MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 4, 1966

O δ-TRANSFORMÁCIÁCH ANTISYMETRICKÝCH GRAFOV

ANTON KOTZIG, Bratislava

Nech G_* je daný neorientovaný normálny graf(¹). Nech $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je jeho vrcholová množina a nech c (kde $c > 0$) je počet jeho hrán. Ak pre každú z hrán grafu G_* zvolíme jednu z jej dvoch možných orientácií, vznikne tak z grafu G_* istý orientovaný graf. Nech $\mathfrak{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ je množina všetkých rôznych orientovaných grafov, ktoré uvedeným spôsobom vzniknú z grafu G_*. Platí zrejme $k = 2^c$ a každý graf z $\mathfrak{G}$ je antisymetrický v zmysle práce [2] (pozri str. 8).

Označme znakom $\omega_i(x)$ vonkajší polstupeň vrcholu v_x v grafe $G_i \in \mathfrak{G}$ (vonkajší polstupeň = mohutnosť množiny všetkých hrán usmernených v grafe z daného vrcholu) a definujeme si na množine $\mathfrak{G}$ binárnu reláciu Ω takto: graf G_i je v relácii Ω s grafom G_j (písané $G_i \Omega G_j$) práve vtedy, keď pre všetky v_x z V platí $\omega_i(x) = \omega_j(x)$. Relácia Ω je zrejme reláciou ekvivalencie.

Poznámka 1. Je zrejmé toto: ak označíme znakom $\pi_i(x)$ vnútorný polstupeň vrcholu v_x, potom platí: $[\omega_i(x) = \omega_j(x)] \Leftrightarrow [\pi_i(x) = \pi_j(x)]$, takže nezáleží na tom, či pri definícii relácie Ω na množine $\mathfrak{G}$ uvažujeme vonkajší alebo vnútorný polstupeň vrcholu.

Nech G_i je ľubovoľný graf z $\mathfrak{G}$ a nech C_i je jeho ľubovoľný 3-cyklus (= cyklus dĺžky 3). Budeme hovoriť, že graf G_j vznikne z grafu G_i δ-transformáciou na cykle C_i, keď orientácia všetkých troch hrán cyklu C_i je rôzna v grafoch G_i a G_j a orientácia všetkých ostatných hrán je v týchto grafoch rovnaká.

Lema 1. *Nech G_i je graf z $\mathfrak{G}$ a nech G_j je graf, ktorý vznikne z G_i δ-transformáciou na istom jeho 3-cykle C_i. Potom graf G_j patrí do $\mathfrak{G}$ a platí $G_i \Omega G_j$.*

Dôkaz je zrejmý.

Na množine $\mathfrak{G}$ definujeme si ďalšiu binárnu reláciu Δ takto: graf G_i je v relácii Δ s grafom G_j (písané $G_i \Delta G_j$) práve vtedy, keď $G_i = G_j$, alebo keď existuje taká postupnosť $G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_n}$ grafov z $\mathfrak{G}$, že je $G_{x_1} = G_i$, $G_{x_n} = G_j$ a že pre všetky $z = 1, 2, \ldots, n - 1$ platí: graf $G_{x_{z+1}}$ vznikne δ-transformáciou grafu G_{x_z} na istom jeho 3-cykle C_{x_z}. Relácia Δ je reflexívna, symetrická a tranzitívna, teda je reláciou ekvivalencie.

(¹) Podľa [1] graf je normálny, ak neobsahuje ani násobnú hranu ani slučku.

Lema 2. *Ak dva grafy z $\mathfrak{G}$ sú v relácii Δ, potom sú tiež v relácii Ω.*

Dôkaz. Platnosť tvrdenia lemy 2 vyplýva z lemy 1 a z definície relácie Δ. O neorientovanom normálnom grafe budeme hovoriť, že je T-grafom, keď neobsahuje žiadnu kružnicu, alebo keď v každej jeho kružnici existuje aspoň jedna taká dvojica hrán, že obe hrany dvojice patria do toho istého trojuholníka grafu(²).

Lema 3. *Nech G_* je T-graf. Nech G_p je ľubovoľný graf z $\mathfrak{G}$ a nech C je istý jeho a-cyklus. Nech G_q je ten graf z $\mathfrak{G}$, o ktorom platí: všetky hrany z G_p nepatriace do C majú v grafoch G_p, G_q rovnakú orientáciu a všetky hrany patriace do C majú v týchto grafoch rôznu orientáciu. Potom platí: $G_p \,\Delta\, G_q$ a počet δ-transformácií, ktoré treba urobiť, aby sa zmenil graf G_p na graf G_q je $a - 2$.*

Dôkaz. Je zrejmé, že nemôže byť $a < 3$. Ak $a = 3$, netreba nič dokazovať. Dokážme platnosť tohto tvrdenia: ak lema platí pre $a = r$ (kde r je isté prirodzené číslo; $3 \leqq r \leqq n - 1$), potom lema platí aj pre $a = r + 1$. Predpokladajme, že lema platí pre cyklus s r vrcholmi. Nech cyklus C obsahuje $r + 1$ vrcholov a nech postupnosť $w_1, w_2, \ldots, w_{r+1}$ udáva, v akom poradí prechádzame cez jednotlivé vrcholy cyklu C, ak po ňom obiehame v smere orientácie jeho hrán vychádzajúc z istého jeho vrcholu w_1. Pretože podľa predpokladu G_* je T-graf, možno vrchol w_1 voliť tak, že platí: vrcholy w_1, w_r, w_{r+1} sú vrcholy istého trojuholníka grafu G_*, teda tak, že platí: v grafe G_* existuje hrana (označme ju h), ktorá spojuje vrcholy w_1, w_r.

Rozoznávajme tieto dva prípady: hrana h smeruje v grafe G_p z w_1 do w_r (prvý prípad), alebo má orientáciu opačnú (druhý prípad).

V prvom prípade vrcholy w_1, w_r, w_{r+1} a hrany tieto vrcholy spojujúce tvoria 3-cyklus grafu G_p. Nech G_s je graf, ktorý vznikne z grafu G_p δ-transformáciou na uvedenom 3-cykle. V grafe G_s existuje r-cyklus C', cez vrcholy ktorého možno obiehať v smere orientácie jeho hrán v tomto poradí: $w_1, w_2, \ldots, w_r, w_1$. Pritom orientácia hrán v grafoch G_q, G_s je rozdielna na všetkých hranách a len na hranách tohto r-cyklu. Podľa indukčného predpokladu stačí urobiť $r - 2$ δ-transformácií, aby sa zmenil graf G_s na graf G_q.

V druhom prípade už v grafe G_p existuje r-cyklus C' s opísanými vlastnosťami. Podľa predpokladu možno $r - 2$ δ-transformáciami zmeniť graf G_p na istý graf G_t, v ktorom všetky hrany a len hrany z C' majú inú orientáciu než v G_p. Pretože hrana h smeruje v grafe G_t z vrcholu w_1 do vrcholu w_r, vyplýva z uvedeného, že vrcholy w_1, w_r, w_{r+1} a hrany ich spojujúce tvoria v grafe G_t istý 3-cyklus C'. Ak v grafe G_t urobíme δ-transformáciu na cykle C', vznikne tak zrejme graf G_q.

(²) O T-grafe bez mostov hovoria niektorí autori (napr. Gallai, Hajós), že je to graf triangulovateľný.

V oboch prípadoch platí $G_p \,\Delta\, G_q$ a v oboch prípadoch počet δ-transformácií, ktoré sme urobili, aby sa graf G_p zmenil na graf G_q, činil $r - 1$. (Že nevystačíme s menším počtom δ-transformácií, je zrejmé). Teda ak lema platí pre $a = 3$, platí aj pre všetky $a = 3, 4, \ldots, n$. To dokazuje lemu.

Veta 1. *Keď G_* je T-graf, potom dva grafy z $\mathfrak{G}$ sú v relácii Δ práve vtedy, keď sú v relácii Ω.*

Dôkaz. Nech G_* je T-graf a nech G_i, G_j sú ľubovoľné dva grafy z $\mathfrak{G}$. Lema 2 hovorí, že ak platí $G_i \,\Delta\, G_j$, platí aj $G_i \,\Omega\, G_j$. Dokážme, že keď G_* je T-graf, platí aj obrátene: z $G_i \,\Omega\, G_j$ vyplýva $G_i \,\Delta\, G_j$! Nech G_i je v relácii Ω s G_j. Označme znakom $Z_{i,j}$ podgraf grafu G_i, ktorý obsahuje všetky vrcholy z V a ktorý obsahuje všetky tie hrany a len tie hrany, ktoré majú v G_i inú orientáciu než v grafe G_j.

Priamo z definície grafu $Z_{i,j}$ je zrejmé, že pre každý vrchol v_x z V platí toto: počet hrán, ktoré v grafe $Z_{i,j}$ prichádzajú do v_x, rovná sa počtu hrán, ktoré v grafe $Z_{i,j}$ vychádzajú z v_x. O grafe s touto vlastnosťou je známe (pozri napr. [3], str. 32, lema 2), že platí: existuje taký systém $\bar{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_d\}$ jeho cyklov, že ľubovoľná hrana je hranou práve jedného cyklu z $\bar{C}$.

Existuje preto postupnosť $G_{x_0}, G_{x_1}, \ldots, G_{x_d}$ grafov z $\mathfrak{G}$ tak, že je $G_i = G_{x_0}$ a že pre všetky $t \in \{1, 2, \ldots, d\}$ platí: grafy $G_{x_{t-1}}$, G_{x_t} sa líšia iba tým, že všetky hrany a len hrany cyklu C_t z $\bar{C}$ majú v týchto grafoch rôznu orientáciu. Potom ale je $G_{x_d} = G_j$ a pretože podľa lemy 3 pre všetky $t \in \{1, 2, \ldots, d\}$ platí $G_{x_{t-1}} \,\Delta\, G_{x_t}$, platí tiež $G_i \,\Delta\, G_j$, čo bolo treba dokázať.

Poznámka 2. Veta 1 na rozdiel od lemy 3 nič nehovorí o tom, koľko δ-transformácií treba urobiť, aby sa graf G_i zmenil na graf G_j. Pomocou lemy 3 možno pre počet y potrebných δ-transformácií urobiť tento odhad: $y \leqq k_1 + k_2 + \ldots + k_d - 2 \,.\, d$, kde k_t je dĺžka cyklu C_t v rozklade $\bar{C}$ obsahujúcom maximálny počet cyklov a kde znak d označuje tento počet.

Lema 4. *Nech graf G_* obsahuje aspoň jednu takú kružnicu K s $p > 3$ hranami, že žiadne dve jej susedné hrany nepatria do toho istého trojuholníka grafu G_*, potom v $\mathfrak{G}$ existujú také dva grafy, ktoré sú v relácii Ω a nie sú v relácii Δ.*

Dôkaz. V množine $\mathfrak{G}$ existuje aspoň jeden graf (označme ho G_i), ktorý má tieto vlastnosti: (1) hrany kružnice K sú v G_i orientované tak, že tvoria cyklus grafu G_i; (2) každá hrana z G_*, ktorá spojuje istý vrchol x nepatriaci do K s vrcholom y patriacim do K, smeruje z x do y. Nech G_j je ten graf z $\mathfrak{G}$, ktorý má túto vlastnosť: všetky hrany z K a len hrany z K majú rôznu orientáciu v grafoch G_i, G_j. Potom ale zrejme platí: $G_i \,\Omega\, G_j$. Z orientácie grafu G_i vyplýva, že ani v grafe G_i ani v žiadnom takom grafe, ktorý je s ním v relácii Δ, neexistuje 3-cyklus, ktorý by obsahoval niektorú z hrán patriacich do K. Preto všetky grafy, s ktorými je G_i v relácii Δ, majú hrany z K orientované tak ako graf G_i, čiže: G_i nie je v relácii Δ s grafom G_j. To dokazuje lemu.

Veta 2. *Relácie Ω, Δ na množine $\mathfrak{G}$ splývajú vtedy a len vtedy, keď G_* je T-graf.*

Dôkaz. Veta je priamym dôsledkom vety 1 a lemy 4.

LITERATÚRA

[1] Bosák J., Rosa A., *Terminológia teórie grafov*, Čs. terminologický časop. *4* (1965), 85—93.

[2] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.

[3] Kotzig A., *O rovnovážne orientovaných grafoch*, Časop. pěstov. mat. *84* (1959), 31—45.

Došlo 8. 10. 1965.

Katedra numerickej matematiky a matematickej štatistiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, Bratislava

ON δ-TRANSFORMATIONS OF ANTISYMMETRIC GRAPHS

Anton Kotzig

Summary

Let $\mathfrak{G} = \{G_1, G_2 \ldots, G_k\}$ be the set of all different oriented graphs that arise by the orientation of all edges of a non-oriented graph without loops and multiple edges G_* and let $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be the set of vertices of this graph. By $\omega_i(x)$ denote the number of edges issuing in graph $G_i \in \mathfrak{G}$ from the vertex v_x and let Ω be a binary relation defined on the set $\mathfrak{G}$ as follows: $G_i \, \Omega \, G_j \Leftrightarrow \omega_i(x) = \omega_j(x)$ for all $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. By a δ-transformation of an oriented graph from $\mathfrak{G}$ we understand such a transformation of this graph into another graph from $\mathfrak{G}$ wherein the orientation of all edges (and only edges) of a cycle of the length 3 of the original graph changes. Let us further define on the set $\mathfrak{G}$ the binary relation Δ as follows: $G_i \, \Delta \, G_j$ if $G_i = G_j$ or if there exists a sequence $F_1, F_2, \ldots F_n$ of a graph from $\mathfrak{G}$ so that $G_i = F_1$, $G_j = F_n$ and that for every $z = 1, 2, \ldots, n - 1$ we have: F_{z+1} arises by a δ-transformation of the graph F_z. The main result of the paper is the proof of the theorem: The relations Ω, Δ on the set G coincide if and only if G_* is a triangulable graph.