Fyzikálny časopis 18 (1968), No. 1

PRÍSPEVOK K MERANIU REZISTANCIE POLOVODIVÝCH MATERIÁLOV VYSOKOFREKVENČNOU INDUKČNOU METÓDOU

SVETOZÁR KALAVSKÝ, Bratislava

ÚVOD

Okrem kontaktných metód, pri ktorých sa na meranie mernej rezistancie polovodičov používa napájanie vzorky jednosmerným prúdom cez prítlačné alebo letované kontakty, boli rozpracované bezkontaktné metódy, pri ktorých sa vzorka napája vysokofrekvenčnou energiou buď cez indukčnú, alebo cez kapacitnú väzbu. Spoločnou výhodou vysokofrekvenčných metód je, že pri ich použití odpadajú starosti s kontaktmi a v súvislosti s tým aj nebezpečie znečistenia vzorky. Vo väčšine prípadov pre takéto merania, s ohľadom na komplikované rozloženie elektromagnetického poľa vo vzorke aj vo väzbovom priestore, nie je vypracovaná presná teória a pri vyhodnocovaní meraní treba použiť empirickú kalibráciu pomocou niektorej absolútnej metódy.

Použitiu vysokofrekvenčnej indukčnej metódy, kde meranie spočíva v určení zmeny impedancie mernej cievky po vložení valcovej vzorky do jej osi, venovalo sa už niekoľko prác. Zimmerman [1] odvodil vzťahy použiteľné na meranie dlhých kovových aj polovodivých vzoriek, ktoré približne platia pri použití dostatočne dlhých cievok. U nás na tomto princípe vypracoval Frank [2], [3] metódu na meranie polovodivých ingotov pomocou Q-metra. Vplyv axiálnej nehomogenity poľa pri použití krátkych cievok v istom priblížení započítava Bielek [4], hlavne s ohľadom na meranie krátkych vzoriek — salámikov. V predkladanej práci je spracovaná teória na vyhodnotenie merania dlhých vzoriek v krátkych cievkach, so započítaním axiálnej aj radiálnej nehomogenity poľa, vo frekvenčnej oblasti, kde hĺbka vniku elektromagnetickej vlny do materiálu vzorky je väčšia ako polomer vzorky.

PODSTATA METÓDY

Keď sa do solenoidu s indukčnosťou L_0, ktorý je súčasťou sériového rezonančného okruhu s činiteľom kvality Q_0, axiálne vloží valcová polovodivá vzorka s jednotkovou relatívnou magnetickou permeabilitou, zmení sa jeho indukčnosť na hodnotu L a činiteľ jeho kvality klesne na hodnotu Q. Ak sú okrem toho známe rozmery solenoidu (polomer r_0, dĺžka l_0), rozmery vzorky (polomer r_1, dĺžka $l_1 \gg l_0$) a pracovná frekvencia $\omega = 2\pi f$, možno určiť strednú objemovú hodnotu ϱ mernej rezistancie časti vzorky, ktorá je s poľom solenoidu v najsilnejšej interakcii.

Obmedzíme sa na prípad, keď vo vzorke vznikajú iba slabé vírivé prúdy, ktorých účinok na priebeh magnetického poľa v prítomnosti vzorky možno zanedbať. Toto obmedzenie vedie k požiadavke vyjadrenej nerovnosťou

$$\Theta > r_1, \tag{1}$$

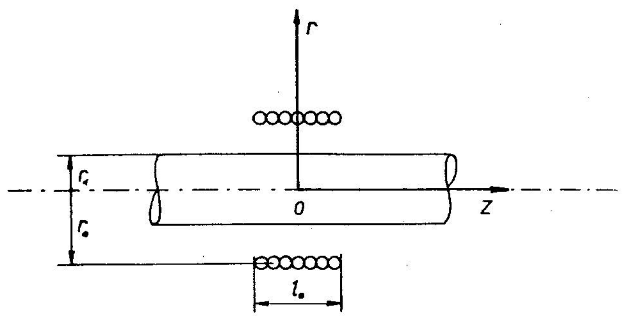
kde Θ je hĺbka vnoru elektromagnetickej vlny do materiálu vzorky. Pre axiálnu zložku vektora magnetickej indukcie v solenoide bez vzorky, pokiaľ sa neuvádza jej časová závislosť, platí vyjadrenie

$$B_z(r, z) = B_0\, \Phi(r, z), \tag{2}$$

kde B_0 je hodnota magnetickej indukcie v nekonečnom solenoide a $\Phi(r, z)$ je funkcia rozloženia poľa závislá od valcových súradníc zavedených podľa obr. 1. V prípade, na ktorý sa obmedzujeme, t. j. keď je splnená nerovnosť (1), vzťah (2) približne platí aj pre solenoid so vzorkou. O korektnosti sformulovaného priblíženia svedčí porovnanie presných a v tomto zmysle približných výsledkov pre nekonečný solenoid podľa priebehu korekčného činiteľa $G(r_1/\Theta)$ pozri [3].

Pri splnení uvedených podmienok pre indukčnosť solenoidu bez vzorky aj so vzorkou platí výraz

$$L = L_0 = 2\pi\mu_0 \left(\frac{n}{l_0}\right)^2 \int_{-l_0/2}^{l_0/2} \int_0^{r_0} r\Phi(r, z)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z \tag{3}$$



Obr. 1. Znázornenie zavedenia valcových súradníc.

a pre stratový výkon podmienený vírivými prúdmi v celom objeme vzorky

$$N = \frac{2\pi\mu_0^2\omega^2}{\varrho}\left(\frac{n}{l_0}\right)^2 I_{\mathrm{ef}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{r_1} \frac{1}{r}\left[\int_0^r r\Phi(r, z)\mathrm{d}r\right]^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}z = I_{\mathrm{ef}}^2 R, \tag{4}$$

kde n/l_0 je hustota vinutia solenoidu, I_{ef} je efektívna hodnota prúdu tečúceho solenoidom a R je hodnota sériového odporu, ktorým sa pri zasunutej vzorke zväčšuje tlmenie sériového rezonančného okruhu, vytvoreného solenoidom a mernou kapacitou Q-metra. Vo výraze (4) rozšírenie integračných hraníc pre premennú z do nekonečna dovoľuje okolnosť, že funkcia $\Phi(r, z)$ mimo solenoidu rýchlo klesá k nule.

Pretože straty solenoidu so vzorkou sú približne dané súčtom strát nezaťaženého solenoidu a strát vo vzorke, platí

$$\frac{Q_0 Q}{Q_0 - Q} = \frac{\omega L}{R}. \tag{5}$$

Ak sa navyše pripustí platnosť priblíženia, v ktorom je solenoid o dĺžke l_0 nahradený rovnako dlhým úsekom nekonečného solenoidu, t. j.

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= 1 \qquad |z| < l_0/2, \\ \Phi(r, z) &= 0 \qquad |z| > l_0/2 \end{aligned} \tag{6}$$

z výrazov (3), (4), (5) postupne vychádza

$$L_\infty = \frac{\pi\mu_0 r_0^2 n^2}{l_0}, \tag{7}$$

$$R_\infty = \frac{\pi\mu_0^2\omega^2 n^2 r_1^4}{8 l_0 \varrho}, \tag{8}$$

$$\varrho_\infty = \frac{\omega\mu_0}{8}\,\frac{Q_0 Q}{Q_0 - Q}\,\frac{r_1^4}{r_0^2}. \tag{9}$$

Výraz (9), ku ktorému dospel už Frank [2, 3], dáva dobré výsledky pri použití dostatočne dlhých cievok ($l_0 > 10 r_0$). Pre niektoré merania, napríklad, ak je potrebné získať informáciu o rozložení vodivosti pozdĺž ingotu, alebo pri vysokej pracovnej frekvencii, používajú sa krátke cievky, ktoré často pozostávajú len z niekoľkých závitov. Presnejšie hodnoty mernej rezistancie ϱ v takýchto prípadoch možno získať, ak sa namiesto priblíženia (6) použije presné vyjadrenie poľa v solenoide. To vedie k rozšíreniu výrazu (9) o korekčnú funkciu $\lambda(u, v)$, takže

$$\varrho = \varrho_\infty \, \lambda(u, v), \tag{10}$$

kde

$$u = \frac{l_0}{2r_0} \qquad (0 < u < \infty),$$

$$v = \frac{r_1}{r_0} \qquad (0 < v < 1).$$

Podobne možno presnejšie hodnoty L a R vyjadriť vzťahmi

$$L = L_\infty \mu(u), \tag{11}$$

$$R = R_\infty \, \nu(u, v), \tag{12}$$

kde $\mu(u)$ a $\nu(u, v)$ sú zodpovedajúce korekčné funkcie.

VÝPOČET KOREKČNÝCH FUNKCIÍ

Základom pre výpočet korekčných funkcií je vyjadrenie funkcie $\Phi(r, z)$. Na to možno výhodne použiť výpočtovú metódu známu v elektrónovej optike [5], ktorá umožňuje rozložiť osovo symetrické magnetické pole budené solenoidálnymi prúdmi do nekonečného radu podľa mocnín r. Pre zložky vektorového potenciálu v takomto poli platí

$$A_r(r, z) = A_z(r, z) = 0,$$

$$A_\varphi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{(2k)}(z)}{k!(k+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1}, \tag{13}$$

kde $B(z)$ je priebeh magnetickej indukcie pozdĺž osi a $B^{(2k)}(z)$ sú jeho párne derivácie podľa z. Zložky vektora magnetickej indukcie potom sú

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$B_z(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \, A_\varphi], \tag{14}$$

$$B_\varphi(r, z) = 0.$$

Podľa [6] má funkcia $B(z)$ pre solenoid tvar

$$B(z) = \frac{B_0}{2} \left\{ \frac{\frac{l_0}{2} + z}{\left[r_0^2 + \left(\frac{l_0}{2} + z\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{\frac{l_0}{2} - z}{\left[r_0^2 + \left(\frac{l_0}{2} - z\right)^2\right]^{1/2}} \right\}, \tag{15}$$

ktorý zavedením substitúcie $z = r_0 w$ a použitím prv definovaného symbolu u možno prepísať ako

$$B(r_0 w) = B_0 \Psi(u, w) = \frac{B_0}{2} \left\{ \frac{u + w}{[1 + (u + w)^2]^{1/2}} + \frac{u - w}{[1 + (u - w)^2]^{1/2}} \right\}. \tag{16}$$

Ak vo výrazoch (3), (4) uplatníme vzťah (2) a (14), t. j.

$$\Phi(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \, \frac{A_\varphi}{B_0} \right), \tag{17}$$

a konečne použijeme rozvoj (13), pre korekčné funkcie $\mu(u)$ a $\nu(u, v)$ vychádza vyjadrenie

$$\mu(u) = \frac{L}{L_\infty} = \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} \int_0^u \Psi_w^{(2k)}(u, w) \, dw, \tag{18}$$

$$\nu(u,v) = \frac{R}{R_\infty} = \frac{1}{u} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k} \, v^{2(j+k)}}{2^{2(j+k)} j!(j+1)! k!(k+1)!(2+j+k)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_w^{(2j)}(u, w) \, \Psi_w^{(2k)}(u, w) \, dw, \tag{19}$$

kde $\Psi_w^{(k)}(u, w)$ má zmysel k-tej parciálnej derivácie funkcie $\Psi(u, w)$ podľa w. Výpočet funkcie $\mu(u)$ sa tak redukuje na výpočet derivácií funkcie $\Psi(u, w)$. Výraz (19) pre funkciu $\nu(u, v)$ možno prepísať na tvar

$$\nu(u, v) = \frac{1}{u} \sum_{i=0}^{\infty} v^{2i} \nu_{2i}(u), \tag{20}$$

kde koeficienty pri mocninách v^2 závisia už len od u a platí

$$\nu_{2i}(u) = \frac{I_{2i}}{2^{2i}(2+i)} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!(j+1)!(i-j)!(i-j+1)!}, \tag{21}$$

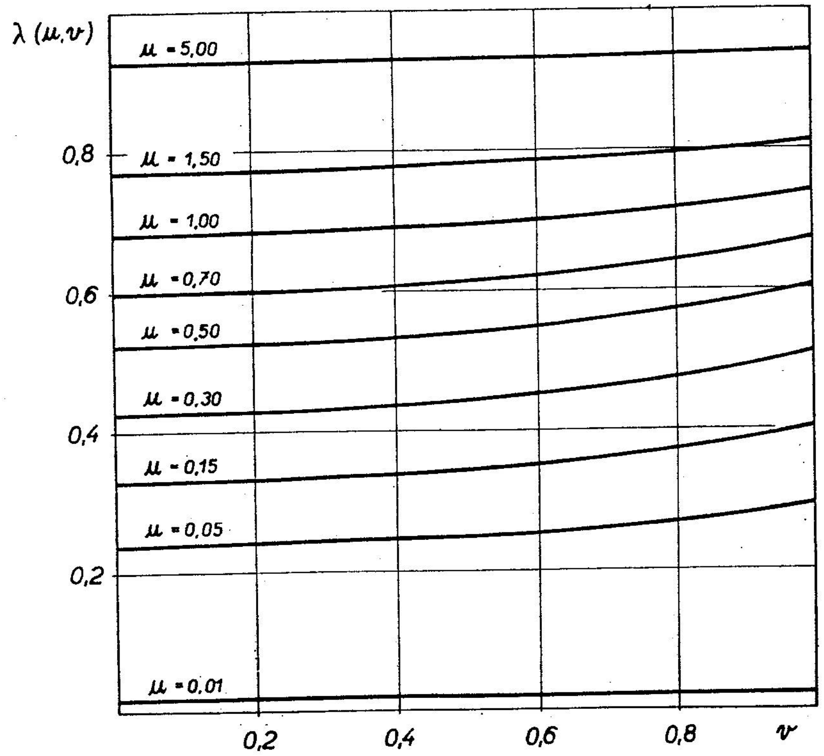
pričom

$$I_{2i} = \int_{-\infty}^{\infty} [\Psi_w^{(i)} (u, w)]^2 dw. \tag{22}$$

Výpočet funkcie $\nu(u, v)$ sa tak redukuje na výpočet integrálov (22), čo vedie k ich vyjadreniu pomocou úplných eliptických integrálov prvého a druhého druhu.

Funkcia $\lambda(u, v)$ je s funkciami $\mu(u)$ a $\nu(u, v)$ podľa (5) a (7)—(12) viazaná vzťahom

$$\lambda(u, v) = \frac{\nu(u, v)}{\mu(u)} = \frac{1}{u} \sum_{i=0}^{\infty} v^{2i} \frac{\nu_{2i}(u)}{\mu(u)} = \sum_{i=0}^{\infty} v^{2i} \lambda_{2i}(u). \tag{23}$$



Obr. 2. Grafické znázornenie korekčnej funkcie $\lambda(u, v)$.

Tabuľka 1

u	$\lambda_0(u)$	$\lambda_2(u)$	$\lambda_4(u)$	$\lambda_6(u)$
0,01	0,0170	0,0026	0,0009	0,0004
0,05	0,2378	0,0371	0,0126	0,0057
0,15	0,3289	0,0501	0,0165	0,0071
0,30	0,4244	0,0601	0,0176	0,0066
0,50	0,5221	0,0636	0,0148	0,0041
0,70	0,5978	0,0605	0,0108	0,0022
1,00	0,6815	0,0514	0,0065	0,0011
1,50	0,7697	0,0375	0,0034	0,0006
5,00	0,9271	0,0106	0,0008	0,0002

Číselné hodnoty funkcií $\lambda_{2i}(u)$ pre $i = 0, 1, 2, 3$ a pre vybrané hodnoty u sú uvedené v tabuľke 1.

Pre praktické použitie je určené grafické znázornenie korekčnej funkcie $\lambda(u, v)$ na obr. 2, kde rôzne krivky zodpovedajú rôznym hodnotám parametra u. Do výpočtu funkcie $\lambda(u, v)$ sme zahrnuli len prvé štyri členy rozvoja (23), čo poskytuje výsledky na tri platné miesta.

OVERENIE VÝPOČTU KOREKČNÝCH KOEFICIENTOV

O správnosti výpočtu korekčného koeficientu $\mu(u)$ presvedčuje porovnanie získaných výsledkov s hodnotami vyrátanými podľa L. Lorenzovho vzorca pre indukčnosť solenoidu [7] v tabuľke 2.

Tabuľka 2

u	0,05	0,15	0,30	0,40	0,50	0,70	1,00	1,50	5,00
$\mu(u)$	0,099	0,257	0,401	0,469	0,523	0,605	0,687	0,769	0,920
$L/L\infty$	0,123	0,267	0,405	0,472	0,525	0,607	0,688	0,770	0,920

Poznámka: Čísla v druhom riadku zodpovedajú súčtom prvých piatich členov radu (18). Čísla v treťom riadku sú vyrátané podľa L. Lorenzovho vzťahu [7].

Odchylky medzi porovnávanými veličinami sú spôsobené tým, že do výpočtu $\mu(u)$ sme zahrnuli len prvých päť členov rozvoja (18). Toto súčasne presvedčuje o korektnosti použitia rozvoja (13) pre výpočet funkcie $\nu(u, v)$, čo priamo možno verifikovať len experimentálne.

V tabuľke 3 je uvedené porovnanie vypočítaných hodnôt $\lambda_T(u, v)$ (získané grafickou interpoláciou z obr. 2) a experimentálne určených hodnôt $\lambda_E(u, v)$.

Tabuľka 3

u	v	$\lambda_T(u, v)$	$\lambda_E(u, v)$	Čiastočné výsledky l_0[cm]	r_0[cm]	r_1[cm]	ϱ[Ω cm]	ϱ_∞[Ω cm]	Poznámky
0,15	0,35	0,33	0,30	0,72	2,33	0,82	0,94	3,14	2—3 MHz
0,25	0,51	0,41	0,36	0,81	1,61	0,82	0,94	2,61	
0,28	0,35	0,42	0,44	1,32	2,36	0,82	0,94	2,15	
0,51	0,50	0,54	0,49	1,67	1,63	0,82	0,94	1,93	
0,64	0,64	0,60	0,52	1,63	1,28	0,82	0,94	1,82	
0,23	0,58	0,41	0,45	0,82	1,80	1,02— —1,07	4,5— —31,1	9,43— —55,0	[4] 50 MHz
0,23	0,46	0,40	0,41	0,82	1,80	0,79— —0,85	13,6— —86,0	44,9— —135,7	

Experiment spočíval v meraní dvojsondovou metódou (určenie spoľahlivých hodnôt ϱ) a v meraní tých istých vzoriek vysokofrekvenčnou metódou (určenie hodnoty ϱ_∞ podľa (9)). Porovnaním nameraných výsledkov podľa (10) sme získali hodnoty funkcie $\lambda(u, v)$, t. j.

$$\lambda_E(u, v) = \frac{\varrho}{\varrho_\infty}. \tag{24}$$

V hornej časti tabuľky 3 je dokumentovaná séria meraní na jednom kremíkovom kryštáli v rôznych cievkach. Uvedené čísla, pokiaľ sa vzťahujú na vysokofrekvenčnú metódu, sú priemermi hodnôt, ktoré boli namerané vo frekvenčnom intervale 2—3 MHz.

V posledných dvoch riadkoch tabuľky 3 sú pre porovnanie uvedené Bielekove merania [4] vykonané v jednej cievke na dvoch rôznych kryštáloch pri frekvencii 50 MHz. Tu sú uvedené stredné hodnoty vypočítané z rôznych meraní po celej dĺžke kryštálov s výnimkou veličín r_1, ϱ, ϱ_∞, pre ktoré sú uvedené intervaly zmien ich hodnôt pozdĺž kryštálov.

Odchylky nameraných od vypočítaných hodnôt $\lambda(u, v)$ sú okrem nevyhnutnej chyby merania podmienené tým, že ani homogenita vzorky, ani definovanosť jej tvaru nie sú také, ako sa predpokladá v teoretických úvahách. V každom prípade sa možno presvedčiť o korektnosti merania vyšetrením frekvenčnej závislosti súčinu

$$\omega \frac{Q_0 Q}{Q_0 - Q},$$

ktorý pri práci v dovolenej frekvenčnej oblasti (1) má mať podľa (9) a (10) konštantnú hodnotu. Systematická zmena hodnoty tohto súčinu môže byť podmienená, buď nevhodnou voľbou pracovnej frekvencie, alebo radiálnou nehomogenitou meraného materiálu.

Záverom chcem vysloviť poďakovanie p. prom. fyz. A. Chalupkovej za pomoc pri náročných numerických výpočtoch a p. Ing. J. Bielekovi za láskavé poskytnutie výsledkov jeho meraní z práce [4].

LITERATÚRA

[1] Zimmerman J. E., Rev. Sci. Instr. *32* (1961), 402.
[2] Frank H., Zpráva VÚST 23049/3/61 (1961).
[3] Frank H., Viktora B., Slaboproudý obzor *23* (1962), 252.
[4] Bielek J., Laboratórna zpráva a merací predpis MCHZ Nový Bohumín 351/1963.
[5] Гапонов В. И., *Електроника I*, Москва 1960, 471.
[6] Kneppo L., *Magnetické pole*, Bratislava 1958, 123.
[7] Ollendorf F., *Potentialfelder der Elektrotechnik*, Berlín 1932, 118.

Došlo 9. 3. 1967

Katedra experimentálnej fyziky
Prírodovedeckej fakulty UK,
Bratislava

BEITRAG ZUR WIDERSTANDSMESSUNG VON HALBLEITERN MIT EINER HOCHFREQUENTEN INDUKTIVEN METHODE

Svetozár Kalavský

Zusammenfassung

Es wurde eine Formel zur Berechnung des spezifischen Widerstandes von Halbleitern aus Änderung des Gütefaktors des Resonanzkreises abgeleitet. Die Änderung des Gütefaktors erreicht man durch Einführung einer langen zylinderförmigen Probe in die Resonanzspule (Solenoid allgemeiner Form). Im Unterschied zu älteren Arbeiten wird hier der Einfluß der axialen und radialen Inhomogenität des Feldes berücksichtigt, die Untersuchung wird jedoch auf die Fälle beschränkt, wenn die Eindringtiefe der elektromagnetischen Welle in das untersuchte Material größer als dessen Radius ist. Die experimentelle Überprüfung der Korrekturfunktionen zeigt — mit Rücksicht auf die erzielte Meßgenauigkeit — eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie.