

EINE BEMERKUNG ZUR ÜBERDECKUNG DER EBENE DURCH INKONGRUENTE KREISE

ERNEST JUČOVIČ, Košice, JÁN LEŠO, Prešov

Gegeben sei eine Menge von Kreisen $\{K_i\}$, die die Ebene überdecken, d. h. ein jeder Punkt der Ebene gehört wenigstens einem Kreis des Systems $\{K_i\}$. Als die Dichte der Überdeckung der Ebene durch die Kreismenge $\{K_i\}$ ist die Zahl

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum K_i \cap K(r)}{K(r)}$$

definiert, wo $K(r)$ einen Kreis der Ebene mit dem Halbmesser r bedeutet. (Für den Kreis und seinen Inhalt benutzen wir dasselbe Symbol.) Gesucht wird die minimale Dichte $D(q)$ der Überdeckung der Ebene durch Kreise, deren Halbmesser aus dem abgeschlossenen Intervall $\langle q; 1 \rangle$ sind.

Für $q=1$ ist die Lösung dieses Problems schon länger bekannt (s. L. Fejes — Tóth [1]). J. Molnár [5] vermutet eine untere Schranke der $D(q)$ für alle mögliche q und gibt eine obere Schranke der $D(q)$ für q aus dem Intervall $\langle 0,18; 1 \rangle$ an. (S. auch L. Fejes — Tóth [2] und J. Molnár — A. Heppes [6].) Weitere Ergebnisse stammen von A. Florian [3], [4]. In der vorliegenden Bemerkung bringen wir eine obere Schranke der $D(q)$ für kleinere q als bei J. Molnár [5] erwähnt wird; dabei werden die überdeckenden Kreise dreierlei Halbmesser haben. (Bei den Überdeckungen von J. Molnár haben die Kreise nur zwei verschiedene Halbmesser.)

Es gilt

$$(1) \quad D(q) \leq \frac{\pi}{2 \cdot (12 + 7\sqrt{3})} \cdot \left(9r^2 - 6r + \frac{32 + 12\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\text{wo } r = \frac{-q^2 + q \cdot \sqrt{4(2 + \sqrt{3})} - (7 + 4\sqrt{3})q^2}{1 - q^2}$$

für q aus dem Intervall $\langle 0,088; 0,137 \rangle$ und

$$(2) \quad D(q) \leq \frac{\pi}{2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2})} \cdot (3r^2 - 2r + 3 + \sqrt{2}),$$

$$\text{wo } r = \frac{-q^2 + q \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} - (3 + 2\sqrt{2}) \cdot q^2}{1 - q^2}$$

für q aus dem Intervall $\langle 0,137; 0,169 \rangle$.

Die Schranke (1) wird mit Hilfe der archimedischen Mosaik (3, 12, 12) erzielt. (S. Abb. 1.) Die Mittelpunkte der überdeckenden Kreise sind die In-

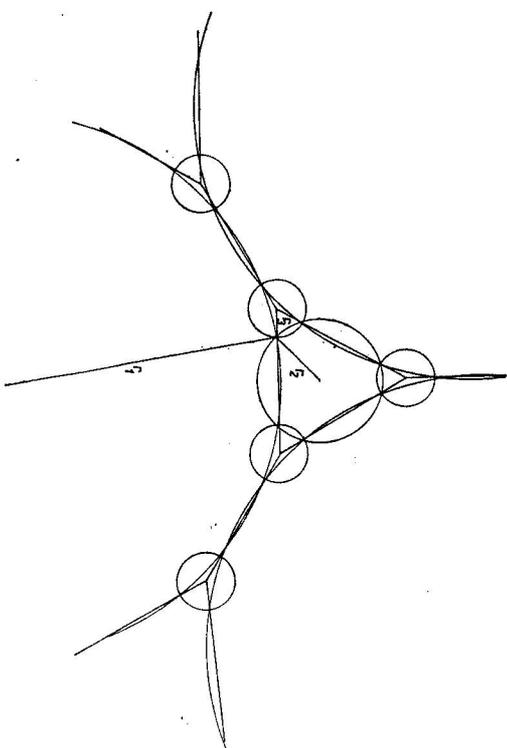


Abb. 1a.

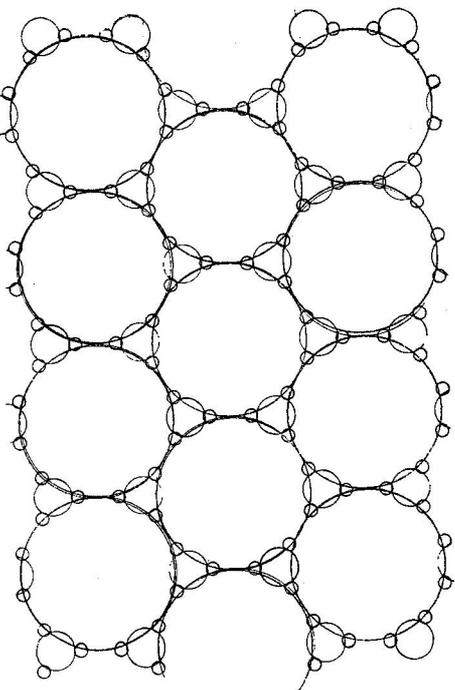


Abb. 1b.

Kreismitelpunkte der regulären Drei- und Zwölfecke (die überdeckenden Kreise mit diesen Mittelpunkten sollen Halbmesser r_1, r_2 haben) und die Eckpunkte der Mosaik (r_3 sei der Halbmesser dieser Kreise). Zu gegebenen r_3 werden solche minimale Werte r_1, r_2 gewählt, bei denen die Ebene noch überdeckt wird. Verschiedene q erhalten wir, wenn sich r_3 ändert; dabei ist $q = \frac{r_2}{r_1}$. Wenn q im Intervall $\langle 0,088; 0,137 \rangle$ ständig abnimmt, dann nimmt auch die dazu gehörende Überdeckungsdichte im Intervall $\langle 1,0805\dots; 1,0998\dots \rangle$ ab. Die Schranke (2) wird auf analoge Weise mit Hilfe der archimedischen

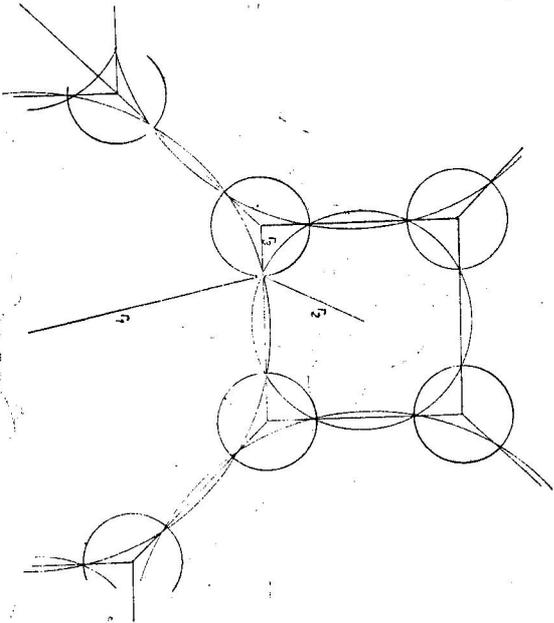


Abb. 2a.

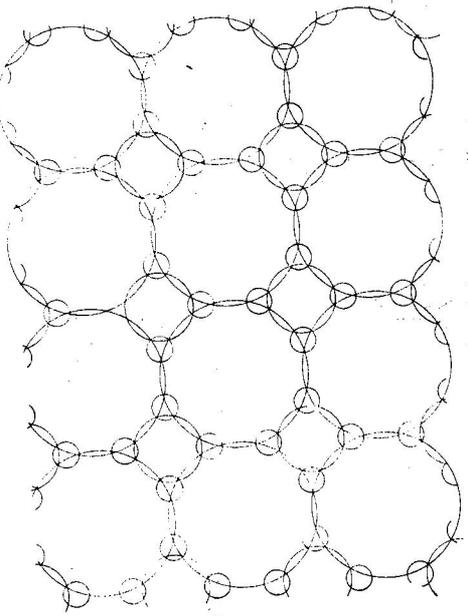


Abb. 2b.

Mosaik (4, 8, 8) erzielt. (S. Abb. 2.) Auch hier sind die Mittelpunkte der überdeckenden Kreise die Inkreismitelpunkte der regulären Polygone und die Eckpunkte der Mosaik. Wenn q im Intervall $\langle 0,137; 0,169 \rangle$ abnimmt, ist die dazugehörige Überdeckungsdichte im Intervall $\langle 1,1058\dots; 1,1058\dots \rangle$ abnehmend.

Übersichtshalber bringen wir auf Abb. 3 eine grafische Darstellung der oberen und unteren Schranke für $D(q)$ aus J. Molnár [5] und dieser Bemerkung. Sie ist grobenteils [5] entnommen. (s stellt die vermutete untere, A die obere Schranke dar.)

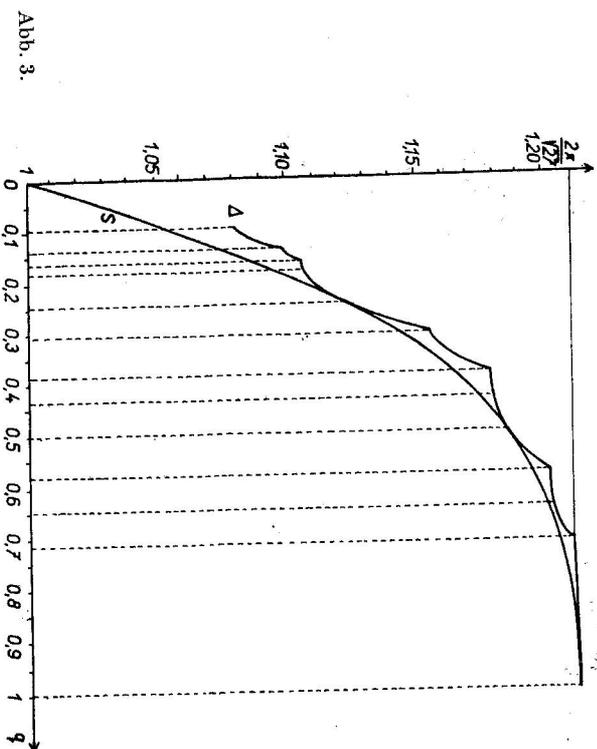


Abb. 3.

Zu Ende sei noch bemerkt: 1. Wir haben festgestellt, dass wenn die archimedischen Mosaiken (3, 4, 6, 4), (4, 6, 12), (3, 6, 3, 6) zur Überdeckung der Ebene auf dieselbe Weise benutzt werden, wie wir es oben mit den Mosaiken (3, 12, 12), (4, 8, 8) getan haben, dann werden nicht bessere Abschätzungen erreicht wie bei J. Molnár [5] und in (1), (2).

2. Die Mosaiken (3, 12, 12), (4, 8, 8) können auf gewisse Art auch zur Unterdeckung der Ebene vorteilhaft benutzt werden. (Bei der Unterdeckung gehört ein jeder Punkt der Ebene höchstens einem Kreis des Systems $\{K_i\}$ an.) Hier besteht das Problem darin Unterdeckungen mit maximaler Dichte zu bestimmen. Die besten erzielten Unterdeckungsdichten sind 0,97618... für $q = 0,0628$ bei der Mosaik (3, 12, 12) und 0,9569... für $q = 0,1082$ bei der Mosaik (4, 8, 8).

LITERATURA

- [1] Fejes-Tóth L., *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953.
 [2] Fejes-Tóth L., *Regular Figures*, Budapest—New York 1964.
 [3] Florian A., *Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Rend. Semin. mat. Univ. Padova 31 (1961), 77—86.
 [4] Florian A., *Zum Problem der dünnsten Kreisüberdeckung der Ebene*, Acta mat. Acad. scient. hung. 12 (1962), 397—400.
 [5] Molnár J., *Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math. 2 (1959), 33—40.
 [6] Hoppes A., Molnár J., *Újabb eredmények a diszkrét geometriában I*, Mat. lapok 11 (1960), 330—355.

Eingegangen am 4. 8. 1965.

*Katedra algebry a geometrie
 Prirodovědecké fakulty
 Univerzity P. J. Šafářika,
 Košice*

*Katedra matematiky
 Pedagogické fakulty
 Univerzity P. J. Šafářika,
 Prešov*