odrazu a prechodu vĺn. Pri tejto metóde, ak $|Q| = |r_{k1}r_{kn}N^2| \geqq 1$, vystúpi problém divergencie radov (pozri [3, 4]). V tomto článku odvodíme z elektromagnetickej teórie geometrické rady, ktoré sa pôvodne získali metódou 1).

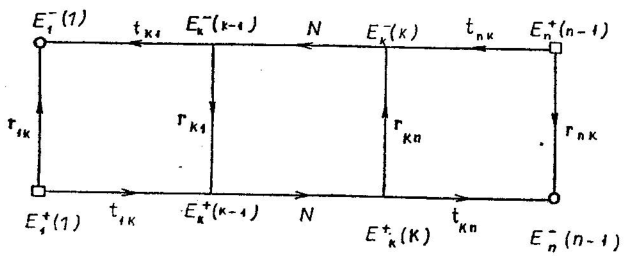
Pre sústavu tenkých vrstiev rozdelenú na dve podsústavy k-tou tenko vrstvou možno napísať na základe lineárnosti Maxwellových rovníc a ich

hraničných podmienok známe vzťahy pre intenzitu elektrického poľa E:

$$E_k^+(k-1) = t_{1k}E_1^+(1) + r_{k1}E_k^-(k-1), \tag{3}$$
$$E_1^-(1) = r_{1k}E_1^+(1) + t_{k1}E_k^-(k-1), \tag{4}$$
$$E_k^+(k) = NE_k^+(k-1), \tag{5}$$
$$E_k^-(k-1) = NE_k^-(k), \tag{6}$$
$$E_n^+(n-1) = t_{kn}E_k^+(k) + r_{kn}E_n^-(n-1), \tag{7}$$
$$E_k^-(k) = r_{kn}E_k^+(k) + t_{nk}E_n^-(n-1). \tag{8}$$

Horný index + a — označuje smer šírenia sa vlny, dolné index pri E vyjadrujú poradové číslo prostredia a v zátvorke pri E udávame poradové číslo rozhrania.

Vzťahy (3) — (8) platia pre kolmý dopad svetla a pre p a s složku vektora intenzity elektrického poľa pri šikmom dopade.



Obr. 1. Signálový graf rovníc (3) — (8). Štvorčeky sú zdroje, krúžky nory.

Signálový graf rovníc (3) — (8) je na obr. 1. Tento signálový graf má jednu slučku. Z rôznych metód, ktorými sa riešia signálový grafy, použijeme práve metódu n priamych ciest cez slučku (pozri napr. [5]), aby sme dostali vzťah medzi metódami 1) a 2). Táto metóda spočíva v sčítaní n priamych ciest od zdroja do nory cez slučky pridaním ďalšieho člena, ktorý vyjadruje pôsobenie fiktívneho zdroja, ktoréhokoľvek vnútorného uzla slučky.[1] Uvažujeme ďalej len dopad svetla zľava, t. j. $E_n^-(n-1) = 0$ a $E_1^+(1)$ je dané. Riešime len odraz, lebo prechod svetla by sme riešili podobne.

Do nory $E_1^-(1)$ (odrazené svetlo) máme jednu priamu cestu s prenosom r_{1k} a cesty cez slučku, ktorej slučkový prenos $Q = r_{k1}r_{kn}N^2$. Môžeme napísať, že

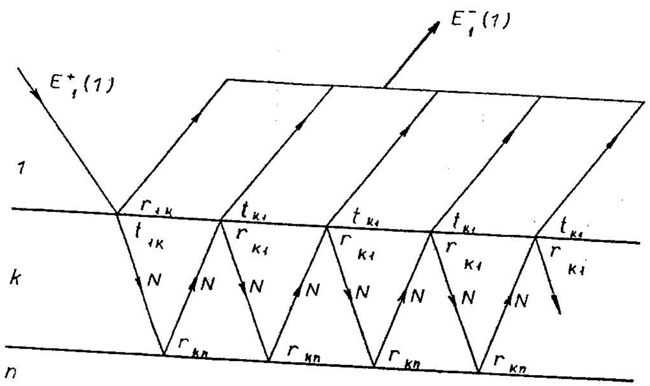
[1] Tento člen sa niekedy vynecháva. Pre konvergentný rad máme pre konečný počet ciest približné riešenie. Pre divergentný rad n priamych ciest cez slučku nemožno tento člen vynechať, lebo s rastúcim n sa tento člen nezmenšuje.

Signálový graf vo všeobecnom prípade sa dá riešiť Masonovým pravidlom alebo maticovou metódou vypracovanou V. Jelínkom v práci [6], a tak z rovníc (3) — (8) získať ich riešenie v tvare (1) a (2).

$$E_1(1) = [r_{1k} + t_{1k}t_{k1}r_{kn}N^2 \sum_{i=0}^{n} Q^i]\, E_1^+(1) +$$
$$+ t_{k1}r_{kn}N^2Q^{n+1}E_k^+(k-1). \tag{9}$$

Výraz v hranatej zátvorke je totožný s geomtrickým radom, ktorý dostaneme skladaním n amplitúd. Ak $|Q| < 1$, tak na pravej strane výrazu (9) geometrický rad konverguje a člen obsahujúci $E_k^+(k-1)$ sa blíži k nule. Označiac podiel $E_1^-(1)$ a $E_1^+(1)$ ako r_{1n}, po úprave dostaneme vzťah (1).

Pre hypotetické rozhranie, ktoré nahradzuje sústavu tenkých vrstiev, v určitých prípadoch môže byť $|r_{nk}| \geqslant 1$ a aj $|Q| \geqslant 1$. Teraz pre $n \to \infty$ geometrický rad vo výraze (9) diverguje, ale blíži sa k nekonečnu aj posledný člen na pravej strane (9). Pravá strana rovnice (9) sa stane *neurčitým výrazom* typu $\infty + \infty$.[2]



Obr. 2. Metóda skladania jednotlivých amplitúd (mnoholúčová interferencia).

Metóda skladania amplitúd je vlastne metóda, ktorá rieši problém odrazu a prechodu svetla cez sústavu tenkých vrstiev tak, že každú cestu cez slučku signálového grafu narysuje osobitne (obr. 2), pričom vynecháme člen charakterizujúci pôsobenie fiktívneho zdroja (pozri pozn. 1). Týmto vidíme súvislosť medzi obidvoma metódami, 1) a 2) a aj obmedzenosť metódy 1). Sčítaním n amplitúd dostaneme prvú stranu výrazu (9) bez posledného člena. Ak $|Q| < 1$, tak pre konečné n je táto metóda približná a pre $n \to \infty$ dáva konvergentný geometrický rad, ktorý je presným riešením problému; ale ak $|Q| \geqslant 1$ n členov tohto geometrického radu nie je aproximáciou pre r_{1n} a preto nemožno brať limitu tohto geometrického radu, aby sme dostali r_{1n}. Týmto sme vlastne problém divergencie goemetrického radu pri metóde skladania jednotlivých amplitúd odstránili, lebo táto metóda je v tomto prípade neprípustná metóda riešenia rovníc (3) — (8).

[2] Ide o ∞ v oblasti komplexných čísiel.

Naše úvahy možno zhrnúť, že metóda skladania jednotlivých amplitúd je pre $|Q| < 1$ jednou z metód riešenia rovníc (3) — (8), a to metódou n priamych ciest riešenia signálového grafu priradeného k týmto rovniciam.

LITERATÚRA

[1] Vašíček A., *Optika tenkých vrstev*, Nakladatelství ČSAV Praha 1956.
[2] Vašíček A., Applied Optics *4* (1965), 1032.
[3] Berning P. H., J. Opt. Soc. Am. *46* (1956), 779.
[4] Knittl Z., Czech. J. Phys. *9* (1959), 91.
[5] Robichaud L., Boisvert M., Robert J., *Graphes de fluence*. Application à l'électrotechnique et à l'électronique. Calculateurs analgoiques et digitaux. Presses de l'Université Laval, Laval 1961, 23.
[6] Jelínek V., Aplikace matematiky *8* (1963), 55.

Došlo 24. 6. 1966

Katedra fyziky
Prevádzkovo-ekonomickej fakulty VŠP,
Nitra

THE RELATION BETWEEN THE METHOD OF SUPERPOSITION OF AMPLITUDES AND THE METHOD OF BOUNDARY CONDITONS IN OPTICS OF THIN FILMS

Ladislav Dunajský

Summary

The method of superposition of amplitudes is a special method of solution of equations deduced form Maxwell equations and their boundary conditions.