

## ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ТЕПЛОЕМКОСТИ ОБРАЗЦОВ ВИДА ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

ШТЕФАН БАРТА, ИОСИФ БИЕЛЕК (Jozef Bielik),  
ЮЛИУС КРЕМПАСКИ, (Július Kremplásky), Братислава

В работе теоретически и экспериментально решены проблемы, связанные с измерением теплопроводности, температуропроводности и теплоемкости веществ, если образцы имеют вид полого цилиндра. Разработаны и экспериментально проверены многие методы измерения этих параметров. Речь идет о нестационарных методах измерения с использованием коротковременных и постоянно действующих источников тепла.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

На практике нередко требуется измерять тепловые свойства материалов, которые имеют вид полых цилиндров (графитовые или керамические трубки, сыпучие материалы, жидкости и т. д.). До сих пор для этой цели пользовались стационарным методом [1—3] который достаточно точен, но все же он имеет несколько недостатков: 1. При измерении нужно пользоваться относительно долгими образцами (высота образцов должна во много раз превышать толщину). 2. Нужно пользоваться идеальной тепловой изоляцией. 3. Измерение продолжается достаточно долго (в зависимости от величины теплопроводности). 4. Метод позволяет измерять только теплопроводность. По этим причинам этот метод не пригоден для измерения большего количества образцов, а поэтому его нельзя абсолютно использовать для быстрого контроля изделий серийного выпуска.

В этой работе разработаны методы измерения, у которых (кроме метода с постоянно действующим источником тепла) нет этих недостатков. Они основаны на нестационарном состоянии, измерение протекает очень быстро, можно при них пользоваться малыми образцами, тепловые потери из поверхности очень слабо влияют на результаты измерений и при выполнении некоторых предположений эти методы достаточно точны.

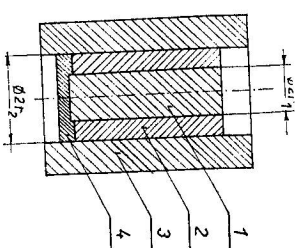
Кроме измерений результатами, полученными при теоретическом решении, можно пользоваться даже при расчете некоторых технических проблем теплового транспорта через материалы вида полого цилиндра.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

### 2.1 Модификация метода Йоффе

Для быстрого измерения теплопроводности материалов, специально полупроводниковых, пользовались и теперь еще пользуются методом, разработанным А. В. Йоффе и А. Ф. Йоффе [4—5]. Этот метод основан на транспорте тепла из тела ограниченной теплоемкости через дисковую образец в тело с бесконечной теплоемкостью и с меньшей температурой. Измерением понижения температуры в первом блоке можно рассчитать теплопроводность, как показано в работе [6], а также температуропроводность. Как указано в дальнейшем, этот метод необходим для расчета коррекции на тепловые потери из верхнего блока в атмосферу, на тепловые потери из верхнего блока в нижний, на контактное сопротивление, на ограниченную скорость распространения теплоты в блоке и т. д. Эти коррекции рассчитаны в работах [7—9], но более подробно в работе [10]. Этим же принципом можно пользоваться и при измерении теплопроводности образцов полого цилиндра (рис. 1). Цилиндрический блок (1) из материала с достаточно большой теплопроводностью (серебро, медь) имеет функцию теплового источника с ограниченной емкостью. Внешний цилиндр (3), в котором помещен образец (2) изготовлен из материала с хорошей теплопроводностью.

Рис. 1. Расположение аппаратуры для измерения теплопроводности образцов вида полого цилиндра модифицированным методом Йоффе (1 — цилиндр, 2 — измеряемый образец, 3 — внешний блок, 4 — кольцо, которое должно термо и электрически изолировать и центрировать образец).



Если в момент времени  $t = 0$  внутренний цилиндр имеет температуру  $T_0$ , внешний цилиндр температуру  $T_{\text{вн}}$  и  $T_0 > T_{\text{вн}}$ , то возникает тепловой транспорт из первого цилиндра в другой. Если предположить, что измеряемый образец имеет достаточно большое тепловое сопротивление (из-за низкой теплопроводности или большой толщины), возникающий процесс распространения тепла имеет характер квазистационарного процесса, поэтому количество тепла  $Q$ , которое за время  $\Delta t$  переходит из внутреннего блока во внешний, можно выразить следующим образом:

$$mc\Delta T = \frac{2\pi h}{\ln(r_2/r_1)} (T - T_{02})\Delta t, \quad (1)$$

где  $m$  — масса цилиндра,  $c$  — теплоемкость,  $\Delta T$  — понижение температуры за время  $\Delta t$ ,  $h$  — высота цилиндра и образца,  $T$  — температура цилиндра,  $\lambda$  — теплопроводность,  $r_1$  — радиус цилиндра,  $r_2$  — внутренний радиус внешнего блока. Если выразить массу  $m$  через удельный вес  $\gamma$ , то из уравнения (1) можно получить для теплопроводности следующее выражение

$$\lambda = \frac{r_1^2 \gamma c \ln(r_2/r_1)}{2} \frac{\Delta T}{(T - T_{02})\Delta t}. \quad (2)$$

Эта формула позволяет измерить теплопроводность, если определить понижение температуры за короткое время (независимо от времени, прошедшего от начала измерения). Предполагается, что  $\Delta T \ll T - T_{02}$ .

Измерение может производиться таким образом, что зависимость

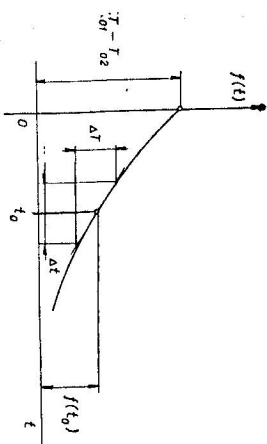


Рис. 2. Временная зависимость  $T(t) - T_{02} = f(t)$ .

$T - T_{02} = f(t)$  графически изображается (рис. 2) или непосредственно записывается самописцем, а теплопроводность рассчитывается на основе выражения (2) с помощью величин в нескольких местах графика. Возможно также получить и математическое выражение зависимости  $T - T_{02} = f(t)$ . Если разности в выражении (2) заменить дифференциалами  $\Delta T \rightarrow -dT$ ,  $\Delta t \rightarrow dt$ , положим  $T_{02} = 0$  и обозначим

$$a = \frac{2\lambda}{r_1^2 \gamma c h \ln(r_2/r_1)},$$

то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{T} = -adt$$

с начальным условием  $T(t=0) = T_{01}$ , которое имеет решение

$$T = T_{01} e^{-at}. \quad (3)$$

Если определить экспонент, то в этой формуле можно также рассчитать теплопроводность.

Если образец не имеет достаточной толщины для того, чтобы процесс был стандартным сразу же после начала измерения, можно между внутренним цилиндром и образцом или между образцом и внешним цилиндром поместить другие цилиндры, изготовленные из материала с известными тепловыми свойствами. При этом возникают проблемы подготовки хороших тепловых контактов. Эти проблемы практически отпадают, если вместо вспомогательных цилиндров пользоваться жидкостью с хорошим коэффициентом преломления тела. В этом сложном случае уравнение (1) имеет вид

$$mc\Delta T = \frac{2\pi h \Delta t}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln(r_{i+1}/r_i)} (T - T_{0n}), \quad (4)$$

и экспонент  $a$  в выражении (3) можно определить формулой

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln(r_{i+1}/r_i)}{2}. \quad (5)$$

При сравнении с методом Иoffee этот метод имеет то преимущество, что не возникают тепловые потери из теплового источника в окружающую атмосферу. При измерении веществ с низкой теплопроводностью методом можно упростить еще таким образом, что внутренних и внешний цилиндры заменяются жидкостью. При измерении нужно жидкость перемешивать.

## 2. 2 Метод теплового импульса на изолированном образце

Нетрудно получить формулы для измерения теплопроводности полых цилиндров, если при измерении используются кратко- временно действующим источником теплоты, который каждой единице площади внутренней стороны образца отдает одинаковое количество теплоты.

Пусть  $a$  — внутренний радиус образца,  $b$  — внешний — достаточно большой (рис. 3). Найдем функцию, определяющую изменения температуры в точках

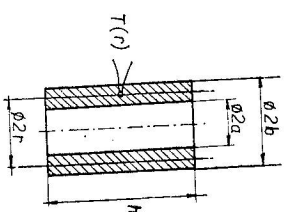


Рис. 3. Сечение измеряемого образца.

цилиндрической площади с радиусом  $r$ . При этом будем пользоваться температурной функцией, определяющей распределение температуры, возникающее при действии линейного источника [11—13], имеющей вид

$$T_e = \frac{\Delta Q_0}{4\pi\lambda t} \exp \left[ -\frac{r^2}{4kt} \right] \Phi \left[ \frac{h}{4} \sqrt{kt} \right], \quad (6)$$

где  $\Delta Q_0'$  — количество тепла, выделенное каждой единицей длины линейного источника. Ввиду того, что процессы аддитивны, мы можем температуру, соответствующую действию площадного источника, определить интегралом

$$T = \int T_e^*(r', t) ds, \quad (7)$$

где  $T_e^*$  получится из функции  $T_e$ , если в ней заменить  $\Delta Q_0'$  на  $\Delta Q_0$  и

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi, \quad (8)$$

где  $\Delta Q_0$  значит количество тепла выделенно единицей площади. Подставив в выражений (6) и (8) в интеграл можно рассчитать температурную функцию в виде

$$T(r, t) = \frac{a\Delta Q_0}{2\lambda t} \exp \left[ -\frac{a^2 + r^2}{4kt} \right] I_0 \left[ \frac{ar}{2kt} \right] \Phi \left[ \frac{h}{4} \sqrt{kt} \right], \quad (9)$$

Как вытекает из характера функций, вытекающих в соотношении (9), функция  $T(r, t)$  имеет в промежутке  $t \in (0, \infty)$  один максимум. Выберем  $h$  и  $r$  так, чтобы  $h/4\sqrt{kt} > 1$ ,  $ar/2kt > 1$  и чтобы промежуток  $0 < t < \tau$ , определенный этими условиями, содержал время  $t_m$ , для которого наступает максимум; это можно выполнить, учитывая характер метода (отсчет максимума температуры). Характер метода измерения такой, что оно окончено раньше, чем во времени  $t \leq (r - a)^2/2k$ , а поэтому нетрудно исполнить условия  $h/4\sqrt{kt} > 1$ ,  $ar/2kt > 1$ . Но в таком случае

$$\Phi \left[ \frac{h}{4} \sqrt{kt} \right] \approx 1, \quad (10a)$$

$$I_0 \left[ \frac{ar}{2kt} \right] \approx \left( \frac{kt}{\pi ar} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{ar}{2kt} \right] \quad (10)$$

и функция (9) принимает простейший вид

$$T(r, t) = \frac{\Delta Q_0}{2\lambda} \left( \frac{ka}{\pi r t} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(r - a)^2}{4kt} \right]. \quad (11)$$

Эта функция имеет экстремум при  $t_m = d^2/2k$  где  $d = r - a$ , из которого можно получить следующие формулы, пригодные уже для измерения

$$k = \frac{d^2}{2t_m}, \quad (12a)$$

$$\lambda = 0,214 \left( \frac{a}{r} \right)^{1/2} \frac{\Delta Q_0 d}{T_m t_m}, \quad (12b)$$

$$c = 0,4289 \left( \frac{a}{r} \right)^{1/2} \frac{\Delta Q_0}{r d T_m}, \quad (12c)$$

где  $T_m$  — максимальное температурное повышение,  $t_m$  — время, в котором экстремум возникает.

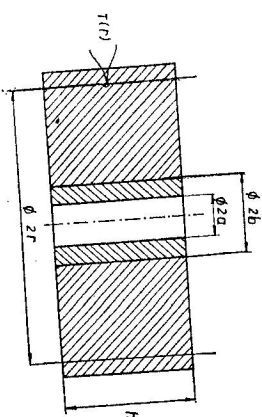
Из выражений (12) следует, что аппроксимации (10) выполнены, если  $h > \sqrt{2}(r - a)$  и  $ar > (r - a)^2$ . Чтобы избежать влияния граничных условий на поверхности образца на результаты измерений, должно быть  $b - a > 3(r - a)$ .

Если величины  $a$ ,  $b$  — достаточно большие, функции (11) переходят в функцию площадного теплового источника, полученную в работах [14—15].

## 2. 3 Измерение на образце, помещенном в другом материале

Если у измеряемого образца толщина стенки недостаточна, нужно поместить его в другой материал, в котором находится температурный индикатор (рис. 4). В этом случае расчет температурного поля представляет собой проблему. Такая система интересна и с другой точки зрения (например, нагревание окружающей среды кабелем), поэтому не удивительно, что существуют многие попытки аналитического решения этой проблемы [16—18]. Полученные результаты нельзя пользоваться для измерительных целей. Нам удалось (см. приложение 1) довести решение основного

Рис. 4. Сечение измеряемого образцом в том случае, когда он помещен в другой материал.



дифференциального уравнения теплопередачи до такого вида, из которого после некоторых упрощений можно было вывести формулы, пригодные для измерения.

Они имеют следующий вид:

$$T_2(r, t) = \frac{2Q}{\kappa_0} \left( \frac{a}{\pi r t} \right)^{1/2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \exp \left[ - \left( \frac{\alpha_i^2}{4k_1 t} \right) - \frac{Q}{4\kappa_0 r} \left( \frac{ak_2}{r} \right)^{1/2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Phi^* \left[ \frac{\alpha_i}{2\sqrt{k_1 t}} \right] - \frac{Q}{4} \left( \frac{ak_1}{r} \right)^{1/2} \times \frac{3 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} + \left( \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}}{\kappa_0^2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \chi_i(i+1) \times \frac{3 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} - \left( \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}}{\kappa_0^2} \times \Phi^* \left[ \frac{\alpha_i}{2\sqrt{k_1 t}} \right] - \frac{Q}{4} \left( \frac{ak_1}{r} \right)^{1/2} \frac{3 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} - \left( \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}}{\kappa_0^2} \times \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \chi_i(i+1) \Phi^* \left[ \frac{\beta_i}{2\sqrt{k_1 t}} \right] + \frac{Q}{4b} \left( \frac{ak_2}{r} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} - 3\sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}}{\kappa_0^2} \times \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \chi_i(i+1) \Phi^* \left[ \frac{\alpha_i}{2\sqrt{k_1 t}} \right] - \frac{Q}{4b} \left( \frac{ak_2}{r} \right)^{1/2} \times \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \chi_i(i+1) \Phi^* \left[ \frac{\beta_i}{2\sqrt{k_1 t}} \right] \times \frac{\sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} + 3\sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}}{\kappa_0^2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \chi_i(i+1) \Phi^* \left[ \frac{\beta_i}{2\sqrt{k_1 t}} \right], \quad (13)$$

где

$$\kappa = \frac{\sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} - \sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}}{\sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} + \sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2}},$$

$$\kappa_0 = \sqrt{\lambda_1 c_1 \gamma_1} + \sqrt{\lambda_2 c_2 \gamma_2},$$

$$\alpha_i = (r - b) \sqrt{k_1/k_2} + (2i + 1)(b - a),$$

$$\beta_i = (r - b) \sqrt{k_1/k_2} + (2i + 3)(b - a).$$

Величины обозначенные индексом 1 касаются внутреннего цилиндра, индексом 2 — внешнего цилиндра. При решении предполагалось, что диаметр внешнего цилиндра имеет такую величину, что до окончания измерения граничные условия на его поверхности не имеют никакого влияния на измеряемую температуру. Это условие, как будет показано, не трудно выполнить.

Анализ температурной функции (13) показывает, что до времени максимума, в котором реализуется измерение, температура достаточно точно определена только первым рядом, если

$$\frac{2a}{\sqrt{k_1 t}} \gg 1, \quad (14a)$$

$$\frac{3b}{\sqrt{k_2 t}} \gg 1. \quad (14b)$$

Эти условия можно на практике выполнить таким образом, что радиус внутреннего цилиндра выбирался в несколько раз большим, чем его толщина. Нетрудно показать, что из этой первой суммы можно с достаточной точностью взять только первый член, если  $\kappa < 10$  или

$$(b - a) > (r - b) \sqrt{k_1/k_2}. \quad (14c)$$

Условие (14c) можно на практике также хорошо выполнить (выбором подходящего материала и расстояния, в котором помещается температурный индикатор). При условиях (14a—14c) из функции (13) и ее временного максимума вытекают следующие формулы, пригодные для измерения:

$$k_1 = \frac{(b - a)^2}{\left[ \sqrt{\frac{r - b}{2t_m}} - \sqrt{\frac{r - b}{k_2}} \right]^2}, \quad (15a)$$

$$\lambda_1 = \left[ 0,682 \frac{Q_0}{T_m} \left( \frac{a}{r t_m} \right)^{1/2} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} \right] \frac{b - a}{\sqrt{2t_m} - \sqrt{k_2}}. \quad (15b)$$

При измерении серии образцов одинаковой геометрии и приблизительно одинаковых тепловых параметров выгодно геометрические факторы и мощность теплового источника, а также тепловые параметры вещества, в котором помещен образец, ввести в константы, которые можно с выгодой определить измерением на нормали (напр. свинец, вода и т. д.).

Если бы мы при расчете времени экстремума взяли во внимание и следу-

коший член первого ряда функции (13), мы бы получили для температуры проводимости следующее формальное выражение:

$$k_1 = \frac{(b-a)^2}{\left[ \sqrt{2t_m(1+p)} - \frac{r-b}{\sqrt{k_2}} \right]^2}; \quad p = \frac{1}{4} \frac{ze^{-4q}}{1+2q};$$

$$q = \frac{1}{(1+\delta)^2}; \quad \delta = \frac{r-b}{r-a} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

С точностью лучшей чем 1 % можно пользоваться уравнением (15а), если выполнено  $b-a > \frac{1}{3}(r-b) \sqrt{k_1/k_2}$ . Выполнением условия (14с) это условие всегда выполнено.

## 2. 4 Метод постоянного обогрева на изолированном образце

Аналогично предыдущему случаю (см. приложение 2) можно найти функцию, которая определяет изменение температуры на поверхности образца вида полого цилиндра, когда в его среде действует тепловой источник с постоянной мощностью. Она имеет вид:

$$T(b, t) = \frac{i_0 ab}{b\lambda(b^2 - a^2)} \left[ 2kt - \frac{b^2 + a^2}{2} \right] + \frac{2i_0}{b\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha_i^2(1 - \gamma_i^2)} e^{-\alpha_i^2 t}, \quad (17)$$

где  $i_0$  — количество тепла, переданное единицей площади за единицу времени,  $I_1$  — функция Бесселя первого порядка первого рода,  $Y_1$  — функция Бесселя первого порядка второго рода,  $\alpha_i$  — корни уравнения

$$I_1(\alpha a) Y_1(\alpha b) - I_1(\alpha b) Y_1(\alpha a) = 0. \quad (18)$$

С ростом  $t$  последний член соотношения (17) быстро падает до нуля, так что зависимость температуры от времени становится линейной (рис. 5).

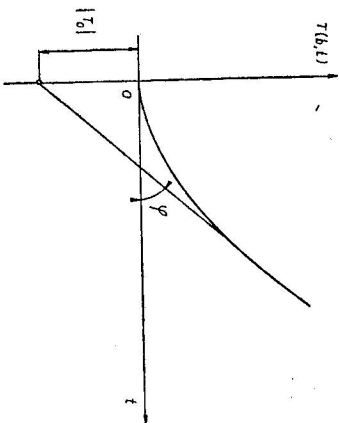


Рис. 5. Временная зависимость температуры на поверхности образца вида полого цилиндра при методе постоянного источника тепла на термозолированном образце.

Для определения теплопроводимости и теплоемкости достаточно снять из графика величину  $T_0$  и наклон  $\text{tg } \varphi$ . Можно легко показать, что для них действительны соотношения

$$\lambda = \frac{i_0 a(b^2 + a^2)}{2|T_0|(b^2 - a^2)}, \quad (19a)$$

$$k = \frac{b^2 + a^2}{4|T_0|} \text{tg } \varphi, \quad (19b)$$

$$c = \frac{2i_0 a}{(b^2 - a^2) \gamma \text{tg } \varphi}. \quad (19c)$$

Условия для измерения нужно выбирать так, чтобы касательная линейной части зависимости  $T = f(t)$  пересеклась вертикальной осью на определенном подходящем расстоянии, которое можно после легко измерить.

## 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Для проверки измерительных методов, разработанных в предыдущих параграфах, были сконструированы несколько установок, с помощью которых были измерены тепловые параметры многих твердых и жидких материалов.

На рис. 6 указана схема аппаратуры пригодной для реализации модифицированного метода Йoffee (напр. 2.1). Тепло ограниченной теплоемкости

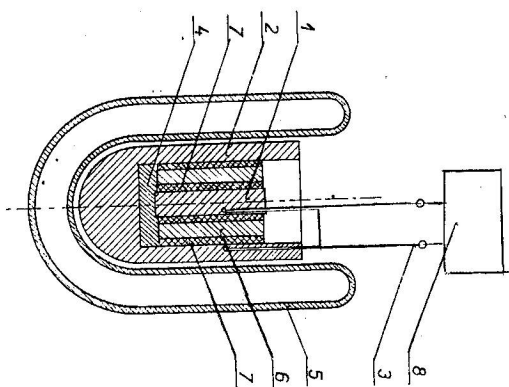


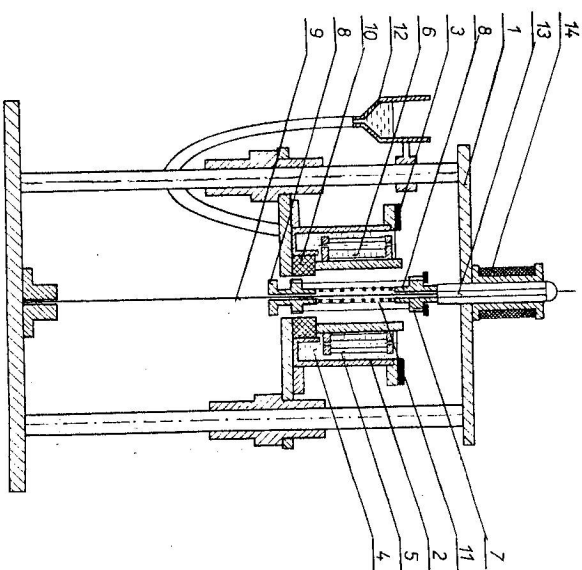
Рис. 6. Сечение приспособления для измерения теплопроводности образцов вида полого цилиндра модифицированным методом Йoffee (1 — медный цилиндр, 2 — внешний блок, 3 — дифференциальный термометр, 4 — центрирующее кольцо из термо и электрически изолированного материала, 5 — дьюаровский сосуд, 6 — материал образцов, 7 — нормальная жидкость, 8 — регистрирующий милливольтметр).

осуществлено медным цилиндром (1) в размерах приблизительно  $\Phi 2,4 \times \times 5$  см. Внешний блок теоретически бесконечно большой и является толстым медным цилиндром (2) с внутренним диаметром 4,8 см и внешним диаметром 10 см. Оба блока соединены дифференциальной термопарой (3), которая подключена к чувствительному и мало инерционному индикатору термо эдс. Дно внешнего сосуда покрыто слоем термоизолятора (4), например резина, полистирол и т. д. Образец с цилиндрами вложен в термостат, создаваемый другим сосудом с жидкостью (5). Если не измеряться температурная зависимость тепловых параметров, то выгоднее использовать в качестве термостатной жидкости смесь льда и воды, которая стабилизирует температуру внешнего блока. Когда измеряются параметры жидкости, тогда заполняется пространство между блоками измеримой жидкостью.

Когда измеряются параметры твердых тел, то вкладывается образец (6) в виде полого цилиндра с толщиной стенок немного меньшей, чем расстояние между внутренним и внешним блоком, симметрически между обоими блоками и пустое пространство заполняется нормальной жидкостью (7).

На рис. 7 показана схема установки для измерения по методу, описанному в параграфе 2.3. Очевидно, ту же установку можно использовать также для измерения по методам, описанным в параграфах 2.2 и 2.4. В основной рамке (1) укрепленный сосуд (2), стена которого внутренняя, создает

Рис. 7. Сечение приспособления для измерения теплотных параметров образцов полого цилиндра импульсным методом (1 — основная рамка, 2 — сосуд, 3 — измеримый образец, 4 — дистиллированная вода, 5 — задние контакты термопар, 6 — передние контакты термопар, 7 — система проволочек, 8 — изоляционные блоки, 9 — тонкий стержень, 10 — резиновая прокладка, 11 — резервуар воды, 12 — резервуар воды, 13 — якорь, 14 — электромагнит).



измеримый образец (3). Сосуд наполнен дистиллированной водой (4). Чтобы вода не вытекала, образец нижней плоскостью прижат к резиновой подкладке (10), которая одновременно выполняет роль термоизолятора. Сосуд соединен трубкой с резервуаром воды и методом соединенных сосудов регулируется уровень воды в сосуде. К измеримому образцу с внешней стороны прижата с обеих сторон батареи термопар, изготовленные нанесением меди на одну половину витков из константовой проволоки. Передние контакты термопар (6) находятся на таком расстоянии, чтобы время максимума без образца было 3—10 секунд. При использовании дистиллированной воды соответствует этому толщина около 1 мм. Задние контакты термопар (5) находятся на таком расстоянии, чтобы температура

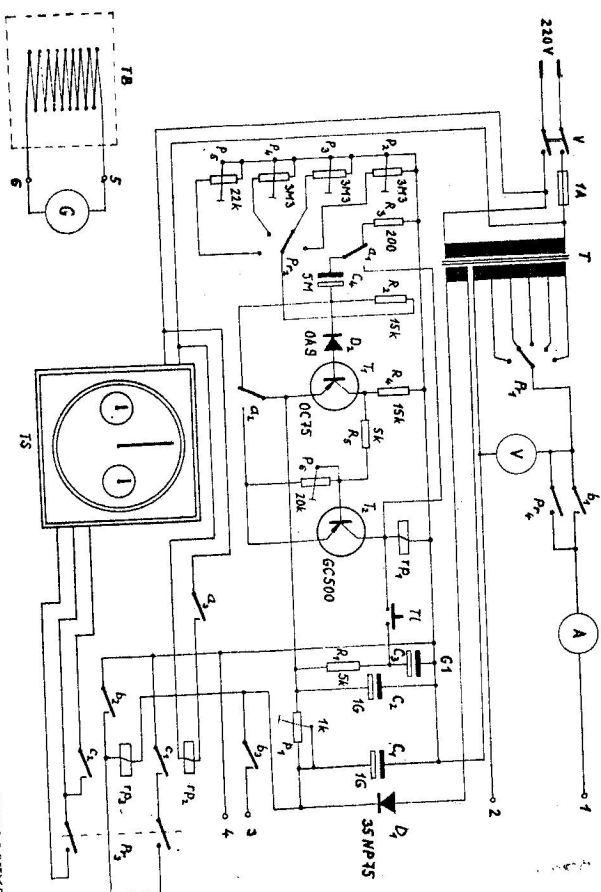


Рис. 8. Схема электрической части измерительного аппарата для измерения тепловых параметров импульсным методом (Т — трансформатор 220 вольт (55; 44; 33; 22; 11), rр1, rр2, rр3 — реле, а1 — контакты реле rр1; b1 — контакты реле rр2; а1 — переключатель ступенчатой настройки мощности для плещанного источника тепла (клеммы 1, 2); Pт2 — переключатель (верхняя часть — выключение электрического секундомера, нижняя часть — установка нуля секундомера); Pт4 — настройка мощности, контроль постоянного оборота; (3—4) — клеммы для питания катушки электромагнита; ТВ — батарея термопар, клеммы (5—6); — гальванометр Мультиметр, тип МГ4).

в этом месте не изменяться во времени  $t_m$  (по теплопроводности образца 1—3 см). В отверстие образца на тонком стержне (9) помещен источник тепла. Он состоит из двух электрически изолированных блоков (8), которые по окружности соединены системой проводников (7) с соответствующим большим электрическим сопротивлением. Проволоки соединены параллельно или последовательно и подключены к источнику напряжения. Мощность источника должна быть 10—200 ватт.

Источник тепла во время прохождения тока в образце удержан якорем (13) электромагнита (14), который после питания теплового импульса освобождает якорь и источник собственным весом из образца выпадает. Электрическая часть измерительной установки состоит из трансформаторного переключателя, источника напряжения для источника тепла, источника напряжения для регулирования магнита и из устройства для автоматического выключения электрического секундомера. Общая схема этой установки указана на рис. 8.

При измерении по методу, описанному в параграфе 2.2, используется та же аппаратура, только вместо термометр, помещенных в жидкости, в этом случае в качестве индикатора температуры термометра помещается

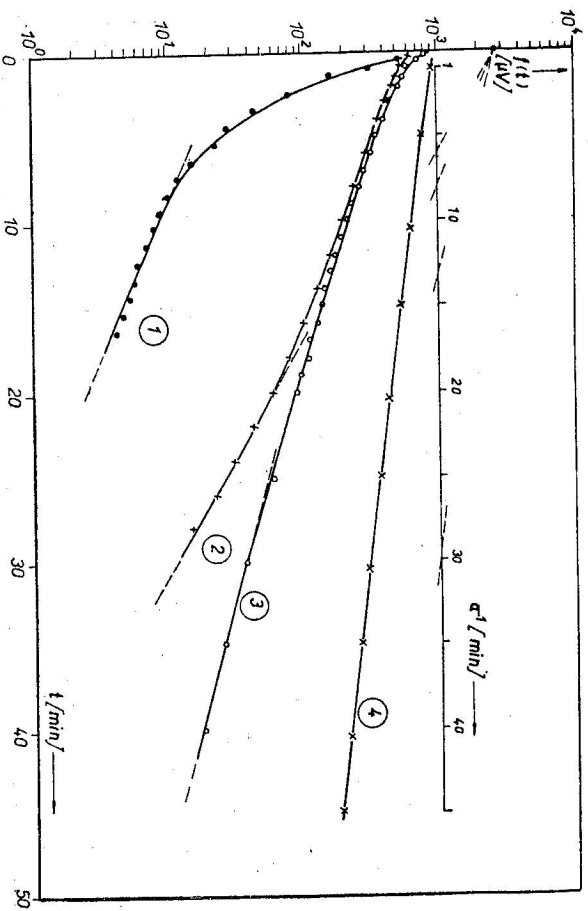


Рис. 9. Измеренные временные зависимости термо эдс дифференциальной термометра функции  $f(t) = V_{\text{эс}} - V(t)$  для дистиллированной воды — 1; глицерина (в дистиллированной воде) — 2; глицерина — 3 и сосуда без образца — 4.

прямо в измеряемом образце. В методе приведенном в параграфе 2.4 источник тепла подключается на постоянную мощность и термометр прикрепляется на поверхность измеряемого образца.

#### 4. ИЗМЕРЕНИЕ И ОЦЕНКА МЕТОДОВ

Измерение модифицированным методом Иорфе является очень простым.

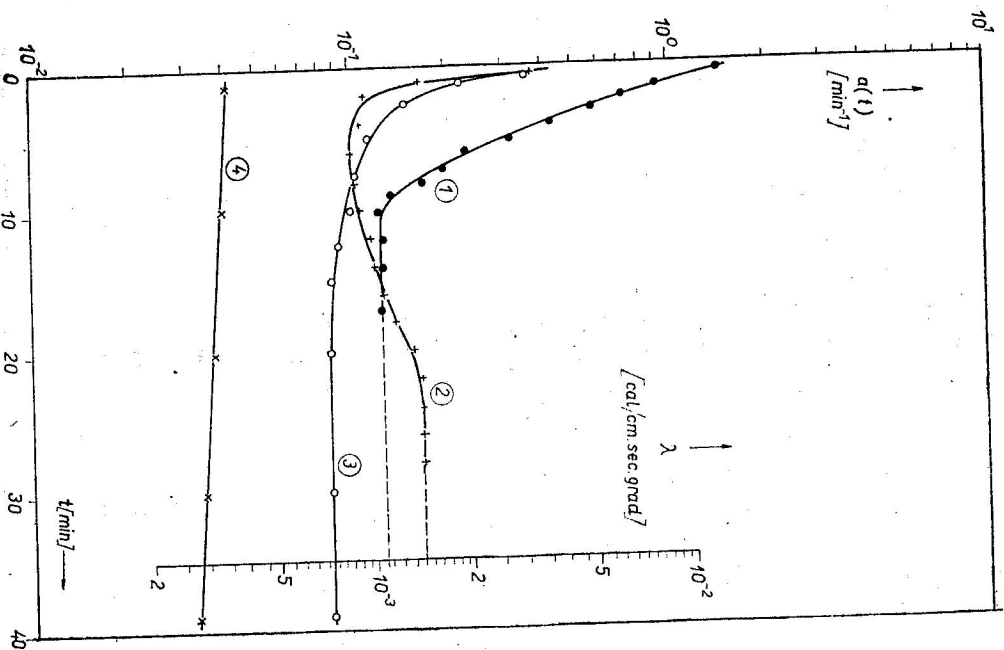


Рис. 10. Временная зависимость величины  $a(t)$  для дистиллированной воды — 1; глицерина (в дистиллированной воде) — 2; глицерина — 3; и сосуда без образца — 4.

Разницу температур между внутренним блоком и остальной аппаратурой (включая и образцы) мы достигли тем, что перед измерением мы опустили цилиндр в смесь льда и воды. После того как достигнем температуры этой смеси, цилиндр перенесется быстро в измеряемую среду и включается дифференциальная термонара в индикатор термо элс.

Действие выведенных отношений мы проверили измерением глицирина, дистиллированной воды и плексигласа. Учитывая относительно низкую теплопроводность этих веществ можно предполагать, что процесс происходит квазистационарно и что выведенные отношения будут верными.

Измерение подтвердило это предположение. На рис. 9 показаны записи соответствующих функций  $T - T_0 = f(t)$  и на рис. 10 показаны теплопроводности указанных веществ, оцененные в соотношением (3). Видно, что данные, полученные сразу в начале, не являются достоверными, но данные, полученные после некоторого времени, дают очень хорошее согласие с теорией. Абсолютную точность измерения теплопроводности можно оценить этим методом на 3—12 %.

Метод импульсного источника на образцах, помещенных в другом материале, был проверен на серии графитовых образцов завода „Электрокарбон“. Графитовые трубки были помещены в дистиллированной воде. Константы, выступающие в отношении (15), были определены измерением на свинцовом нормальном элементе. В таблице 1 приведены измеренные величины времени  $t_m$  и разности температур  $T_m$ , теплопроводности, рассчитанной в соотношении (15) и теплопроводности, измеренной стационарным (классическим) методом.

Таблица 1

| Образец №       | $t_m$<br>[сек] | $T_m$<br>[градений] | $\lambda$ расчетное<br>[кал/см. град. сек] | $\lambda$ станд.<br>[кал/см. град. сек] |
|-----------------|----------------|---------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------|
| свинец          | 15,2           | 112                 | 0,084                                      | 0,084                                   |
| японский графит | 10,6           | 135                 | 0,145                                      | 0,149                                   |
|                 | 11,72          | 130                 | 0,149                                      | 0,135                                   |
| 12              | 12,5           | 160                 | 0,082                                      | 0,090                                   |
| 10              | 11,1           | 144                 | 0,051                                      | 0,050                                   |
| 13              | 17,2           | 118                 | 0,028                                      | 0,037                                   |
| 15              | 12,2           | 141                 | 0,024                                      | 0,023                                   |
| 2               | 17,3           | 72                  | 0,091                                      | 0,081                                   |

При оценке этих результатов нужно иметь ввиду, что измеряемые образцы представляют собой самый неблагоприятный случай — это образцы с большой теплопроводностью, причем толщина стенки была относительно

малой (5—7 мм). Теоретические предположения, при которых выполняется соотношение (15), были выполнены только на 10—20 %. С этой точки зрения согласие величин можно считать хорошим. Результаты, полученные измерением на образцах с меньшей теплопроводностью (керамические трубки), были гораздо лучше и их точность можно оценить 5—8 %. Теплопроводность измеряется этим методом гораздо точнее потому, что в соотношении (15а) не выступает ни мощность источника, ни время теплового импульса, ни температура  $T_m$ .

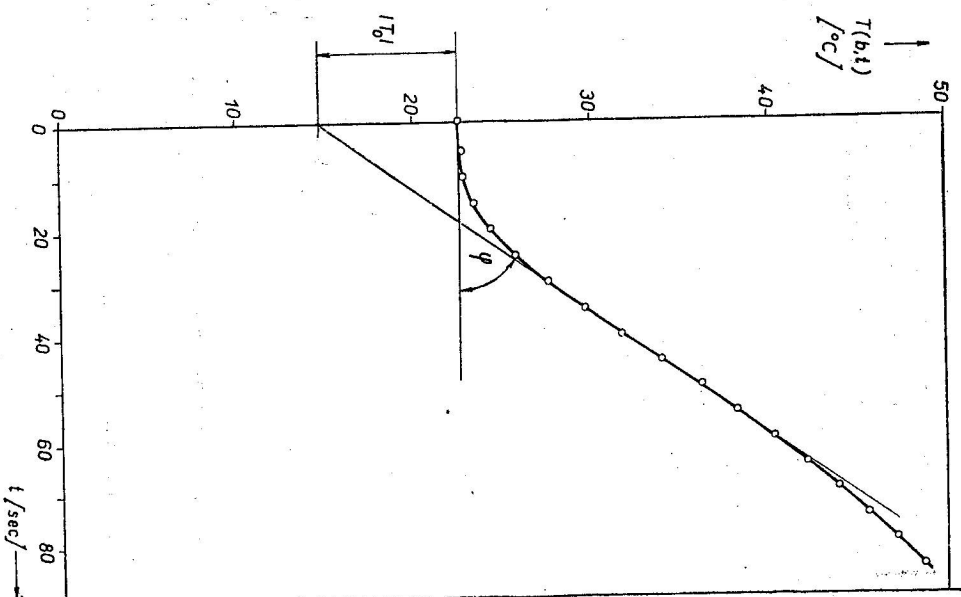


Рис. 11. Временная зависимость температуры  $T(b, t)$  для образца из плексигласа вида полного цилиндра, измеренная методом постоянного оборота.

Метод постоянного обогрева был проверен на образце из плексигласа. Графическая зависимость  $T = f(t)$ , полученная измерением, показана на рис. 11. По величине  $T_0$ , снятой с графика и по наклону его линейной части с помощью соотношений (19а) (19с) мы рассчитали тепловые параметры, которые были в правильном согласии с данными, известными из таблиц.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были теоретически разработаны четыре новых варианта нестационарного метода тепловых параметров образцов вида полноты цилиндра. Теоретические результаты, соответствующие именно распространению тепла через образец, помещенный в другом материале, оказались относительно сложнее и к измерению их можно использовать только при выполнении нескольких дополнительных условий. Экспериментальная проверка полученных выражений показала, что предлагаемые методы являются удобными для различных сортов веществ — твердых, порошкообразных и жидких, и с учетом скорости измерения, простоты аппаратуры и малым влиянием тепловых потерь могут хорошо использоваться главным образом там, где нужно измерить большое количество образцов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Дифференциальное уравнение теплопроводности в первой или во второй среде имеет вид

$$\frac{1}{k_1} \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} \right], \quad (20a)$$

$$\frac{1}{k_2} \frac{\partial T_2(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T_2(r, t)}{\partial r} \right], \quad (20b)$$

где  $k_1$  — теплопроводность первой среды,  $k_2$  — теплопроводность второй среды,  $T_1, T_2$  — температуры сред,  $r$  — расстояние от оси полноты цилиндра.

Нужно найти их решение при следующих начальных условиях

$$T_1(r, 0) = 0, \quad (21a)$$

$$T_2(r, 0) = 0 \quad (21b)$$

и следующих краевых условиях

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \bigg|_{r=a} = i(t) \quad i(t) = \begin{cases} i_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}, \quad (22a)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \bigg|_{r=b} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \bigg|_{r=b}, \quad (22b)$$

$$T_1(b, t) = T_2(b, t). \quad (22c)$$

Преобразованием Лапласа приведем дифференциальные уравнения и краевые условия к следующему виду  $[f(r, p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(r, t) dt]$

$$\frac{p}{k_1} \bar{T}_1(r, p) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \bar{T}_1(r, p)}{\partial r} \right], \quad (23a)$$

$$\frac{p}{k_2} \bar{T}_2(r, p) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \bar{T}_2(r, p)}{\partial r} \right], \quad (23b)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial r} \bigg|_{r=a} = \frac{i_0}{p} (1 - e^{-pt}), \quad (23c)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial r} \bigg|_{r=b} = -\lambda_2 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial r} \bigg|_{r=b}, \quad (23d)$$

$$\bar{T}_1(b, p) = \bar{T}_2(b, p). \quad (23e)$$

Решение уравнений (23a) и (23b) можно записать в виде

$$\bar{T}_1(r, p) = A I_0(q_1 r) + B K_0(q_1 r), \quad q_1 = (p/k_1)^{1/2}, \quad (24a)$$

$$\bar{T}_2(r, p) = C K_0(q_2 r), \quad q_2 = (p/k_2)^{1/2}, \quad (24b)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя нулевого порядка первого рода,  $K_0$  — функция Макдональда нулевого порядка.

Если источник тепла действует одновременно и с каждой единицы площади образца отдает тепло  $\Delta Q$ , то правую сторону уравнения (23с) можно привести к виду

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{i_0}{p} (1 - e^{-pt}) = \Delta Q, \quad i_0 t_0 = \text{const} = \Delta Q.$$

Уравнение (23с) примет тогда вид

$$-\lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial r} \bigg|_{r=a} = \Delta Q.$$

Постоянные А, В, С определяются из краевых условий. После соответствующих расчетов получим решение в виде

$$\bar{T}_1(r, p) = \frac{\Delta Q}{\lambda_1 q_1 (N_1 + N_2)} \{ I_0(q_1 r) [\lambda_2 q_2 K_1(q_2 b) K_0(q_1 b) - \lambda_1 q_1 K_1(q_1 b) K_0(q_2 b)] -$$

$$- K_0(q_1 r) [\lambda_2 q_2 K_1(q_2 b) I_0(q_1 b) + \lambda_1 q_1 I_1(q_1 b) K_0(q_2 b)] \}. \quad (25a)$$

$$\bar{T}_2(r, p) = \frac{\Delta Q}{q_1 b} \frac{K_0(q_2 r)}{N_1 + N_2}, \quad (25b)$$

где

$$N_1 = \lambda_1 q_1 K_0(q_2 b) [I_1(q_1 a) K_1(q_1 b) - I_1(q_1 b) K_1(q_1 a)],$$

$$N_2 = \lambda_2 q_2 K_1(q_2 b) [I_1(q_1 a) K_0(q_1 b) + I_0(q_1 b) K_1(q_1 a)].$$

Ввиду того, что температуру при измерении регистрируем в другой среде, то достаточно искать оригиналы только изображения  $T_2(r, p)$ . При решении этой задачи используем асимптотическое выражение для функции Бесселя и функции Макдональда

$$K_\nu(x) = \left( \frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x} M_\nu(x), \quad (26a)$$

$$I_\nu(x) = \left( \frac{1}{2\pi x} \right)^{\frac{1}{2}} e^x W_\nu(x), \quad (26b)$$

где

$$M_\nu(x) = 1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{118x} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{21(8x)^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$W_\nu(x) = 1 - \frac{4\nu^2 - 1^2}{118x} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{21(8x)^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

В функциях  $M_\nu$  и  $W_\nu$  будем вместо переменной  $q_2$  писать  $q_2 = \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} q_1$  и переменную  $q_1$  обозначим через  $x$ . Тогда функцию  $T_2(r, p)$ , в которую подставим соотношения (26), разложим по степеням  $1/x$ . Если ограничимся нулевой аппроксимацией, то получим функцию  $T_2(r, p)$  в виде

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(r, p) = & \frac{\Delta Q}{q_1} \left( \frac{a}{rk_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\exp[-q_2(r-b)]}{\exp[-q_2(r-b)]} - \\ & - \frac{\Delta Q}{8k_1 r q_1^2} \left( \frac{a k_2}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\exp[-q_2(r-b)]}{\exp[-q_2(r-b)]} + \frac{\exp[-q_2(r-b)]}{\sqrt{\lambda_1 \gamma_1 c_1} \operatorname{sh}[q_1(b-a)] + \sqrt{\lambda_2 \gamma_2 c_2} \operatorname{ch}[q_1(b-a)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta Q}{8q_1^2} \left( \frac{a}{rk_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\lambda_1 \gamma_1 c_1} \exp[-q_2(r-b)] \left( \frac{3}{a} - \frac{3}{b} \right) \operatorname{ch}[q_1(b-a)]}{\{ \sqrt{\lambda_1 \gamma_1 c_1} \operatorname{sh}[q_1(b-a)] + \sqrt{\lambda_2 \gamma_2 c_2} \operatorname{ch}[q_1(b-a)] \}^2} - \\ & - \frac{\Delta Q}{8q_1^2} \left( \frac{a}{rk_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\lambda_2 \gamma_2 c_2} \exp[-q_2(r-b)] \left( \frac{3}{a} - \frac{1}{b} \right) \operatorname{sh}[q_1(b-a)]}{\{ \sqrt{\lambda_1 \gamma_1 c_1} \operatorname{sh}[q_1(b-a)] + \sqrt{\lambda_2 \gamma_2 c_2} \operatorname{ch}[q_1(b-a)] \}^2} + \\ & + \frac{\Delta Q}{8q_1^2} \left( \frac{a}{rk_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\lambda_1 \gamma_1 c_1} \exp[-q_2(r-b)] \frac{1}{b} \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}[q_1(b-a)]}{\{ \sqrt{\lambda_1 \gamma_1 c_1} \operatorname{sh}[q_1(b-a)] + \sqrt{\lambda_2 \gamma_2 c_2} \operatorname{ch}[q_1(b-a)] \}^2} - \\ & - \frac{\Delta Q}{8q_1^2} \left( \frac{a}{rk_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\lambda_2 \gamma_2 c_2} \exp[-q_2(r-b)] \frac{3}{b} \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}[q_1(b-a)]}{\{ \sqrt{\lambda_1 \gamma_1 c_1} \operatorname{sh}[q_1(b-a)] + \sqrt{\lambda_2 \gamma_2 c_2} \operatorname{ch}[q_1(b-a)] \}^2}. \quad (27) \end{aligned}$$

Если введем аналогичные обозначения, как в функции (13) основного текста и проведем соответствующие упорядочения, мы можем с помощью таблиц (16) найти оригинал функции  $T_2(r, p)$ . Он определен функцией (13) основного текста.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Нужно найти решение дифференциального уравнения теплопроводности.

$$\frac{1}{k} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right], \quad (28)$$

где  $k$  — теплопроводность,  $T(r, t)$  — температура среды,  $r$  — расстояние от оси полого цилиндра, при следующих начальных и краевых условиях:

$$T(r, 0) = 0, \quad (29a)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} = i_0, \quad (29b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0. \quad (29c)$$

Аналогично предыдущему случаю и здесь используем метод преобразования Лапласа, прием уравнение (28) и условие (29) примут вид

$$\frac{p}{k} \bar{T}(r, p) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \bar{T}(r, p)}{\partial r} \right], \quad (30a)$$

$$-\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \bigg|_{r=a} = \frac{i_0}{p}, \quad (30b)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \bigg|_{r=b} = 0. \quad (30c)$$

Решение уравнения (30a) имеет вид

$$\bar{T}(r, p) = A I_0(qr) + B K_0(qr). \quad (31)$$

Постоянные  $A, B$  определим из уравнений (30b, c) и для функции  $T(r, p)$  получим соотношение

$$\bar{T}(r, p) = \frac{i_0}{\lambda q p} \frac{K_1(qb) I_0(qr) + I_1(qb) K_0(qr)}{I_1(qb) K_1(qa) - I_1(qa) K_1(qb)}. \quad (32)$$

Метод измерения предполагает измерение температуры на поверхности образца ( $r = b$ ). При упорядочении функции (32) используем известные рекуррентные формулы для функции Бесселя смотри, напр., [18].

$$I_r(x) K_{r+1}(x) + K_r(x) I_{r+1}(x) = \frac{1}{x},$$

$$I_r'(x) = I_{r-1}(x) - \frac{1}{x} I_r(x),$$

$$K_r'(x) = -K_r(x) - \frac{1}{x} K_r(x),$$

$$2r I_r(x) = x I_{r-1}(x) - x I_{r+1}(x). \quad (33)$$

С помощью соотношений (33) для  $r = b$  можно функцию  $T(r, p)$  записать в виде

$$\bar{T}(b, p) = \frac{i_0}{b \lambda p q^2} \frac{1}{I_1(qb) K_1(qa) - I_1(qa) K_1(qb)}. \quad (34)$$

Эта функция имеет простые полюса в точках  $p_i = -k\alpha_i^2$ , где  $\alpha_i$  — корни уравнения

$$I_1(\alpha a) Y_1(\alpha b) - I_1(\alpha b) Y_1(\alpha a) = 0. \quad (35)$$

В точке  $p = 0$  имеет эта функция двойной полюс. Хотя для простых полюсов найдем вычет по соотношению (с помощью уравнений (33)).

$$C_i^{-1} = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{p - p_i}{p^2 I_1(qb) K_1(qa) - I_1(qa) K_1(qb)} \cdot \frac{k i_0}{\lambda b} = \frac{k i_0}{b \lambda} \cdot \frac{2 \gamma_i}{k \alpha_i^2 (1 - \gamma_i)^2}, \quad (36)$$

$$\gamma_i = \frac{I_1(\alpha_i a)}{I_1(\alpha_i b)}.$$

Используя соотношение (33), получим для двойного полюса

$$C_0^{-1} = \left[ \frac{d}{dp} p^2 \bar{T}(b, p) \right]_{p=0} = \frac{i_0 k}{b \lambda} \left| \frac{dq}{dp} \frac{d}{dq} \left[ \frac{1}{I_1(qb) K_1(qa) - I_1(qa) K_1(qb)} \right] \right|_{q=0} = -\frac{i_0}{2 \lambda} \frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2}, \quad (37a)$$

$$C_0^{-2} = \lim_{p \rightarrow p_0} p^2 \bar{T}(b, p) = \frac{i_0 k}{b \lambda} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{I_1(qb) K_1(qa) - I_1(qa) K_1(qb)} = \frac{i_0 k}{\lambda} \frac{2a}{b^2 - a^2}. \quad (37b)$$

Поэтому оригинал функции  $\bar{T}(b, p)$  будет иметь вид

$$T(b, t) = C_0^{-1} + C_0^{-2} t + \sum_{i=1}^{\infty} C_i^{-1} \exp[-k \alpha_i^2 t] = -\frac{i_0}{2 \lambda} \frac{a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} + \frac{i_0 k}{\lambda} \frac{2a}{b^2 - a^2} t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 i_0}{b \lambda} \frac{\gamma_i}{\alpha_i^2 (1 - \gamma_i^2)} \exp[-k \alpha_i^2 t], \quad (38)$$

из которого просто получаем функцию в виде (17), приведенную в основном тексте.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кондратьев Г. М., *Тепловые измерения*. Машиз, Москва 1957.
- [2] Wilkes G. B., *Heat Insulation*. J. Wiley and Sons, New York 1950.

- [3] Kappulnik W. G., Martin L. H., Proc. Roy. Soc. A 141 (1933), 144.
  - [4] Иоффе А. В., Иоффе А. Ф., ЖТФ 28 (1958), 2358.
  - [5] Иоффе А. Ф., *Физика полупроводников*. М-И ИАН СССР, 1957.
  - [6] Якузев В. П., Ререль А. П., ЖТФ 23 (1952) 1367.
  - [7] Чудновский А. Ф., *Теплообмен в дисперсионных средах*. Гостехиздат, Москва 1954.
  - [8] Каранов М. А., ЖТФ 28 (1958), 2364.
  - [9] Swann W. G., J. Frank. Inst. 268, (1959), 294.
  - [10] *Тепло и массоперенос*, Сборник статей, Минск ИАН БССР (1962), 94.
  - [11] Вишневецкий Е. Е., *Труды всесоюзного научно-исследовательского кинофото-института*. 2 (1958), 25.
  - [12] Кремпражский Ж., Czech. J. Phys. B 14 (1964), 533.
  - [13] Кремпражский Ж., Čs. Čas. Fys. 16, (1966), 136.
  - [14] Кулаков М. В., ЖТФ 1 (1952).
  - [15] Дмитриевич А. Д., *Определение термодинамических свойств ступенчатых материалов*. Москва 1963.
  - [16] Carslaw H. S., Jaeger J. C., *Conduction of Heat in Solid*. Oxford 1959.
  - [17] Whitehead, *Electrician* 99 (1927), 225.
  - [18] Watson, *A treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge, ed. 2 (1944).
- Получено в Редакцию 29 августа 1966 г.

Katedra fyziky  
Elektrotechnickej fakulty SVŠT,  
Bratislava