Fyzikálny časopis 17 (1967), No. 2

NIEKTORÉ VZŤAHY MEDZI MALÝMI A VEĽKÝMI MIERAMI POHYBU A DEFORMÁCIE V MECHANIKE KONTINUA*

RUDOLF PŘEVRÁTIL, Bratislava

ÚVOD

Problém, ktorým sa zaoberá tento článok, vznikol v priebehu výskumu možných tvarov fyzikálnych rovníc látky v klasickej mechanike kontinua. Zdá sa, že dostatočne všeobecná formulácia týchto rovníc si vyžaduje isté doplňujúce informácie o geometrii deformácie telesa. Ide predovšetkým o objasnenie spôsobu, akým sa okamžité zmeny tejto geometrie, ktoré nastanú v dôsledku pohybu telesa v krátkom časovom intervale $(t, t + \Delta t)$, skladajú do veľkých zmien, zapríčinených pohybom telesa v konečne veľkom časovom intervale (t_1, t_2). Čiastkové riešenie tejto otázky je v §§5, 6 tejto práce. Doteraz nie je jasné, či bude možné na základe tu uvedených vzťahov odvodiť akýkoľvek dostatočne všeobecný typ pohybových rovníc mechaniky kontinua. Odpoveď na túto otázku závisí od výsledkov ďalšieho výskumu.

V našich nasledujúcich úvahách vyjdeme zo všeobecne známych pojmov pohybu a deformácie telesa a ich tenzorových mier [1] [2]. Pri skúmaní týchto mier budeme používať dvojtenzorový počet [3] [4] [5]. Ďalej rozoberieme jeden typ derivácie dvojtenzorového poľa podľa času — tzv. substancionálnu deriváciu [6]. Spomínané miery zatriedime do dvoch skupín; budeme rozlišovať malé a veľké miery pohybu a deformácie. Rozbor vzťahov medzi nimi tvorí podstatnú časť tejto práce. Uvedené vzťahy možno opäť zatriediť do dvoch skupín: do skupiny vzťahov diferenciálneho typu a do skupiny vzťahov integrálneho typu. Vzťahy diferenciálneho typu sa zakladajú na definícii substanciálnej derivácie; vzťahy integrálneho typu vznikajú z predošlých správnym integrovaním.

§1. POHYB

Teleso $\mathfrak{B}$ je varieta izomorfná časti trojrozmerného euklidovského priestoru

* Tento článok je skráteným výpisom z časti autorovej kandidátskej dizertačnej práce, ktorá je súčasne záverečnou zprávou rezortnej výskumnej úlohy 15.01u, riešenej na Stavebnej fakulte SVŠT.

$\mathfrak{e}$ [1]. To okrem iného znamená, že jestvuje množina Φ jedno-jednoznačných zobrazení $\mathfrak{B}$ do $\mathfrak{e}$. Každé zobrazenie $\varphi \in \Phi$ sa volá konfigurácia telesa. Oblasť $B \subset \mathfrak{e}$, pre ktorú platí

$$B = \varphi(\mathfrak{B}), \tag{1.1}$$

je časť priestoru $\mathfrak{e}$, zaujatá telesom $\mathfrak{B}$ v konfigurácii φ. Nech je euklidovský priestor aritmetizovaný súradnou sústavou $\{x\}$. Potom možno analogicky k (1.1) písať

$$x^k = \varphi(\mathfrak{X}). \tag{1.2}$$

Symbol $\mathfrak{X}$ označuje tu časticu telesa $\mathfrak{B}$. Bod x^k je polohou častice $\mathfrak{X}$ v konfigurácii φ.

Pohyb je jednoparametrová sústava $\{\psi_t\}$ konfigurácií $\psi_t \in \Phi$ telesa $\mathfrak{B}$ [1]. Je vyjadrený rovnicou

$$x^k = \psi_t(\mathfrak{X}); \qquad t_1 \leq t < \infty. \tag{1.3}$$

Predpokladáme, že (1.3) má spojité parciálne derivácie podľa parametra t do dostatočne vysokého rádu. Parameter t sa volá čas.

Považujme teraz konfiguráciu ψ_1 v okamihu t_1 za základnú a uvažujme iný trojrozmerný euklidovský priestor $\mathfrak{E}$, do ktorého jedno-jednoznačne zobrazíme jedine túto konfiguráciu telesa. Nech je priestor $\mathfrak{E}$ aritmetizovaný súradnou sústavou $\{X\}$. Spomínané zobrazenie bude mať tvar

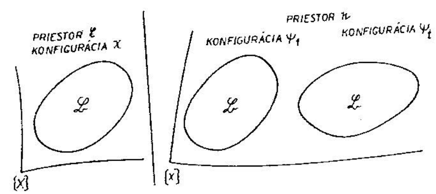
$$X^K = \chi(\mathfrak{X}); \qquad t = t_1. \tag{1.4}$$

Súradnice X^K slúžia na označovanie jednotlivých častíc telesa $\mathfrak{B}$. V dôsledku (1,4) možno namiesto „častica $\mathfrak{X}$" rovnakým právom povedať „častica X^K".

Takto zavedená predstava dvoch priestorov $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{e}$ alebo v zaužívanej terminológii dvojpriestoru $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{e}\}$ nám umožní použiť techniku dvojtenzorového počtu [3] [4] [5]. Vzniknutú situáciu schematicky v dvojrozmernom priestore znázorňuje obr. 1. Je zrejmé, že konfigurácie χ aj ψ_1 majú rovnaké geometrické vlastnosti. V dôsledku toho možno jednu konfiguráciu získať z druhej pomocou konečného paralelného prenosu (pozri [5] Sect. 16) z $\mathfrak{E}$ do $\mathfrak{e}$, resp. z $\mathfrak{e}$ do $\mathfrak{E}$.

Pohyb (1.3) teraz možno prepísať do tvaru

$$x^k = x^k(X^K, t); \qquad t_1 \leq t < \infty, \tag{1.5}$$



Obr. 1

ktorý má inverziu

$$X^K = X^K(x^k, t). \tag{1.6}$$

Rovnice (1.5) a (1.6) vyjadrujú homeomorfizmus medzi telesom $\mathfrak{B}$ a priestorom $\mathfrak{e}$. Tento homeomorfizmus závisí od času t a dá sa podľa neho spojito diferencovať.

Vďaka existencii homeomorfizmu (1.5), (1.6) možno pole ľubovoľnej veličiny opisujúcej pohyb telesa — čiže dvojtenzorové pole $Q^{K\ldots\, k\ldots}_{M\ldots\, m\ldots}(X^N, x^n, t)$ — vyjadriť ako funkciu nezávisle premenných dvoma spôsobmi:

$$Q^{K\ldots\, k\ldots}_{M\ldots\, m\ldots}(X^N, x^n, t) = Q^{K\ldots\, k\ldots}_{M\ldots\, m\ldots}(X^N, t) = Q^{K\ldots\, k\ldots}_{M\ldots\, m\ldots}(x^n, t). \tag{1.7}$$

Prvý z nich sa nazýva Lagrangeov spôsob opisu, druhý je Eulerov spôsob opisu. V tejto práci budeme zásadne používať Lagrangeov spôsob. Ak to nespôsobí nedorozumenia, budeme pri značení skúmanej veličiny pre úsporu miesta vynechávať nezávisle premenné X^N, t.

§2. MALÉ A VEĽKÉ MIERY POHYBU

Látková čiara $\mathfrak{L}$ (pozri [2] Sect. 20) je definovaná v konfigurácii χ v $\mathfrak{E}$ parametrickými rovnicami

$$X^K = X^K(\Theta). \tag{2.1}$$

Symbol Θ tu značí parameter čiary. Výraz „látková čiara" znamená, že táto čiara sa pohybuje s telesom v súhlase s (1.5), takže jej polohu v $\mathfrak{e}$ v okamihu t v konfigurácii ψ_t opisuje rovnica

$$x^k = x^k\,[X^K(\Theta), t] = x^k(\Theta, t). \tag{2.2}$$

Vektor

$$\mathrm{d}X^K = \frac{\mathrm{d}X^K}{\mathrm{d}\Theta}\,\mathrm{d}\Theta \tag{2.3}$$

sa volá lineárny látkový element. Rovnica (2.3) udáva jeho zložky v konfigurácii χ; pre konfiguráciu ψ_t môžeme písať

$$\mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^k}{\partial\Theta}\,\mathrm{d}\Theta. \tag{2.4}$$

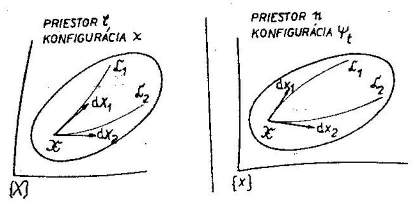
Na základe (2.2) môžeme písať rovnicu

$$\mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^K}\,\frac{\mathrm{d}X^K}{\mathrm{d}\Theta}\,\mathrm{d}\Theta = b^k_K\,\mathrm{d}X^K. \tag{2.5}$$

Dvojvektor

$$b^k_K(X^M, t) = \frac{\partial x^k(X^M, t)}{\partial X^K} \tag{2.6}$$

sa volá deformačný gradient. Tvorí dvojvektorové pole (pozri [5] Sect. 15), kovariantné v $\mathfrak{E}$ a kontravariantné v $\mathfrak{e}$.



Obr. 2

Predstavme si podľa obr. 2, že časticou $\mathfrak{X}$ vedieme sústavu látkových čiar $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ Tieto čiary tvoria sústavu lineárnych látkových elementov so spoločným počiatkom v $\mathfrak{X}$. Ich zložky v konfigurácii χ v $\mathfrak{E}$ budú $\mathrm{d}X^K_1, \mathrm{d}X^K_2, \ldots$; v konfigurácii ψ_t v $\mathfrak{e}$ budú ich zložky $\mathrm{d}x^k_1, \mathrm{d}x^k_2, \ldots$ zo vzťahov

$$\mathrm{d}x^k_1 = b^k_K\,\mathrm{d}X^K_1; \quad \mathrm{d}x^k_2 = b^k_K\,\mathrm{d}X^K_2; \ldots \tag{2.7}$$

vidieť, že zložky deformačného gradientu b^k_K, ktorý vystupuje v (2.5) a (2.7), sú vlastne koeficientmi afinnej transformácie okolia častice $\mathfrak{X}$ z konfigurácie χ do konfigurácie ψ_t.

Povedali sme už, že v počiatočnom okamihu t_1 má príslušná konfigurácia ψ_1 v $\mathfrak{e}$ rovnaké geometrické vlastnosti ako konfigurácia χ v $\mathfrak{E}$. V dôsledku toho pre deformačný gradient b^k_K v tomto okamihu platí

$$b^k_K(X^M, t_1) = a^k_K(X^M, t_1), \tag{2.8}$$

kde $a^k_K(X^M, t_1)$ je dvojvektor konečného paralelného prenosu kontravariantného vektora z bodu X^M v $\mathfrak{E}$ do bodu $x^m(X^M, t_1)$ v $\mathfrak{e}$ [3] [4] [5].

Pomocou deformačného gradientu b^k_K možno vyjadriť zmeny zložiek lineárneho látkového elementu, ktoré spôsobil pohyb v priebehu ľubovoľne dlhého časového intervalu (t_1, t). Budeme hovoriť, že deformačný gradient je veľkou mierou pohybu. Analogicky možno hovoriť o malej miere pohybu. Príkladom takej miery je vektor

$$v^k(X^K, t) = \frac{\partial x^k(X^K, t)}{\partial t},$$

nazývaný rýchlosť častice. Jeho pole, definované v $\mathfrak{e}$, je mierou okamžitého pohybového stavu telesa. Rovnica

$$x^k(X^K, t + \Delta t) = x^k(X^K, t) + v^k \Delta t \tag{2.10}$$

vyjadruje pomocou rýchlosti zmenu polohy častice, ktorá nastala v priebehu malého časového intervalu $(t, t + \Delta t)$.

§3. DEFORMÁCIA. VEĽKÉ MIERY DEFORMÁCIE

Pojem „deformácia“ sa v literatúre nechápe jednotne. V tejto práci budeme pod slovom deformácia rozumieť zmenu vnútorných metrických vlastností telesa, zapríčinenú pohybom telesa.

Nech g_{KM} a g_{km} sú metrické tenzory v $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{e}$. Ich zložky a zložky konečného paralelného prenosu sú späté vzťahmi

$$g_{km}(x^n) = a^K_k(X^N, t)\, a^M_m(X^N, t)\, g_{KM}(X^N), \tag{3.1}$$

$$g_{KM}(X^N) = a^k_K(X^N, t)\, a^m_M(X^N, t)\, g_{km}(x^n).$$

Podobne ako v §2, $a^k_K(X^N, t)$ sú zložky konečného paralelného prenosu kontravariantného (kovariantného) vektora z bodu X^N v $\mathfrak{E}$ (x^n v $\mathfrak{e}$) do bodu $x^N(X^n, t)$ v $\mathfrak{e}$ ($X^N(x^n, t)$ v $\mathfrak{E}$). Symboly typu $a^K_k(X^N, t)$ značia zložky paralelného prenosu kovariantného (kontravariantného) vektora z bodu X^N v $\mathfrak{E}$ (x^n v $\mathfrak{e}$) do bodu $x^n(X^N, t)$ v $\mathfrak{e}$ ($X^N(x^n, t)$ v $\mathfrak{E}$) [3] [4] [5]. Ak považujeme metrické tenzory g_{KM}, g_{km} za dané, rovnice (3.1) sú definičnými rovnicami pre zložky paralelného prenosu.

Nech je $\mathrm{d}S$ dĺžka lineárneho látkového elementu $\mathrm{d}X^K$ v konfigurácii χ, $\mathrm{d}s$ dĺžka lineárneho látkového elementu v konfigurácii ψ_t. Zrejme pre ne platí

$$\mathrm{d}S^2 = g_{KM}\, \mathrm{d}X^K\, \mathrm{d}X^M; \qquad \mathrm{d}s^2 = g_{km}\, \mathrm{d}x^k\, \mathrm{d}x^m. \tag{3.2}$$

Ak dosadíme do (3.2) vzťah (2.5), dostaneme

$$\mathrm{d}s^2 = g_{km}\, b^k_K\, b^m_M \mathrm{d}X^K\, \mathrm{d}X^M = C_{KM}\, \mathrm{d}X^K\, \mathrm{d}X^M. \tag{3.3}$$

Symetrický tenzor druhého rádu

$$C_{KM}(X^N, t) = g_{km}(x^n(X^N, t))\, b^k_K(X^N, t)\, b^m_M(X^N, t) \tag{3.4}$$

sa volá Greenov tenzor deformácie. Na základe (3.2) a (3.3) možno ďalej písať

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = (C_{KM} - g_{KM})\, \mathrm{d}X^K\, \mathrm{d}X^M = E_{KM}\, \mathrm{d}X^K\, \mathrm{d}X^M. \tag{3.5}$$

Symetrický tenzor druhého rádu

$$E_{KM}(X^N, t) = C_{KM}(X^N, t) - g_{KM}(X^N) \tag{3.6}$$

sa volá St. Venantov tenzor deformácie. Obidva spomínané tenzory tvoria polia v $\mathfrak{E}$. Sú mierou deformácie, lebo udávajú zmeny metrických vlastností

telesa (dĺžok lineárnych látkových elementov). Analogicky k pojmom zavedeným v §2 možno povedať, že sú to veľké miery deformácie, lebo sú odvodené z deformačných gradientov, veľkých mier pohybu. Logicky vzniká otázka, čo je malou mierou deformácie. Na jej vyjasnenie bude treba preskúmať derivovanie tenzorových a dvojtenzorových polí podľa času.

§4. SUBSTANCIÁLNA DERIVÁCIA

Majme dvojtenzorové pole $Q^{K\dots k\dots}_{M\dots m\dots}(X^R, x^r, t)$, definované v dvojpriestore $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{e}\}$ (pozri [5] Sect. 15), pričom medzi bodmi x^r, X^R priestorov $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{E}$ platí homeomorfizmus

$$x^r = x^r(X^R, t); \qquad X^R = X^R(x^r, t). \tag{4.1}$$

Hľadáme deriváciu tohto poľa podľa času, pričom ide o deriváciu z hľadiska pozorovateľa pohybujúceho sa spolu so zvolenou časticou $\mathfrak{X}$, teda pri konštantnom X^R. Podľa pravidla o derivovaní zložených funkcií by táto derivácia mala mať tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q^{K\dots k\dots}_{M\dots m\dots} = \frac{\partial}{\partial t} Q^{K\dots k\dots}_{M\dots m\dots}\Big|_{X^R,\, x^r = \text{const}} + \frac{\partial\, x^n(X^R, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x^n} Q^{K\dots k\dots}_{M\dots m\dots}\Big|_{X^R,\, t = \text{const.}} \tag{4.2}$$

Tento výraz má však závažný nedostatok: posledný výraz na jeho pravej strane nie je tenzorom. Tento nedostatok možno ľahko odstrániť podobným spôsobom, ako sa to robí v obvyklej tenzorovej analýze: namiesto parciálnej derivácie dvojtenzora podľa súradnice x^n v $\mathfrak{e}$ použijeme parciálnu kovariantnú deriváciu v $\mathfrak{e}$ (pozri [5] Sect. 18). Dostaneme tak substanciálnu deriváciu dvojtenzorového poľa podľa času (pozri [2] Sect. 72, [6], kde sa používa názov „material derivative“):

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} Q^{K\dots k\dots}_{M\dots m\dots} = \frac{\partial}{\partial t} Q^{K\dots k\dots}_{M\dots m\dots}\Big|_{X^R,\; x^r = \text{const.}} + v^n Q^{K\dots k\dots}_{M\dots m\dots;n}. \tag{4.3}$$

Použili sme pritom definíciu rýchlosti (2.9). Možno sa ľahko presvedčiť, že substanciálna derivácia má tieto základné vlastnosti:

a) je homogénnou a lineárnou funkciou derivovaného dvojtenzora;
b) platí pre ňu Leibnizovo pravidlo o derivovaní súčinu;
c) je dvojtenzorom rovnakého typu ako derivovaný dvojtenzor;
d) substanciálna derivácia metrických tenzorov g_{KM} a g_{km} sa rovná nule.

Ak je pole zapísané Lagrangeovým spôsobom tak, ako sme o tom hovorili v §1, možno sa ľahko presvedčiť, že bude platiť

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} Q^{K\ldots\, k\ldots}_{M\ldots\, m\ldots} = \frac{\partial}{\partial t} Q^{K\ldots\, k\ldots}_{M\ldots\, m\ldots}\Big|_{X^R = \text{const}} + $$
$$+ (\Gamma^k_{np}\, Q^{K\ldots\, p\ldots}_{M\ldots\, m\ldots} + \ldots - \Gamma^p_{nm}\, Q^{K\ldots\, k\ldots}_{M\ldots\, p\ldots} - \ldots)\, v^n, \tag{4.4}$$

kde Γ^k_{np} je Christoffelov symbol druhého druhu, definovaný vzťahom

$$\Gamma^k_{np} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\frac{\partial g_{rn}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{np}}{\partial x^r} \right). \tag{4.5}$$

Uvažujme obyčajné tenzorové pole $Q^{K\ldots}_{M\ldots}(X^R)$ v $\mathfrak{E}$, ktoré závisí len od súradníc X^R. Z (4.4) pre také pole vyplýva

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} Q^{K\ldots}_{M\ldots}(X^R) = 0 \tag{4.6}$$

pre všetky indexy K a M.

§ 5. MALÁ MIERA DEFORMÁCIE. DIFERENCIÁLNE VZŤAHY MEDZI MALÝMI A VEĽKÝMI MIERAMI POHYBU A DEFORMÁCIE

Odvodíme najprv výraz pre substanciálnu deriváciu deformačného gradientu. Derivovaním vzťahu (2.6) podľa (4.4) dostaneme

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} b^k_K = \frac{\partial^2 x^k(X^M, t)}{\partial X^K\, \partial t} + \Gamma^k_{mp} \frac{\partial x^m(X^M, t)}{\partial X^K} v^p. \tag{5.1}$$

Túto rovnicu možno pomocou definície rýchlosti (2.9) a definície kovariantnej derivácie napísať po úprave v tvare

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} b^k_K = b^m_K\, v^k{}_{,m}. \tag{5.2}$$

Kovariantná derivácia $v^k{}_{,m}$ poľa rýchlosti v^k, ktorá tu vystupuje, volá sa gradient rýchlosti. Podobne ako rýchlosť je to malá miera pohybu.

Pomocou (5.2) možno substanciálne zderivovať (3.3). Ak vezmeme do úvahy vlastnosti substanciálnej derivácie, o ktorých sme hovorili v §4, môžeme písať

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t}(\mathrm{d}s^2) = g_{km}(b^n_K\, b^m_M\, v^k{}_{,n} + b^k_K\, b^n_M\, v^m{}_{,n})\, \mathrm{d}X^K\, \mathrm{d}X^M. \tag{5.3}$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t}(\mathrm{d}s^2) = 2\, d_{km}\, b^k_K\, b^m_M\, \mathrm{d}X^K\, \mathrm{d}X^M = 2\, d_{km}\, \mathrm{d}x^k\, \mathrm{d}x^m. \tag{5.4}$$

Tenzor

$$d_{km} = \frac{1}{2}(v_{k,m} + v_{m,k}), \tag{5.5}$$

ktorý je symetrickou časťou kovariantnej reprezentácie gradientu rýchlosti, volá sa tenzor rýchlosti deformácie. Keďže udáva rýchlosť zmeny dĺžky lineárneho látkového elementu a možno ho vypočítať z poľa rýchlostí, ide o malú mieru deformácie.

Možno rozlišovať dva typy vzťahov medzi malými a veľkými mierami pohybu a deformácie: diferenciálne a integrálne. V tomto paragrafe budeme hovoriť o diferenciálnych vzťahoch. Diferenciálnym vzťahom medzi malou a veľkou mierou pohybu je vlastne rovnica (5.2). Odvodíme ešte jednu rovnicu, ktorá je jej dôsledkom. Substanciálnym derivovaním vzťahu

$$\mathrm{d}x^k = b^k_K\, \mathrm{d}X^K \tag{5.6}$$

medzi lineárnymi látkovými elementmi v konfiguráciách φ a ψ_t dostaneme na základe výsledkov §4

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} \mathrm{d}x^k = b^m_K\, v^k{}_{,m}\, \mathrm{d}X^K = v^k{}_{,m}\, \mathrm{d}x^m \tag{5.7}$$

O význame tejto rovnice budeme hovoriť v nasledujúcom paragrafe.

Substanciálnym derivovaním rovnice (3.4) možno získať diferenciálny vzťah medzi malou a veľkou mierou deformácie. Pre deriváciu Greenovho tenzora C_{KM} platí

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} C_{KM} = g_{km}(b^n_K\, b^m_M\, v^k{}_{,n} + b^k_K\, b^n_M\, v^m{}_{,n}), \tag{5.8}$$

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} C_{KM} = 2\, d_{km}\, b^k_K\, b^m_M. \tag{5.9}$$

Vzhľadom na to, že substanciálna derivácia metrického tenzora g_{KM} sa rovná nule, platí pre St. Venantov tenzor deformácie E_{KM} podobne

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} E_{KM} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} C_{KM} = 2\, d_{km}\, b^k_K\, b^m_M. \tag{5.10}$$

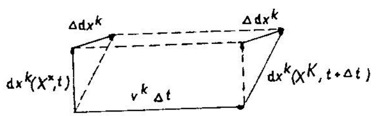
§6. GEOMETRICKÝ VÝZNAM SUBSTANCIÁLNEJ DERIVÁCIE. INTEGRÁLNE VZŤAHY MEDZI MALÝMI A VEĽKÝMI MIERAMI POHYBU A DEFORMÁCIE

Vynásobením rovnice (5.7) diferenciálom času Δt dostaneme výraz pre diferenciál lineárneho látkového elementu:

$$\Delta \mathrm{d}x^k = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t}(\mathrm{d}x^k)\Delta t = v^k{}_{,m}\mathrm{d}x^m\,\Delta t. \tag{6.1}$$

Geometrický výklad tohto vzťahu je jednoduchý, ak si uvedomíme, že v definícii (4.3) vystupuje okrem parciálnej derivácie podľa času aj kovariantná derivácia derivovaného poľa. Lineárny látkový element, vystupujúci v (5.7), nech má v okamihu t počiatok v bode P so súradnicami $x^k(X^K, t)$ a zložky $\mathrm{d}x^k(X^K, t)$; v okamihu $t + \Delta t$ má počiatok v bode P' so súradnicami $x^k(X^K, t +$ $+ \Delta t) = x^k(X^K, t) + v^k\,\Delta t$ a zložky $\mathrm{d}x^k(X^K, t + \Delta t)$ tak, ako to znázorňuje obr. 3. Zložky týchto lineárnych látkových elementov sú dané v odlišných lokálnych súradných bázach; zložky prvého v báze s počiatkom v P a zložky druhého v báze a počiatkom v P'. Zo známych vlastností kovariantnej derivácie vyplýva, že zložky diferenciálu $\Delta \mathrm{d}x^k$ sú rozdielmi zložiek dvoch už spomínaných látkových elementov v jednej a tej istej lokálnej báze. Na ich výpočet sme použili operáciu paralelného prenosu jedného z lineárnych látkových elementov z P do P', alebo v opačnom smere, nachádzajúcu sa v kovariantnej derivácii. V jednej a tej istej súradnej báze teda platí

$$\mathrm{d}x^k(X^K, t + \Delta t) = \mathrm{d}x^k(X^K, t) + \Delta \mathrm{d}x^k. \tag{6.2}$$



Obr. 3

Podobný vzťah platí aj pre všeobecné dvojtenzorové pole $Q^{K\ldots\ k\ldots}_{M\ldots\ m\ldots}(X^N, t)$:

$$Q^{K\ldots\ k\ldots}_{M\ldots\ m\ldots}(X^N, t + \Delta t) = Q^{K\ldots\ k\ldots}_{M\ldots\ m\ldots}(X^N, t) + \frac{\mathfrak{d}Q^{K\ldots\ k\ldots}_{M\ldots\ m\ldots}}{\mathfrak{d}t}\Delta t. \tag{6.3}$$

Rovnice typu (6.2) a (6.3) nám umožnia formulovať integrálne vzťahy medzi malými a veľkými mierami pohybu a deformácie.

Na prvý pohľad sa zdá, že na základe (6.2) by bolo možné písať

$$\mathrm{d}x^k(X^K, t_2) = \mathrm{d}x^k(X^K, t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \Delta \mathrm{d}x^k(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.4}$$

Táto rovnica je však chybná: sčítajú sa tu zložky lineárnych látkových elementov, resp. integrujú sa ich diferenciály zadané v rôznych súradných bázach. Preto rovnica (6.4) nemá tenzorový charakter a nie je objektívna napr. v zmysle [1]. Spomínanú chybu možno odstrániť tým, že všetky veličiny vystupujúce na pravej strane (6.4) prenesieme paralelne v $\mathfrak{e}$ z bodu, v ktorom sú zadané, napr. do bodu $x^k(X^K, t_2)$ a až tam vykonáme sčítanie a integrovanie.

Nebudeme tu podrobne uvádzať teóriu konečnéhoparalelného prenosu v $\mathfrak{e}$ [3] [4] [5]. Uspokojíme sa s konštatovaním, že ak je v bode $x^k(X^K, t_1)$ definovaný kontravariantný vektor A^k, potom v bode $x^k(X^K, t_2)$ budeme mať ten istý vektor, paralelne sem prenesený z prvého bodu zložky $\overline{A}^k$, pre ktoré platí

$$\overline{A}^k = a^k_m(t_1, t_2)\,A^m. \tag{6.5}$$

Symbol $a^k_m(t_1, t_2)$ značí zložky konečného paralelného prenosu kontravariantného vektora z bodu $x^k(X^K, t_1)$ do bodu $x^k(K^K, t_2)$.

Vzťah (6.4) možno teraz napísať korektne takto:

$$\mathrm{d}x^k(X^K, t_2) = a^k_m(t_1, t_2)\,\mathrm{d}x^m(X^K, t_1) + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} a^k_n(\tau, t_2)\,v^n{}_{,m}\,(X^K, \tau)\,\mathrm{d}x^m(X^K, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{6.6}$$

pričom sme rozpísali výraz pre $\Delta \mathrm{d}x^k$ podľa (6.1). Na základe vzťahov (2.5) a (6.6) možno analogicky pre deformačný gradient písať

$$b^k_K(X^K, t_2) = a^k_m(t_1, t_2)\,b^m_K(X^K, t_1) + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} a^k_n(\tau, t_2)\,v^n{}_{,m}\,(X^K, \tau)\,b^m_K(X^K, \tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.7}$$

To je integrálny vzťah medzi malou a veľkou mierou pohybu.

Podobným postupom možno integrovať napr. rovnicu

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t}E_{KM} = 2\,d_{km}\,b^k_K\,b^m_M. \tag{6.8}$$

Tu sa však netreba starať o paralelný prenos v $\mathfrak{e}$, lebo integrovaná funkcia je v tomto priestore skalárom. Možno teda priamo napísať

$$E_{KM}(X^N, t_2) = E_{KM}(X^N, t_1) + 2\int\limits_{t_1}^{t_2} d_{km}(X^N, \tau)\,b^k_K(X^N, \tau)\,.\,b^m_M(X^N, \tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.9}$$

Tento vzťah možno ešte upraviť. Podľa (3.6) platí

$$E_{KM}(X^N, t_1) = C_{KM}(X^N, t_1) - g_{KM}(X^N). \tag{6.10}$$

Avšak podľa (2.8), (3.1) a (3.4) platí v tomto okamihu

$$C_{KM} = g_{km}\, a_K^k\, a_M^m = g_{KM}\,, \tag{6.11}$$

pričom všetky veličiny v tejto rovnici sa vzťahujú na body X^N a $x^n(X^N, t_1)$. V dôsledku toho

$$E_{KM}(X^N, t_1) = 0 \tag{6.12}$$

pre každé K a M. Vzťah (6.10) teda možno prepísať na tvar

$$E_{KM}(X^N, t_2) = 2\int_{t_1}^{t_2} d_{km}(X^N, \tau)\, b_K^k(X^N, \tau)\, b_M^m(X^N, \tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{6.13}$$

Vzťah (6.13) je integrálnym vzťahom medzi malou mierou deformácie d_{km} a veľkou mierou deformácie E_{KM}. Jeho zmysel spočíva v tom, že ukazuje, ako veľké miery deformácie narastajú postupným integrovaním malých mier.

LITERATÚRA

[1] Noll W., *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics. The axiomatic method.* Procedigs of international symposium. North — Holand. P. C., Amsterdam 1959.

[2] Truesdell C., Toupin R., *The classical field theories.* Encyclopedia of physics, Vol. III/1. Springer, Berlin 1960.

[3] Einstein A., Bargmann V., Annals of marhematics *45* (1944), No. 1.

[4] Einstein A., Annals of mathematics, *45* (1944), No. 1.

[5] Ericksen J. L., *Tensor fields.* Encyclopedia of physics, Vol. III/1. Springer, Berlin 1960.

[6] Guo Zhong — Heng. Archiwum mechaniki stosowanej *15* (1963), No. 1.

Došlo 3. 2. 1966

Katedra stavebnej mechaniky
Stavebnej fakulty SVŠT,
Bratislava

SOME RELATIONS BETWEEN SMALL AND LARGE MEASURES OF MOTION AND DEFORMATION IN THE MECHANICS OF CONTINUA

Rudolf Převrátil, Bratislava

Summary

Some relations between tensorial geometrical mesaures of motion and deformation of a body are treated in this paper. The double-tensor technics is adopted for this treatment. All the measures considered are divided into two groups. The first one, the group of small measures, contains the measures of the geometrical changes of a body that are caused by motion during a short time period $(t, t + \Delta t)$. The second one, the group of large measures, consists of the measures of the geometrical changes that take place during a finite time period (t_1, t_2). Certain differential and integral relations between these two groups are then investigated. It is the task of further research to investigate the usefulness of these relations in constructing some general types of the equations of motion of continua.