MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 4, 1966

DIE DEDEKINDSCHEN SCHNITTE IM DIREKTEN PRODUKT VON HALBGEORDNETEN GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

Es sei $G \neq \emptyset$ eine halbgeordnete Menge. Für $A \subset G$ bezeichnen wir mit $L(A)$ bzw. $U(A)$ die Menge aller unteren Schranken bzw. aller oberen Schranken von A. Ferner sei $D(G)$ bzw. $E(G)$ das System aller Mengen $L(U(A))$, wobei A eine beliebige Teilmenge von G bzw. eine beliebige nichtleere von oben begrenzte Teilmenge von G ist. Jedes der Systeme $D(G)$, $E(G)$ ist durch die mengentheoretische Inklusion teilweise geordnet. Es ist bekannt, daß $D(G)$ ein vollständiger Verband ist (vgl. z. B. [1, S. 58]). Es ist leicht zu beweisen, daß $E(G)$ im allgemeinen kein Verband ist. In dieser Bemerkung untersuchen wir das System $E(G)$ in dem Fall, wenn G ein direktes Produkt ist. Wir beweisen, daß aus $G \sim \Pi G_\alpha$ die Beziehung $E(G) \sim \Pi E(G_\alpha)$ folgt. Eine analoge Behauptung für D statt E gilt nicht (vgl. auch [4]). Ferner beweisen wir den analogen Satz für eine Klasse von halbgeordneten Gruppen; diese Klasse enthält alle archimedischen verbandsgeordneten Gruppen. Einige weitere Beziehungen zwischen den Eigenschaften von verbandsgeordneten Gruppen G und $E(G)$ werden abgeleitet.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen. Ist $\{a_\alpha\} \subset G$, $\inf a_\alpha = u$ bzw. $\sup a_\alpha = v$, so schreiben wir $\wedge a_\alpha = u$, $\vee a_\alpha = v$. Für halbgeordnete Mengen P, Q schreiben wir $P \sim Q$, wenn es eine isomorphe Abbildung von P auf Q gibt. Es sei $a \in G$ und A, $B \subset G$. Ist $a \in U(B)$ bzw. $A \subset U(B)$, so setzen wir $a \geqq B$ bzw. $A \geqq B$. Die Halbordnung in $D(G)$ und $E(G)$ wird mit $\subset$ bezeichnet werden; das Supremum und das Infimum bezeichnen wir auch in diesen Systemen mit $\vee$, $\wedge$. Es sei M eine nichtleere Menge; für jedes $\alpha \in M$ sei G_α eine halbgeordente Menge. Das direkte Produkt ΠG_α ist das System aller Abbildungen $f : M \to \cup G_\alpha$ mit $f(\alpha) \in G_\alpha$ für jedes $\alpha \in M$; wir setzen $f_1 \leqq f_2$, wenn $f_1(\alpha) \leqq f_2(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$ ist. Bezeichnen wir $\Pi G_\alpha = F$. Setzen wir voraus, daß ein Isomorphismus

$$\varphi : G \sim \Pi G_\alpha \tag{1}$$

gegeben ist. Für $x \in G$ bzw. $X \subset G$ setzen wir $\varphi(x)(\alpha) = x(\alpha)$(1), $\varphi(X)(\alpha) = X(\alpha)$. Die direkte Zerlegung (1) von G heißt nichttrivial, wenn es $\alpha_1, \alpha_2 \in M$ gibt, so daß $\alpha_1 \neq \alpha_2$ und card $G_{\alpha_1} > 1$, card $G_{\alpha_2} > 1$ ist.

In den Abs. 1—6 setzen wir voraus, daß (1) gilt.

1. *Es sei A eine von oben begrenzte Teilmenge der Menge G. Dann ist $U(A)(\alpha) = U(A(\alpha))$.*

Beweis. Es sei $u \in U(A)(\alpha)$. Dann gibt es $x \in U(A)$ mit $x(\alpha) = u$; da $x \geqq A$ gilt, haben wir $x(\alpha) \geqq A(\alpha)$, also ist $u \in U(A(\alpha))$. Umgekehrt, es sei $u \in U(A(\alpha))$. Nach der Voraussetzung gibt es $x \in U(A)$. Es sei f dasjenige Element aus F, für das gilt: $f(\alpha) = u$; $f(\beta) = \varphi(x)(\beta)$ für jedes $\beta \in M$, $\beta \neq \alpha$. Bezeichnen wir $\varphi^{-1}(f) = y$; für jedes $\gamma \in M$ ist $y(\gamma) \geqq A(\gamma)$, also ist $y \geqq A$. Daraus bekommen wir $y \in U(A)$, $u = y(\alpha) \in U(A)(\alpha)$.

Bemerkung. Wenn A von oben nicht begrenzt ist, dann braucht eine analoge Behauptung nicht zu gelten (es ist nämlich $U(A) = \emptyset$, $U(A)(\alpha) = \emptyset$; dabei kann $A(\alpha)$ von oben begrenzt sein und dann ist $U(A(\alpha)) \neq U(A)(\alpha)$).

In dualer Weise bekommt man: wenn A eine von unten begrenzte Teilmenge der Menge G ist, so haben wir $L(A)(\alpha) = L(A(\alpha))$. Es gilt also:

2. *Es sei A eine von oben begrenzte nichtleere Teilmenge von G. Dann ist $L(U(A))(\alpha) = L(U(A(\alpha)))$.*

Bezeichnen wir $L(U(A)) = A'$. Unter den erwähnten Voraussetzungen ist also $A'(\alpha) = (A(\alpha))'$

Bemerkung. Es sei A eine nichtleere von oben begrenzte Teilmenge der Menge G. Offensichtlich gilt $A \in E(G)$ genau dann, wenn $A' = A$ ist.

3. *Es sei $A \in E(G)$. Dann ist $A(\alpha) \in E(G_\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$.*

Beweis. Nach der Voraussetzung ist A nicht leer und von oben begrenzt, also ist auch $A(\alpha)$ nicht leer und von oben begrenzt. Ferner ist $A' = A$ und daher ist nach (2) $(A(\alpha))' = A'(\alpha) = A(\alpha)$.

4. *Es sei $A^\alpha \in E(G_\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$. Setzen wir $A = \{x \mid x \in G,\ x(\alpha) \in A^\alpha$ für jedes $\alpha \in M\}$. Dann gilt:*

a) $A(\alpha) = A^\alpha$ *für jedes* $\alpha \in M$.
b) $A \in E(G)$.

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Ferner ist $A \neq \emptyset$; für jedes $\alpha \in M$ wählen wir ein Element $v_\alpha \in U(A^\alpha)$ und es sei $v \in G$ mit $v(\alpha) = v_\alpha$ für jedes $\alpha \in M$. Dann ist $A \leqq v$. Es sei $x \in A'$. Nech 2 gilt $x(\alpha) \in A'(\alpha) = (A(\alpha))' = (A^\alpha)' = A^\alpha$, also ist $x \in A$, $A' = A$.

(1) Wir schreiben überall $\varphi(x)(\alpha)$ anstatt $[\varphi(x)](\alpha)$; für $X \subset G$ sei ferner $\varphi(X)(\alpha) = \{x(\alpha) | x \in X\}$.

5. *Es sei $A, B \in E(G)$. Die Beziehung $A \subset B$ ist genau dann erfüllt, wenn $A(\alpha) \subset B(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$ ist.*

Beweis. Ist $A \subset B$, so folgt aus der Definition des direkten Produktes $A(\alpha) \subset B(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$. Es sei, umgekehrt, $A(\alpha) \subset B(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$ und $a \in A$. Wählen wir ein beliebiges $c \in U(B)$. Dann ist nach **1** $c(\alpha) \in U(B)(\alpha) = U(B(\alpha))$. Aus $a(\alpha) \in B(\alpha)$ bekommen wir jetzt $a(\alpha) \leqq c(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$; daher ist $a \leqq c$. Daraus folgt $a \leqq U(B)$, also ist $a \in L(U(B)) = B$, $A \subset B$.

Aus 5 folgt unmittelbar:

5.1. *Ist $A, B \in E(G)$ und gilt $A(\alpha) = B(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$, dann ist $A = B$.*

Für jedes $x \in G$ bzw. $y \in G_\alpha$ bezeichnen wir $\bar{x} = \{u \mid u \in G,\ u \leqq x\}$, $\bar{y} = \{u \mid u \in G_\alpha,\ u \leqq y\}$.

6. Satz. *Aus der Beziehung (1) folgt die Existenz eines Isomorphismus $\bar{\varphi}$: $E(G) \sim \Pi\, E(G_\alpha)$, so daß $\bar{\varphi}(\bar{x})(\alpha) = \overline{\varphi(x)(\alpha)}$ für jedes $x \in G$ und jedes $\alpha \in M$ gilt.*

Beweis. Wir benutzen die schon eingeführten Bezeichnungen. Betrachten wir die Abbildung

$$\bar{\varphi} : E(G) \to \Pi\, E(G_\alpha) = \bar{F}, \tag{2}$$

die folgendermaßen definiert ist: für $A \in E(G)$ ist $\bar{\varphi}(A) = \bar{f} \in \Pi\, E(G_\alpha)$, wobei $\bar{f}(\alpha) = A(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$ ist. Nach 3 ist $\bar{\varphi}$ wirklich eine Abbildung der Menge $E(G)$ in $\bar{F}$; nach 4 und 5.1 ist dann $\bar{\varphi}$ eine schlichte Abbildung von $E(G)$ auf $\bar{F}$. Aus 5 folgt jetzt, daß $\bar{\varphi}$ ein Isomoprhismus ist. Es sei $\alpha \in M$, $x \in G$. Dann ist $\bar{x} \in E(G)$, also $\bar{x}' = \bar{x}$. Nach der Definition von $\bar{\varphi}$ haben wir $\bar{\varphi}(\bar{x})(\alpha) = \bar{x}(\alpha)$. Nach der Definition des direkten Produktes ist $\bar{x}(\alpha) = \overline{\varphi(x)(\alpha)} \in E(G_\alpha)$, also gilt $\overline{\varphi(x)(\alpha)} = \bar{\varphi}(\bar{x})(\alpha)$.

Wenn G das größte und das kleinste Element besitzt, dann gibt es in jeder Menge G_α das größte und das kleinste Element. Im solchen Fall ist offensichtlich $D(G) = E(G)$, $D(G_\alpha) = E(G_\alpha)$. Aus dem Satz 6 folgt also:

6.1. (Vgl. [4, Satz 1]). *Wenn in G das größte und das kleinste Element existiert, dann folgt aus (1) die Beziehung $D(G) \sim \Pi\, D(G_\alpha)$.*

Wir wollen jetzt eine analoge Problematik für halbgeordnete Gruppen(2) untersuchen. Eine Isomorphismus von halbgeordneten Gruppen wird mit dem Symbol $\approx$ bezeichnet werden. Eine halbgeordnete Gruppe G heißt vollständig abgeschlossen, wenn aus $a, b \in G$, $na \leqq b$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$ die Beziehung $a \leqq 0$ folgt (vgl. [3]). (Mit 0 (oder, wenn notwendig, mit 0_G) wird das Nullelement von G bezeichnet.) Es sei M eine nichtleere Menge und für jedes $\alpha \in M$ sei G_α eine halbgeordnete Gruppe. Bezeichnen wir

(2) Für halbgeordnete Gruppen benutzen wir die Bezeichnungen nach [1].

mit F das direkte Produkt der halbgeordneten Mengen G_α $(\leqq)$. Für $f_1, f_2 \in F$ setzen wir $f_1 + f_2 = g$, $g \in F$, wobei $g(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$ ist. Dann ist $F(\leqq, +)$ das direkte Produkt der halbgeordneten Gruppen G_α; dieses bezeichnen wir mit $\Pi_g G_\alpha$.

Die folgenden Behauptungen 7 und 8 sind bekannt.

7. (Vgl. [3].) *Es sei G eine gerichtete vollständig abgeschlossene Gruppe. Definieren wir in $E(G)$ eine binäre Operation $+_1$ folgendermaßen: für $A, B \in E(G)$ setzen wir $A +_1 B = (A + B)'$.*(3) *Dann ist $E(G)(\leqq, +_1)$ eine vollständige verbandsgeordnete Gruppe.*

8. (Vgl. [6, Satz 2.2].) *Es sei G eine gerichtete Gruppe. Es sei eine direkte Zerlegung φ: $G(\leqq) \sim \Pi\, H_\alpha$ $(\alpha \in M)$ der halbgeordneten Menge G $(\leqq)$ gegeben. Für jedes $\alpha \in M$ setzen wir $G_\alpha = \{x \mid x \in G,\ x(\beta) = 0(\beta)$ für jedes $\beta \in M$, $\beta \neq \alpha\}$. Dann sind alle Mengen G_α Untergruppen der Gruppe $G(+)$ und es gilt $\varphi_1 : G \approx \Pi_g G_\alpha$, wobei die Abbildung φ_1 folgendermaßen definiert ist: für $x \in G$ ist $\varphi_1(x)(\alpha) = y \in G$, so daß $\varphi(y)(\alpha) = \varphi(x)(\alpha)$ und $\varphi(y)(\beta) = 0(\beta)$, wenn $\beta \in M$, $\beta \neq \alpha$.*

8.1. Bemerkung. *Unter gleichen Voraussetzungen wie in 8 gilt offensichtlich G_α $(\leqq) \sim H_\alpha$, also ist $E(G_\alpha) \sim E(H_\alpha)$.*

9. Satz. *Es sei G eine gerichtete vollständig abgeschlossene Gruppe, $G \approx \Pi_g H_\alpha$. Dann gilt $E(G) \approx \Pi_g E(H_\alpha)$.*(4)

Beweis. Es sei ein Isomorphismus $\varphi : G \approx \Pi_g H_\alpha$ gegeben. Dann ist φ auch ein Isomorphismus in bezug zu der Halbordnung allein, d. h. φ: G $(\leqq) \sim \Pi\, H_\alpha(\leqq)$. Nach 6 haben wir dann $\bar\varphi$: $E(G(\leqq)) \sim \Pi\, E(H_\alpha(\leqq))$. Es sei G_α die Menge aller Elemente $X \in E(G)$ mit $\bar\varphi(X)(\beta) = \bar 0(\beta)$ für jedes $\beta \in M$, $\beta \neq \alpha$. Nach 8 ist jede Menge G_α eine Untergruppe von $E(G)$ und es gibt einem Isomorphismus φ_1: $E(G) \approx \Pi_g G_\alpha$, wobei die Abbildung φ_1 in gleicher Weise wie in 8 erklärt ist (d. h. $\varphi_1(X)(\alpha)$ ist ein Element $Y \in E(G)$ mit $\bar\varphi(Y)(\alpha) = \bar\varphi(X)(\alpha)$ und $\bar\varphi(Y)(\beta) = \bar 0(\beta)$ für jedes $\beta \in M$, $\beta \neq \alpha$). Jetzt genügt es zu zeigen, daß die Verbandsgruppen G_α und $E(H_\alpha)$ für jedes $\alpha \in M$ isomorph sind.

Betrachten wir die Abbildung $\bar\varphi_\alpha : G_\alpha \to E(H_\alpha)$, die folgendermaßen definiert ist: für $A \in G_\alpha$ sei $\bar\varphi_\alpha(A) = \bar\varphi(A)(\alpha) = A(\alpha)$. Aus dem Isomorphismus $\bar\varphi$ und aus 5.1 folgt, daß $\bar\varphi_\alpha$ ein Isomorphismus in Bezug auf die Halbordnung ist. Es sei $A_i \in G_\alpha$, $i = 1, 2$. Dann haben wir

$$\bar\varphi_\alpha(A_1 +_1 A_2) = \bar\varphi_\alpha[(A_1 + A_2)'] = (A_1 + A_2)'(\alpha).$$

(3) Für $A, B \subset G$ setzen wir $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

(4) Die Gruppenoperation in $E(H_\alpha)$ ist analog wie im Satz 7 erklärt.

Nach 2 ist also

$$\bar\varphi_\alpha(A_1 +_1 A_2) = [(A_1 + A_2)(\alpha)]' = [A_1(\alpha) + A_2(\alpha)]'.$$

Aus den Voraussetzungen des Satzes and aus 7 ergibt sich, daß G_α und $E(H_\alpha)$ gerichtete und vollständig abgeschlossene Gruppen sind. Daher ist

$$[A_1(\alpha) + A_2(\alpha)]' = A_1(\alpha) +_1 A_2(\alpha) = \bar\varphi_\alpha(A_1) +_1 \bar\varphi_\alpha(A_2).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

10. *Es sei G ein Verband ohne größtes Element. Dann kann $D(G)$ nicht als nicht triviales direktes Produkt dargestellt werden.*

Beweis. Wenn man $D(G)$ als nichttriviales direktes Produkt darstellen kann, so existiert eine nichttriviale direkte Zerlegung φ: $D(G) \sim P \times Q$ mit zwei Faktoren. Die Elemente aus $P \times Q$ werden wir als Paare (p, q) $(p \in P,\ q \in Q)$ bezeichnen. Da $D(G)$ ein kleinstes und ein größtes Element besitzt, existiert auch in P ein kleinstes und ein größtes Element; bezeichnen wir diese Elemente mit O_P, I_P. Die Symbole O_Q, I_Q haben eine analoge Bedeutung. Es sei $A = \varphi^{-1}((I_P,\ O_Q))$, $B = \varphi^{-1}((O_P,\ I_Q))$. Wenn die Menge A in G nicht von oben beschränkt ist, so gilt $A' = G$, und da $A \in D(G)$ ist, haben wir $A = G$, $\varphi(A) = (I_P, I_Q)$. Daher ist $I_Q = O_Q$, card $Q = 1$, was ein Widerspruch ist. In G gibt es also eine obere Schranke a_0 der Menge A; in analoger Weise gibt es in G eine obere Schranke b_0 der Menge B. Bezeichnen wir $c_0 = a_0 \vee b_0$. Es sei A_0 bzw. B_0 bzw. C_0 die Menge aller Elemente aus G, die kleiner oder gleich a_0 bzw. b_0 bzw. c_0 sind. Aus der Definition der Mengen A, B folgt $A \vee B = G$, also gilt auch $A_0 \vee B_0 = G$; offensichtlich ist aber $A_0 \vee B_0 = C_0$, daher ist c_0 das größte Element in G, was ein Widerspruch ist.

Eine analoge Behauptung gilt für den Fall, wenn es in G kein kleinstes Element gibt.

10.1. Bemerkung. Die Behauptung aus 10 kann für eine halbgeordnete Menge G nicht verallgemeinert werden. Beispiel: Es sei $G = \{a, b, c\}$, wobei $a < b$, $a < c$ gilt und die Elemente b und c unvergleichbar sind. $D(G)$ kann als direktes Produkt $A \times B$ dargestellt werden, wobei card A = card $B = 2$ ist.

11. *Es gibt einen Verband G mit folgenden Eigenschaften:* a) *G besitzt ein kleinstes und ein größtes Element;* b) *G ist kein nichttriviales direktes Produkt;* c) *$D(G) = E(G)$ läßt sich als nichttriviales direktes Produkt darstellen.* Beispiel: Es sei G die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen $x, y \in \langle 0,1 \rangle$, $(x, y) \neq (1,0)$. Dabei setzen wir $(x_1, y_1) \leqq (x_2, y_2)$, wenn $x_1 \leqq x_2$ und $y_1 \leqq y_2$ gilt. G ist ein distributiver Verband mit einem kleinsten und einem größten Element. Setzen wir $A = \{(x, 0) \mid 0 \leqq x < 1\}$; offensichtlich ist $A \in D(G)$. Es sei $B \in D(G)$. Bezeichnen wir mit B_1 bzw. mit B_2 die Menge aller x_0 bzw. y_0, zu den es ein y bzw. x gibt, so daß $(x_0, y) \in B$ bzw. $(x, y_0) \in B$ ist, und es sei $x_1 = \sup x_0$ $(x_0 \in B_1)$, $y_1 = \sup y_0$ $(y_0 \in B_2)$. Ist $(x_1, y_1) = (1, 0)$, so gilt $B = A$; im Falle $(x_1, y_1) \neq (1, 0)$ ist (x_1, y_1) das größte Element in B. Die halbgeordnete Menge $D(G)$ ist also zu dem direkten Produkt $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ isomorph. Wenn G ein nichttriviales direktes Produkt ist, dann gibt es Elemente $a, b \in G$ mit $a \wedge b = 0_G$, $a \vee b = I_G$, $a \neq 0_G$, $b \neq 0_G$ (vgl. [1]). Man sieht leicht ein, daß solche Elemente in G nicht existieren.

12. *Es gibt eine Verbandsgruppe G mit folgenden Eigenschaften:* a) *G ist kein nichttriviales direktes Produkt;* b) *die Verbandsgruppe $E(G)$ läßt sich als nichttriviales direktes Produkt darstellen.*

Beispiel: Es sei G die Menge aller auf dem Intervall $\langle 0, 1\rangle$ definierten stetigen Funktionen mit der Gruppenoperation $+$ und mit der natürlichen Halbordnung. G ist eine Verbandsgruppe und G besitzt keine nichttriviale direkte Zerlegung. Da G archimedisch ist, können wir die Verbandsgruppe $E(G) = G_1$ konstruieren. Offensichtlich ist G_1 nicht linear geordnet, also gibt es Elemente $x, y \in G_1$ mit $x \wedge y = \bar{0}$, $x > \bar{0}$, $y > \bar{0}$. Es sei $S = \{z \mid z \in G_1, |z| \wedge x = \bar{0}\}$, $S_1 = \{u \mid u \in G_1, |u| \wedge |z| = \bar{0}$ für jedes $z \in S\}$. Aus [1, Kap. XIV, § 11] folgt, daß für G_1 eine nichttriviale direkte Zerlegung φ: $G_1 \approx S \times S_1$ existiert.

Im folgenden setzen wir voraus, daß G eine Verbandsgrupe ist. Ein System $\{b_i \mid i \in M\}$ von Elementen von G heißt disjunktiv, wenn $M \neq \emptyset$, $b_i > 0$ für jedes $i \in M$ und $b_{i_1} \wedge b_{i_2} = 0$ für je zwei verschiedene Elemente $i_1, i_2 \in M$. Eine Teilmenge $A \subset G$ ist Basis von G, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind (vgl. [2]):

(1) $a > 0$ und das Intervall $[0, a]$ ist eine Kette für jedes $a \in A$.
(2) Ist $b \in G$, $b \gneqq 0$, $b \wedge a = 0$ für jedes $a \in A$, so gilt $b = 0$.
(3) Die Menge A ist disjunktiv.

13. Satz. *Es sei G eine archimedische Verbandsgruppe und $A = \{a_i\}$ sei eine Basis von G. Dann ist $\{\bar{a}_i\}$ eine Basis der Verbandsgruppe $E(G)$.*

Beweis. Es sei $a_i \in A$. Da $[0, a_i]$ eine Kette ist, gibt es nach [5] eine direkte Zerlegung $\varphi : G \approx C_i \times D_i$, so daß C_i eine Kette ist und $\varphi(a_i) = (c_i, d_i) \in C_i \times D_i$, $d_i = 0$. Nach 9 existiert eine direkte Zerlegung $\bar{\varphi} : E(G) \approx E(C_i) \times E(D_i)$ mit $\bar{\varphi}(\bar{a}_i) = (\bar{c}_i, \bar{0}_{D_i})$ (wir setzen jetzt $\bar{c}_i = \{c \mid c \in C_i, c \leqq c_i\}$, $\bar{0}_{D_i} = \{d \mid d \in D_i, d \leqq 0\}$). Offensichtlich ist $E(C_i)$ eine lineargeordnete Gruppe. Das Intervall $[0, \bar{a}_i]$ der Verbandsgruppe $E(G)$ ist also eine Kette und es gilt $\bar{a}_i > 0$. Es sei $B \in E(G)$, $B > \bar{0}$. Dann haben wir $0 \in B$ und es gibt ein Element $b \in B$ so daß b nicht kleiner oder gleich 0 ist; da $B' = B$, gilt auch $b_1 = b \wedge 0 \in B$, $b_1 > 0$. Setzen wir voraus, daß $B \wedge \bar{a}_i = \bar{0}$ für jedes $\bar{a}_i$ ist. Offensichtlich gilt $B \wedge \bar{a}_i = B \cap \bar{a}_i$, also ist $B \cap \bar{a}_i = \{x \mid x \in G, x \leqq 0\}$. Daraus folgt $b_1 \wedge a_i = 0$, was ein Widerspruch der Bedingung (2)

ist. Aus (3) folgt $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 = 0$ für $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es sei α eine Kardinalzahl. Betrachten wir die folgende Bedingung für G:

$(F(\alpha))$ Ist $\{b_i \mid i \in M\}$ ein von oben begrenztes disjunktives System der Verbandsgruppe G, so ist card $M < \alpha$.

Die Bedingung $F(\aleph_0)$ hat P. Conrad [2] untersucht.

14. Satz. *Es sei G eine archimedische Verbandsgruppe, die der Bedingung $F(\alpha)$ genügt. Dann genügt auch $E(G)$ der Bedingung $F(\alpha)$.*

Beweis. Es sei $\{A_i \mid i \in M\}$ ein von oben begrenztes disjunktives System aus $E(G)$. Mit einer analogen Methode wie in 13 beweist man, daß es Elemente $a_i \in A_i$ mit folgenden Eigenschaften gibt: $a_i > 0$, $a_{i_1} \wedge a_{i_2} = 0$ für jedes i, $i_1, i_2 \in M$, $i_1 \neq i_2$. Ferner existieren $A \in E(G)$ und $a \in G$, so daß $A \leqq a$ und $A_i \subset A$ für jedes $i \in M$ gilt. Also ist $a_i \leqq a$ für jedes $i \in M$; nach der Voraussetzung gilt daher card $M < \alpha$.

Es sei $\{x_i \mid i \in M\}$ ein System von Elementen einer abelschen Verbandsgruppe G mit der folgenden Eigenschaft: aus $i_1, \ldots, i_n \in M$, $c_1 x_{i_1} + \ldots + c_n x_{i_n} = 0$ (wobei c_i ganze Zahlen sind und je zwei der Indexe $i_1, \ldots, i_n$ voneinander verschieden sind) folgt $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Im solchen Fall heißt das System $\{x_i\}$ linear unabhängig. G ist vom Rang n, wenn in G eine maximale linear unabhängige Teilmenge mit n Elementen existiert.

15. *Es sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ein disjunktives System von Elementen einer abelschen Verbandsgruppe G. Dann ist S linear unabhängig.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial; es sei $n > 1$. Setzen wir voraus, daß $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0$ gilt. Aus der Kommutativität von G folgt, daß es genügt, die Gleichheit $c_n = 0$ zu beweisen. Bezeichnen wir $|c_i| = d_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Dann haben wir $c_n x_n = -c_1 x_1 - \ldots - c_{n-1} x_{n-1}$, also ist

$$0 \leqq d_n x_n \leqq \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i .$$

Nach [1, S. 219, Satz 6) ist aber $d_n x_n \wedge \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i = 0$ und daher bekommen wir $d_n x_n = 0$. Daraus folgt $c_n = 0$.

15.1. Korollar. *Jedes (endliches oder unendliches) disjunktives System von Elementen einer abelschen Verbandsgruppe ist linear unabhängig.*

16. *Es sei G eine archimedische Verbandsgruppe vom endlichen Rang n. Dann besitzt die Verbansdgruppe $E(G)$ eine Basis B mit card $B \leqq n$.*

Beweis. Nach 13 genügt es zu zeigen, daß es in G eine Basis B_1 mit card $B_1 \leqq n$ gibt. Aus 15 folgt, daß für jedes disjunktive System S aus G die Beziehung card $S \leqq n$ gilt. In analoger Weise wie in [7, Lemma 6] beweist man jetzt die Existenz eines maximalen disjunktiven Systems $\{a_i \mid i \in M\}$ in G, so daß jedes Intervall $[0, a_i]$ eine Kette ist. Das System $\{a_i \mid i \in M\}$ ist also eine Basis in G. Durch nochmalige Anwendung von 15 bekommen wir card $M \leqq n$.

17. Satz. *Es sei G eine archimedische Verbandsgruppe vom endlichen Rang n. Für jedes disjunktive System S der Verbandsgruppe $E(G)$ gilt card $S \leqq n$.*

Beweis. Es sei $\{y_1, \ldots, y_m\}$ ein disjunktives System aus $E(G)$. Nach 16 gibt es in $E(G)$ eine Basis $\{x_1, \ldots, x_k\}$ mit $k \leqq n$. Für jedes y_i $(i = 1, \ldots, m)$ gibt es $j(i) \in \{1, \ldots, k\}$ mit $z_i = y_i \wedge x_{j(i)} > 0$. Offensichtlich ist das System $\{z_1, \ldots, z_m\}$ disjunktiv. Wenn $m > n$ ist, so gibt es $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}$, so daß $i_1 \neq i_2$ und $j(i_1) = j(i_2)$ gilt. Da das Intervall $[0, x_{j(i_1)}]$ eine Kette ist, haben wir dann $z_{i_1} \wedge z_{i_2} > 0$, was ein Widerspruch ist.

Bemerkung. Dieses Ergebnis hängt mit der in [8, Satz 3.7] untersuchten Problemstellung zusammen (vgl. auch Math. Reviews *27* (1964), 3720).

LITERATUR

[1] Birkhoff G., *Lattice Theory*, New York 1948.
[2] Conrad P., *Some structure theorems for lattice ordered groups*, Trans. Amer. Math. Soc. *99* (1961), 212—240.
[3] Fuchs L., *Partially Ordered Algebraic Systems*, Oxford 1963.
[4] Hájek O., *Direct decompositions of lattices II*, Czechosl. Math. J. *18* (*87*) (1962), 144—149.
[5] Jakubík J., *Konvexe Ketten in l-Gruppen*, Časop. pěstov. mat. *84* (1959), 53—63.
[6] Якубик Я., *Прямые разложения частично упорядоченных групп II*, Чехосл. матем. ж. *11*(*86*) (1961), 490—515.
[7] Jakubík J., *Kompakt erzeugte Verbandsgruppen*, Math. Nachr. *30* (1965), 193—201.
[8] Weinberg E. C., *Free lattice-ordered abelian groups*, Math. Ann. *151* (1963), 187—199.

Eingegangen am 6. 9. 1965.

Katedra matematiky
Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej,
Košice