Fyzikálny časopis 17 (1967), No. 1

USTAĽOVANIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POĽA PRE LICHOBEŽNIKOVÝ PRÚDOVÝ IMPULZ

SILVESTER KRAJČOVIČ, Bratislava

V geofyzikálnom výskume má v poslednom čase veľký význam štúdium časovo-priestorového rozloženia elektromagnetických polí, vyvolaných v horných vrstvách zemskej kôry pomocou prirodzených alebo umelých zdrojov. Cieľom tejto práce je odvodenie teoretických vzorcov pre ustaľovanie elektromagnetického poľa, vyvolaného elektrickým dipólom nachádzajúcim sa v nekonečnom homogénnom a izotropnom prostredí, ktoré je charakterizované špecifickou elektrickou vodivosťou σ, dielektrickou konštantou ε a magnetickou permeabilitou μ.

Nech je dipól sýtený periodicky sa opakujúcim prúdovým impulzom, ktorý má tvar nerovnoramenného lichobežníka (obr. 1). Máme určiť časovo-priestorové rozloženie elektromagnetického poľa v ľubovolnom bode priestoru, okrem počiatku sférických súradníc, kde sa nachádza elektrický dipól (obr. 2) a kde má pole singularitu.

Označme na obr. 1 podľa [1] vzorce pre prúdové impulzy v jednotlivých intervaloch:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= 0 && 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\
i(t) &= \frac{E}{\alpha}(t - \tau_1), && \tau_1 \leqslant t \leqslant (\tau_1 + \alpha), \\
i(t) &= E, && (\tau_1 + \alpha) \leqslant t \leqslant (\tau_2 - \beta), \\
i(t) &= -\frac{E}{\beta}(t - \tau_2), && (\tau_2 - \beta) \leqslant t \leqslant \tau_2, \\
i(t) &= 0, && \tau_2 \leqslant t \leqslant \tau,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

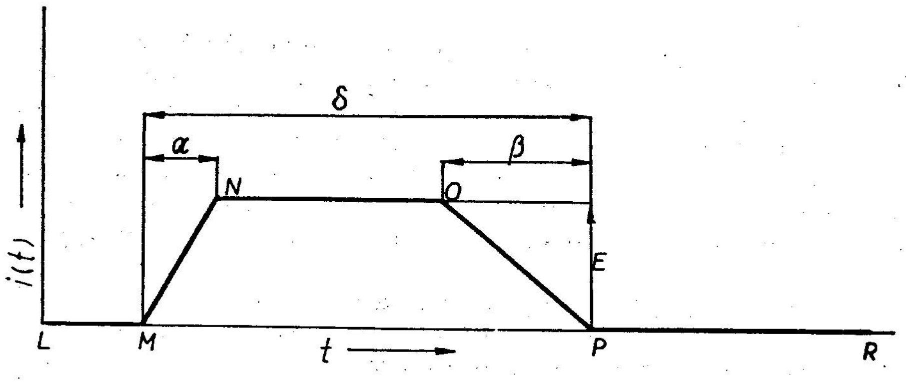
dostaneme po určení príslušných koeficientov a_n, b_n Fourierovho radu, v ktorom je ako τ označená perióda prúdového impulzu, vzorec:

$$
i(t) = E\frac{\delta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4E}{\tau} \frac{1}{k^2(\pi/\tau)^2} \left\{ \left[\frac{1}{\beta} \sin\frac{\pi}{\tau}\left(\tau_2 - \frac{\beta}{2}\right) \sin k\frac{\pi}{\tau} \times \right.\right.
$$

$$\times \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\alpha} \sin k \frac{\pi}{\tau} \left(\tau_1 + \frac{\alpha}{2} \right) \sin k \frac{\pi}{\tau} \frac{\alpha}{2} \Bigg] \cos k \frac{\pi}{\tau} t +$$

$$+ \left[\frac{1}{\alpha} \sin k \frac{\pi}{\tau} \frac{\alpha}{2} \cos k \frac{\pi}{\tau} \left(\tau_1 + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{\beta} \sin k \frac{\pi}{\tau} \frac{\beta}{2} \cos k \frac{\pi}{\tau} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\tau_2 - \frac{\beta}{2} \right) \right] \sin k \frac{\pi}{\tau} t \Bigg\}. \tag{2}$$



LM=τ1 ; LN=τ1+α ; LO=τ2-β ; LP=τ2 ; LR=τ ;

Obr. 1.

Zaveďme teraz kvôli jednoduchosti označenia:

$$E \frac{\delta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tau} = \frac{A_0}{2},$$

$$\frac{4E}{\tau} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\tau}\right)^2} \left[\frac{1}{\beta} \sin \frac{k\pi}{\tau} \left(\tau_2 - \frac{\beta}{2} \right) \sin \frac{k\pi}{\tau} \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\alpha} \sin \frac{k\pi}{\tau} \left(\tau_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{k\pi}{\tau} \frac{\alpha}{2} \right] = A_k, \tag{3}$$

$$\frac{4E}{\tau} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\tau}\right)^2} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \frac{k\pi}{\tau} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{k\pi}{\tau} \left(\tau_1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) - \frac{1}{\beta} \sin \frac{k\pi}{\tau} \frac{\beta}{2} \cos \frac{k\pi}{\tau} \times \right.$$

$$\times \left(\tau_2 - \frac{\beta}{2} \right) \right] = B_k,$$

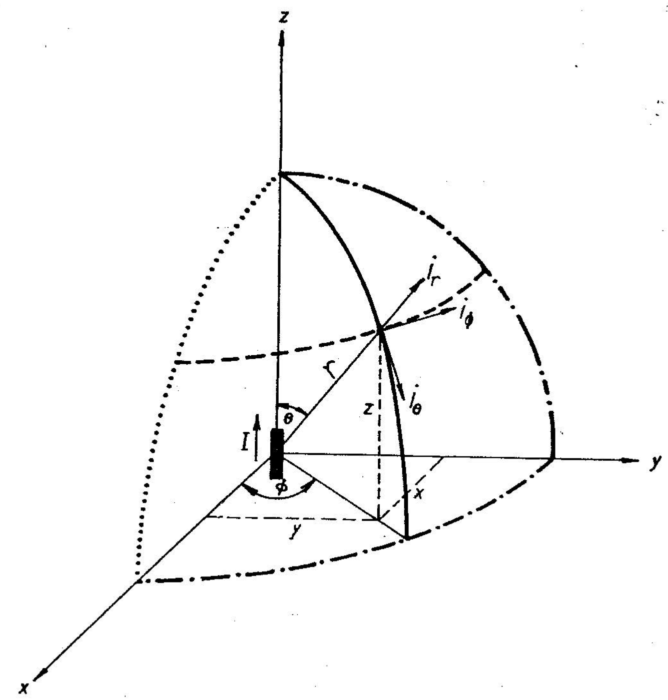
potom môžeme rovnicu (2) prepísať takto:

$$i(t) = \frac{A_0}{2} + A_k \cos \frac{k\pi}{\tau} t + B_k \sin \frac{k\pi}{\tau} t. \tag{4}$$

Laplaceova transformácia tejto rovnice má tvar:

$$i(p) = \frac{A_0}{2} \frac{1}{p} + A_k \frac{p}{p^2 + \left(\frac{k\pi}{\tau}\right)^2} + B_k \frac{\frac{k\pi}{\tau}}{p^2 + \left(\frac{k\pi}{\tau}\right)^2}. \tag{5}$$

Pre vertikálny elektrický dipól, umiestený v nekonečnom priestore, charakterizovanom uvedenými konštantami, dostaneme pre nenulové zložky elektromagnetického poľa (všetky výpočty sa budú robiť v sústave MKS) podľa [2] tieto rovnice:



Obr. 2.

$$e_r(p) = \frac{i(p)\,\mathrm{d}l}{2\pi\sigma r^3}\,[1 + \alpha p^{1/2}]\cos\Theta \exp(-\alpha p^{1/2}),$$

$$e_\Theta(p) = \frac{i(p)\,\mathrm{d}l}{4\pi\sigma r^3}\,[1 + \alpha p^{1/2} + \alpha^2 p]\sin\Theta \exp(-\alpha p^{1/2}), \tag{6}$$

$$h_\varphi(p) = \frac{i(p)\,\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\,[1 + \alpha p^{1/2}]\sin\Theta \exp(-\alpha p^{1/2}),$$

kde je označené $\alpha^2 = \sigma\mu r^2$, $\mathrm{d}l$ je dĺžka elementárneho dipóla, kým $i(p)$ je obraz prúdového impulzu, definovaný v našom prípade rovnicou (5).

V prvom štádiu určíme originál pre radiálnu zložku elektrického poľa, pre ktorú — vzhľadom na rovnice (5) a (6) máme:

$$e_r(p) = \frac{\mathrm{d}l}{2\pi\sigma r^3}\cos\Theta\,[\exp(-\alpha p^{1/2}) + \alpha p^{1/2}\exp(-\alpha p^{1/2})] \times$$

$$\times\left[\frac{A_0}{2}\frac{1}{p} + A_k\frac{p}{p^2 + \left(\frac{k\pi}{\tau}\right)^2} + B_k\frac{\frac{k\pi}{\tau}}{p^2 + \left(\frac{k\pi}{\tau}\right)^2}\right]. \tag{6a}$$

Označme kvôli jednoduchosti: $\dfrac{\mathrm{d}l\cos\Theta}{2\pi\sigma r^3} = C$; $\dfrac{k\pi}{\tau} = \omega_k$ a vypíšme všetkých šesť rovníc, ktoré dostaneme zo (6a) v tvaroch:

$$\{e_r(p)\}_1 = \frac{CA_0}{2}\,\frac{\exp(-\alpha p^{1/2})}{p},$$

$$\{e_r(p)\}_2 = CA_k\,\frac{p\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2},$$

$$\{e_r(p)\}_3 = CB_k\,\frac{\omega_k\exp(-\alpha\, p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2},$$

$$\{e_r(p)\} = \frac{CA_0}{2}\,\frac{\alpha\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^{1/2}},$$

$$\{e_r(p)\}_5 = CA_k\,\frac{\alpha p^{3/2}\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2},$$

$$\{e_r(p)\}_6 = CB_k\,\frac{\omega k p^{1/2}\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2}. \tag{7}$$

Teraz máme určiť originály obrazov, definovaných rovnicami (7). Pretože ďalej budeme používať tabuľky uvedené v [3], ktoré sú vypočítané pre Carson-Laplaceovo zobrazenie, musíme vynásobiť rovnice (7) výrazom p a tak dostaneme:

$$\frac{CA_0}{2}\exp(-\alpha p^{1/2}) \doteqdot \frac{CA_0}{2}\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2t^{1/2}}, \tag{8}$$

$$\frac{CA_0}{2}\alpha p^{1/2}\exp(-\alpha p^{1/2}) \doteqdot \frac{CA_0}{2}\alpha(\pi t)^{-1/2}\exp(-\alpha^{3/2}/4t), \tag{9}$$

$$\{e_r(p)\}_2 = CA_k\,\frac{p^2\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2}, \tag{10}$$

$$\{e_r(p)\}_3 = CB_k\,\frac{\omega_k p\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2}, \tag{11}$$

$$\{e_r(p)\}_5 = CA_k\,\frac{\alpha p^{5/2}\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2}, \tag{12}$$

$$\{e_r(p)\}_6 = CB_k\,\frac{\alpha\omega_k\, p^{3/2}\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2}. \tag{13}$$

Ako vidieť, dostali sme výrazy pre dva originály priamo, kým výrazy pre zvyšujúce štyri originály musíme určiť iným spôsobom. Využijeme vetu o originále súčinu dvoch Carson-Laplaceových zobrazení [3]:

$$f(p)g(p) \doteqdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(t-\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{14}$$

a môžeme napísať:

$$CA_k\,\frac{p^2\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2 + \omega_k^2} \doteqdot CA_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \cos\omega_k(t-\xi)\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= -CA_k\omega_k\int_0^t \sin\omega_k(t-\xi)\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi + CA_k\omega_k\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}, \tag{10a}$$

$$CB_k \frac{\omega_k p \exp(-\alpha p^{12})}{p^2+\omega_k^2} \doteq CB_k\omega_k \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\sin\omega_k(t-\xi)}{\omega_k} \operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}\,d\xi =$$

$$= CB_k\omega_k \int_0^t \cos\omega_k(t-\xi) \operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}\,d\xi, \qquad (11a)$$

$$CA_k\alpha \frac{p^{5/2}\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2+\omega_k^2} \doteq CA_k\alpha \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\sin\omega_k(t-\xi)}{\omega_k} \times$$

$$\times \frac{1}{2\xi}\left[\frac{\alpha^2}{2\xi}-1\right]\exp(-\alpha^2/4\xi)\frac{d\xi}{(\pi\xi)^{1/2}} = CA_k\alpha\int_0^t \cos\omega_k(t-\xi)\times$$

$$\times \frac{\alpha^2-2\xi}{4\pi^{1/2}\xi^{5/2}}\exp(-\alpha^2/4\xi)\,d\xi, \qquad (12a)$$

$$CB_k\alpha\omega_k \frac{p^{3/2}\exp(-\alpha p^{1/2})}{p^2+\omega_k^2} \doteq CB_k\alpha\omega_k \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\sin\omega_k(t-\xi)}{\omega_k} \times$$

$$\times \exp(-\alpha/4\xi)\frac{d\xi}{(\pi\xi)^{1/2}} = CB_k\alpha\omega_k\int_0^t \cos\omega_k(t-\xi)\exp(-\alpha/4\xi)\frac{d\xi}{(\pi\xi)^{1/2}}. \qquad (13a)$$

Týmito rovnicami máme určené všetky potrebné vzorce pre časovo-priestorové rozloženie radiálnej zložky elektrického poľa, pričom pri posledných vzorcoch pri riešení konkrétnej úlohy bude treba uskutočniť numerický výpočet integrálov.

Ďalšou etapou je určenie originálov pre meridiánovú zložku elektrického poľa. Ak porovnáme rovnicu pre $e_\Theta(p)$ a pre $e_r(p)$ sústavy (6), ľahko zistíme, že vzorce pre $e_\Theta(p)$ budú rovnaké ako vzorce (8), (9), (10a), (11a), 12a() a (13a), až nato, že namiesto konštanty C treba do vzorcov zaviesť konštantu $C^* = \sin\Theta\, dl/4\pi\sigma r^3$, nemusíme ich preto odvodzovať. Zostanú nám teda len tri vzorce, ktoré majú tvary:

$$\frac{C^*A_0}{2}\alpha^2\exp(-\alpha p^{1/2}), \qquad (15)$$

$$C^*A_k\alpha^2\frac{p^3}{p^2+\omega_k^2}\exp(-\alpha p^{1/2}), \qquad (16)$$

$$C^*B_k\alpha^2\omega_k\frac{p^2}{p^2+\omega_k^2}\exp(-\alpha p^{1/2}), \qquad (17)$$

kde sme — podobne ako v predošlom odstavci — vynásobili vzorce výrazom p. Pre vzorec (15) máme:

$$\frac{C^*A_0}{2}\alpha^2 p\exp(-\alpha p^{1/2}) \doteq \frac{\alpha}{2\pi^{1/2}t^{3/2}}\exp(-\alpha^2/4t). \qquad (15a)$$

Vzorec (16) môžeme prepísať takto:

$$C^*A_k\alpha^2\frac{p^2}{p^2+\omega_k^2}p\exp(-\alpha p^{1/2}) \doteq C^*A_k\alpha^2\frac{d}{dt}\int_0^t\cos\omega_k(t-\xi)\times$$

$$\times\frac{\alpha}{2\pi^{1/2}\xi^{3/2}}\exp(-\alpha^2/4\xi)\,d\xi = -C^*A_k\alpha^3\omega_k\int_0^t\sin\omega_k(t-\xi)\frac{\exp(-\alpha^2/4\xi)}{2\pi^{1/2}\xi^{3/2}}\,d\xi +$$

$$+ C^*A_k\frac{\alpha^3\exp(-\alpha^2/4\xi)}{2\pi^{1/2}\xi^{3/2}}. \qquad (16a)$$

Konečne vzorec (17) prepíšeme takto:

$$C^*B_k\alpha^2\omega_k\frac{p^2}{p^2+\omega_k^2}\exp(-\alpha p^{1/2}) \doteq C^*B_k\alpha^2\omega_k\frac{d}{dt}\int_0^t\cos\omega_k(t-\xi)\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}\,d\xi =$$

$$= -C^*B_k\alpha^2\omega_k^2\int_0^t\sin\omega_k(t-\xi)\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}\,d\xi + C^*B_k\alpha^2\omega_k^2\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2\xi^{1/2}}. \qquad (17a)$$

Čo sa týka určenia originálov pre magnetickú zložku elektromagnetického poľa, dostaneme tieto vzorce ľahko zo vzorcov pre radiálnu zložku elektrického poľa, teda zo vzorcov (8), (9), (10a), (11a), (12a) a (13a), ak budeme v nich písať namiesto konštanty C konštantu $C^{**} = \dfrac{\sin\Theta\, dl}{4\pi r^2}$. Tým je naša úloha vyriešená, lebo metódy pre numerický výpočet odvodených integrálov sú dobre známe.

LITERATÚRA

[1] Bubeník V., *Impulsová technika*. SNTL, Praha 1958.
[2] Bhatacharya B. K., Geoph. 22, No 1, 75—88.
[3] Диткин В. А., Прудников А. П., *Справочник по операционному исчислению*, Москва 1965.
[4] Doetsch G., *Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation*. Berlin 1937.

Došlo 1. 3. 1966

Geofyzikálny ústav SAV,
Bratislava

THE TRANSIENT ELECTROMAGNETIC FIELD FOR THE TRAPEZE CURRENT IMPULSE

S. Krajčovič

Summary

The purpose of this paper is the deduction of the theoretical formulae for the non-vanishing components of the electromagnetic field due to a vertical electrical dipole source.

The dipole source is imbedded in a homogeneous and isotropic medium, the conductivity of which is finite and which transmits the current trapeze periodical impulses into the environment.

The deduction of these formulae has been made by the use of the Laplace-Carson integral transformations. The resulting formulae are given in a form suitable for numerical calculation.