Fyzikálny časopis 17 (1967), No. 3

POZNÁMKA K ODVODENIU BOLTZMANNOVEJ KINETICKEJ ROVNICE V PRÍPADE SÍL EXPLICITNE ZÁVISLÝCH OD RÝCHLOSTI ČASTICE

VIKTOR MARTIŠOVITŠ, Bratislava

Práca uvádza postup odvodenia Boltzmannovej kinetickej rovnice v tvare, ktorý možno použiť aj v prípade síl explicitne závislých od rýchlosti častice. Je uvedená nutná a postačujúca podmienka, keď všeobecný tvar kinetickej rovnice prechádza na bežne používaný tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \left[\frac{\delta f}{\delta t}\right]_i .$$

Postup, ktorý sa v literatúre [1—5] používa pri odvodení Boltzmannovej kinetickej rovnice, predpokladá, že sila pôsobiaca na častice nezávisí explicitne od rýchlosti (tento predpoklad zabezpečuje, že element fázového priestoru sa nemení). Pre prípad Lorentzovej sily $\mathbf{F} = e\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ sa dodatočne ukáže v [3, 4], že takto odvodená kinetická rovnica ostáva v platnosti. Výnimkou je práca [6], kde pri odvodzovaní kinetickej rovnice sa uvažuje a o zmene objemu fázového elementu. Postup sa však tiež obmedzuje iba na Lorentzovu silu, pre ktorú sa dokazuje, že zmena objemu fázového elementu je nulová.

Je výhodné (napr. aj z pedagogického hľadiska), ak sa z formálnej stránky postup upraví tak, aby sa nemuseli vylúčiť sily závislé od rýchlosti častíc, i keď praktický význam má z nich len Lorentzova sila.

Uvažujme šesťrozmerný fázový priestor s pravouhlým súradným systémom. Každý fázový bod charakterizujú tri súradnice x, y, z (stručne $\mathbf{r}$), ktoré udávajú polohu častice v obyčajnom priestore, a ďalšie tri súradnice v_x, v_y, v_z (stručne $\mathbf{v}$), ktoré udávajú rýchlosť častice. Takto zavedený šesťrozmerný priestor je však rozmerove nehomogénny (t. j. na jednotlivých osiach nenachádzajú sa veličiny s rovnakým fyzikálnym rozmerom) a má charakter afinného priestoru. Z fyzikálneho hľadiska je však potrebné, aby sa vo fázovom priestore zaviedla aj metrika (aby sme mohli napr. definovať výtok šesťrozmerného vektora cez plochu, treba definovať veľkosť plošného elementu a pod.) Preto namiesto zavedených súradníc fázového bodu budeme používať takto definované merné čísla:

$$\xi_1 = \frac{x}{[x]}; \quad \xi_2 = \frac{y}{[y]}; \quad \xi_3 = \frac{z}{[z]}; \quad \xi_4 = \frac{v_x}{[v_x]}; \quad \xi_5 = \frac{v_y}{[v_y]}; \quad \xi_6 = \frac{v_z}{[v_z]}.$$

Hranatá zátvorka $[a]$ označuje rozmer veličiny a. Potom čísla $\xi_1, \dots \xi_6$ môžeme pokladať za zložky šesťrozmerného vektora ξ, ktorý sa dá skrátene napísať v tvare

$$\xi = (\alpha \boldsymbol{r}, \beta \boldsymbol{v}),$$

kde

$$\alpha^{-1} = [x] = [y] = [z] \text{ a } \beta^{-1} = [v_x] = [v_y] = [v_z].$$

Vo fázovom priestore s takto voleným súradným systémom možno už zaviesť metriku obvyklým spôsobom.

Počet fázových bodov v elemente fázového priestoru $d\Gamma = d\xi_1 . d\xi_2 \dots d\xi_6$ v čase t je $dN = \psi(\xi, t) d\Gamma$, kde $\psi(\xi, t)$ je rozdeľovacia funkcia, ktorá udáva hustotu rozloženia fázových bodov vo fázovom priestore. Pri výpočtoch sa však častejšie udáva počet častíc, ktoré ležia v objemovom elemente $dxdydz$ a ich rýchlosti sú v elemente rýchlostného priestoru $dv_x dv_y dv_z$, pomocou vzťahu $dN = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$. Funkcia $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$ už nie je bezrozmerná a s funkciou ψ súvisí podľa vzťahu

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = \alpha^3 \beta^3 \psi(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{v}, t).$$

Zvoľme si vo fázovom priestore ľubovoľný objem Γ_0. V ňom je

$$N = \int_{\Gamma_0} \psi(\xi, t) \, d\Gamma$$

fázových bodov. Zmenu počtu fázových bodov N môže vyvolať iba ich výtok cez povrch Φ_0, ktorý ohraničuje objem Γ_0 (neuvažujeme chemické reakcie). Tento výtok sa skladá zo dvoch zložiek: zo zložky, ktorá pochádza od pohybu častíc pod vplyvom vonkajších síl, a od zložky, ktorú vyvoláva vzájomné pôsobenie medzi časticami, t. j. zrážky. Prvú zložku výtoku môžeme vyjadriť pomocou koncentrácie fázových bodov na ploche Φ_0 v tvare

$$\int_{\Phi_0} (\boldsymbol{u}\psi) \, . \, d\boldsymbol{\Phi},$$

kde $\boldsymbol{u} = \frac{d\xi}{dt} = \left(\alpha \boldsymbol{v}, \beta \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)$ je šesťrozmernou rýchlosťou [7] pohybu fázových bodov pod vplyvom vonkajších síl. Druhá zložka výtoku nezávisí len od koncentrácie fázových bodov na povrchu Φ_0, ale aj v jeho okolí [8]. Je to dôsledkom náhlej zmeny rýchlosti častíc počas zrážok. Preto zmenu počtu fázových bodov v objeme Γ_0 pod vplyvom zrážok medzi časticami vyjadríme formálne ako integrál

$$\int_{\Gamma_0} \left[\frac{\delta \psi}{\delta t}\right]_i d\Gamma,$$

kde $\left[\frac{\delta \psi}{\delta t}\right]_i$ charakterizuje zmenu ψ od vzájomného pôsobenia častíc. Potom zo zachovania počtu fázových bodov (častíc) vyplýva

$$\frac{dN}{dt} = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Gamma = -\int_{\Phi_0} (\boldsymbol{u}\psi) \, . \, d\boldsymbol{\Phi} + \int_{\Gamma_0} \left[\frac{\delta \psi}{\delta t}\right]_i d\Gamma.$$

Pomocou Gaussovej vety dostaneme

$$\int_{\Gamma_0} \left\{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\psi) - \left[\frac{\delta \psi}{\delta t}\right]_i\right\} d\Gamma = 0,$$

kde ∇ je nabla operátor v šesťrozmernom fázovom priestore so zložkami $\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_6}$, ktorý môžeme vyjadriť pomocou nabla operátora v obyčajnom priestore ∇_r a nabla operátora v rýchlostnom priestore ∇_v v zložkovom tvare

$$\nabla = \left(\frac{1}{\alpha} \nabla_r, \frac{1}{\beta} \nabla_v\right).$$

Ak uvážime, že Γ_0 je ľubovoľný objem, dostaneme rovnicu kontinuity pre fázové body

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\psi) = \left[\frac{\delta \psi}{\delta t}\right]_i.$$

Druhý člen na ľavej strane môžeme upraviť takto:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{u}\psi) = \left(\frac{1}{\alpha} \nabla_r, \frac{1}{\beta} \nabla_v\right) \cdot \left(\alpha \boldsymbol{v}\psi, \beta \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \psi\right) = \nabla_r \cdot (\boldsymbol{v}\psi) + \nabla_v \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \psi\right).$$

Ak $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ vyjadríme pomocou vonkajšej sily $\boldsymbol{F}$, v nerelativistickom prípade dostaneme výsledok

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{v} . \nabla_r \psi + \frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v \psi = \left[\frac{\delta \psi}{\delta t}\right]_i - \frac{1}{m} \psi \nabla_v . \boldsymbol{F},$$

pričom m je hmota častíc. Z formálnej stránky ešte upravíme túto rovnicu tak, že za funkciu ψ dosadíme funkciu $\alpha^{-3}\beta^{-3}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Po vynásobení obidvoch strán rovnice výrazom $\alpha^3\beta^3$ dostaneme konečný výsledok

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \left[\frac{\delta f}{\delta t}\right]_i - \frac{1}{m} f \nabla_v \cdot \mathbf{F}.$$

Vidíme, že oproti bežne používanému tvaru navyše vystupuje člen $-\frac{1}{m} f \nabla_v \cdot \mathbf{F}$. Nutná a postačujúca podmienka pre použitie kinetickej rovnice v tvare

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \left[\frac{\delta f}{\delta t}\right]_i,$$

je teda $\mathrm{div}_v \mathbf{F} = 0$. Okrem síl, ktoré explicitne nezávisia od rýchlosti, spĺňa túto podmienku aj Lorentzova sila $\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, pretože platí

$$\nabla_v \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla_v \times \mathbf{v}) = 0.$$

Takto odvodená kinetická rovnica by mohla nájsť uplatnenie napr. v prípade navzájom pôsobiacich častíc, pohybujúcich sa vo viskóznom prostredí.*

LITERATÚRA

[1] Ferraro V., Nuovo Cimento, Suppl. *13* (1959), 9.
[2] Hirschfelder J. O., Curtiss Ch. F., Bird R. B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York, London 1954.
[3] Chapman S., Cowling T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge 1952.
[4] Kracík J., *Úvod do teorie plazmatu I*. Praha 1960.
[5] Montgomery D. C., Tidman D. A., *Plasma Kinetic Theory*. Mc Graw — Hill Book Co., New York 1964.
[6] Oberman C., *Derivation of Macroscopic Equations*. Lectures presented at the Seminar on Plasma Physics, Trieste. Inter. Atomic Energie Agency, Vienna 1965.
[7] Сивухин Д. В., Вопросы теории плазмы *4*, Москва 1964.
[8] Трубников В. А., Вопросы теории плазмы *1*, Москва 1963.

Došlo 13. 12. 1966

Katedra experimentálnej fyziky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, Bratislava

* Vyjadrujem vďaku prof. dr. Š. Veisovi za jeho cenné pripomienky a kolegovi P. Lukáčovi za podnetnú diskusiu.

A NOTE ON THE DERIVATION OF BOLTZMANN KINETIC EQUATION IN THE CASE OF FORCES EXPLICITLY DEPENDENT ON THE VELOCITY OF THE PARTICLE

Viktor Martišovitš

Summary

The work presents the process of derivation of Boltzmann kinetic equation in the form which can be used also in the case of the forces explicitly dependent on the velocity of the particle. There is also given the necessary and sufficient condition, where the common form of the kinetic equation changes to the form usually used.