MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

# O SYMETRICKÝCH A CYKLICKÝCH PRIEMEROCH KLADNÝCH ČÍSEL

PAVEL BARTOŠ, ŠTEFAN ZNÁM, Bratislava

## I

V našom článku zavedieme tri nové druhy priemerov kladných čísel a pohovoríme o ich vzťahu k aritmetickému a geometrickému priemeru.

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ sú kladné reálne čísla; nech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, kde $\alpha_i$ sú nezáporné čísla, z ktorých aspoň dve sú nenulové a spĺňujú vzťah

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{1}$$

V ďalšom budeme vždy predpokladať, že $\alpha$ spĺňuje vzťah (1).

V matematickej literatúre sa používajú nasledujúce druhy priemerov kladných čísel:

$G = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$ — geometrický priemer,

$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$ — aritmetický priemer,

$G\alpha = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$ — geometrický priemer s váhou $\alpha$,

$A\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ — aritmetický priemer s váhou $\alpha$.

Zrejme $G$ je špeciálnym prípadom $G_\alpha$ a $A$ je špeciálnym prípadom $A_\alpha$ pri $\alpha = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

V našich úvahách budeme často používať nasledujúcu lemu (pozri [1], strana 17, veta 9.):

**Lema.** *Pre ľubovoľné* $\alpha$ *je*

$$G_\alpha \leqq A_\alpha .$$

*Rovnosť nastane práve vtedy, keď sa navzájom rovnajú* $a_i$ *pre všetky tie* $i$, *pre ktoré* $\alpha_i \neq 0$.

Lemu vyslovíme aj v inej forme (v ktorej ju budeme najviac používať): *Nech* $b_i$ *sú kladné a* $\beta_i$ *nezáporné čísla, pričom* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ *spĺňuje vzťah* (1); *potom*

(2) $$b_1^{\beta_1} . b_2^{\beta_2} \dots b_m^{\beta_m} \leqq \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_m b_m .$$

*Rovnosť nastane práve vtedy, keď sa navzájom rovnajú* $b_i$ *pre všetky tie* $i$, *pre ktoré* $\beta_i \neq 0$.

V knihe [1], na strane 44 je zavedený iný druh priemeru kladných čísel:

$$A_{1\alpha} = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \dots a_{i_n}^{\alpha_n} ,$$

kde $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ prebieha všetky permutácie čísel $1, 2, \dots, n$. $A_{1\alpha}$ sa nazýva symetrický aritmetický priemer s váhou $\alpha$. V [1] na strane 45 je ukázané, že $A_{1\alpha}$ je zovšeobecnením priemerov $A$ a $G$.

Teraz si zavedieme nový druh priemeru kladných čísel:

$$G_{1\alpha} = \prod_{i_1, i_2, \dots, i_n} (\alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \dots + \alpha_n a_{i_n})^{\frac{1}{n!}},$$

kde $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ prebieha všetky permutácie čísel $1, 2, \dots, n$. $G_{1\alpha}$ budeme nazývať symetrickým geometrickým priemerom s váhou $\alpha$.

Zavedenie tohto nového pojmu má toto odôvodnenie:

a) $G_{1\alpha}$ má vlastnosti duálne vlastnostiam $A_{1\alpha}$.

b) $G_{1\alpha}$ je v podstate zovšeobecnením $G$ a $A$. Skutočne, ak položíme $\alpha = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, potom $G_{1\alpha} = A$, ak zase položíme $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, potom $G_{1\alpha} = G$.

Nasledujúca veta porovnáva $G_{1\alpha}$ a $A_{1\alpha}$ s aritmetickým a geometrickým priemerom.

**Veta I.** *Ak* $A, A_{1\alpha}, G, G_{1\alpha}$ *majú predošlý význam, potom pre ľubovoľné* $\alpha$, *pre ktoré aspoň dve z čísel* $\alpha_i$ *sú rôzne od nuly, platí*

(3) $$G \leqq G_{1\alpha} \leqq A , \quad G \leqq A_{1\alpha} \leqq A .$$



*Pri* $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ *nastane vo vzťahoch* (3) *všade rovnosť. Rovnosť ďalej nastane medzi* $G_{1\alpha}$ *a* $A$ *a medzi* $G$ *a* $A_{1\alpha}$ *vtedy, keď* $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$. *Ináč platí všade ostrá nerovnosť.*

Poznámka I. Vzťah $G \leqq A_{1\alpha} \leqq A$ je známy; uvádzame ho len preto, aby sme mohli poukázať na duálnosť.

Dôkaz vety I. a) Najskôr dokážeme vzťahy (3′) $G \leqq G_{1\alpha}, A_{1\alpha} \leqq A$.

Na základe lemy platí

(4) $$a_{i_1}^{\alpha_1} . a_{i_2}^{\alpha_2} \dots a_{i_n}^{\alpha_n} \leqq \alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \dots + \alpha_n a_{i_n}$$

pre ľubovoľnú permutáciu $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, pričom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď sa rovnajú všetky tie $a_i$, pre ktoré $\alpha_i \neq 0$. Znásobením respektíve sčítaním týchto nerovností pre všetky permutácie čísel $1, 2, \dots, n$, dostaneme:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{(n-1)! \sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \leqq (G_{1\alpha})^{n!} \quad \text{resp.} \quad n!\, A_{1\alpha} \leqq (n-1)! \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Z tohto už ľahko dostaneme nerovnosti (3′) odmocnením, resp. delením výrazom $n!$. Rovnosť tu nastane zrejme len vtedy, keď v (4) nastane rovnosť pre všetky permutácie $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Pretože existujú aspoň dve nenulové $\alpha_i$, rovnosť v (4) nastane len vtedy, keď sa všetky $a_i$ navzájom rovnajú (pozri lemu).

b) Teraz dokážeme vzťahy (5) $G_{1\alpha} \leqq A$, $G \leqq A_{1\alpha}$. Položme v leme $m = n!$, $b_j = \alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \dots + \alpha_n a_{j_n}$, resp. $b_j = a_{j_1}^{\alpha_1} . a_{j_2}^{\alpha_2} \dots a_{j_n}^{\alpha_n}$, [kde $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ prebieha všetky permutácie čísel $1, 2, \dots, n$], $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n!} = \frac{1}{n!}$.

Potom dostaneme:

(6) $$\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \dots + \alpha_n a_{j_n})^{\frac{1}{n!}} \leqq \frac{1}{n!} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \dots + \alpha_n a_{j_n}),$$

resp.

$$\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (a_{j_1}^{\alpha_1} . a_{j_2}^{\alpha_2} \dots a_{j_n}^{\alpha_n})^{\frac{1}{n!}} \leqq \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{j_1}^{\alpha_1} . a_{j_2}^{\alpha_2} \dots a_{j_n}^{\alpha_n} .$$

Ľahko sa presvedčíme o platnosti týchto rovností:

(7) $$\sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \dots + \alpha_n a_{j_n}) = (n-1)! \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=1}^{n} a_i = (n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{j_1}^{\alpha_1} . a_{j_2}^{\alpha_2} \dots a_{j_n}^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{(n-1)! \sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{(n-1)!} .$$

Z týchto rovností a z nerovnosti (6) dostaneme:

$$G_{1\alpha} \leqq \frac{1}{n!}(n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i = A, \quad \text{resp.} \quad G = (\Pi a_i^{(n-1)!})^{\frac{1}{n!}} \leqq A_{1\alpha},$$

a tým je dôkaz nerovností (5) ukončený.

Ešte musíme ukázať, kedy nastane rovnosť. Všetky $b_j$ sú rôzne od nuly, a preto na základe lemy a na základe analogických úvah ako v prvej časti dôkazu, rovnosť nastane práve vtedy, keď pre všetky permutácie $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ platí:

$$\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \ldots + \alpha_n a_{j_n} = konšt., \tag{8}$$

resp.

$$a_{j_1}^{\alpha_1} \cdot a_{j_2}^{\alpha_2} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n} = konšt.$$

Dokážme teraz, že rovnosť nastane práve vtedy, keď buď všetky $a_i$ sa navzájom rovnajú, alebo všetky $\alpha_i$ sa navzájom rovnajú. Budeme dokazovať nepriamo:

Predpokladajme, že existujú také indexy $p, r, s, t$, že platí $a_p \neq a_r$ a $\alpha_s \neq \alpha_t$. Zoberme takú permutáciu $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, aby sa na ľavej strane výrazu (8) vyskytovali členy $\alpha_s a_p$ (resp. $a_p^{\alpha_s}$) a $\alpha_t a_r$ (resp. $a_r^{\alpha_t}$). Taká permutácia zrejme existuje. Vymeňme v tejto permutácii medzi sebou čísla $p$ a $r$ (pričom zvyšné čísla ostanú nezmenené). Na základe (8) týmto dvom permutáciám zodpovedajúce výrazy sa navzájom rovnajú, a preto platí:

$$\alpha_s a_p + \alpha_t a_r = \alpha_s a_r + \alpha_t a_p, \quad \text{resp.} \quad a_p^{\alpha_s} \cdot a_r^{\alpha_t} = a_r^{\alpha_s} \cdot a_p^{\alpha_t}.$$

Po úprave dostaneme:

$$(\alpha_s - \alpha_t)(a_p - a_r) = 0, \quad \text{resp.} \quad a_p^{\alpha_s - \alpha_t} = a_r^{\alpha_s - \alpha_t}.$$

To je ale spor s tým, že $\alpha_s \neq \alpha_t$ a $a_p \neq a_r$. Tým je dôkaz vety I ukončený.

## II

V tejto časti práce zavedieme dva nové druhy priemerov, ktorých vlastnosti sú analogické vlastnostiam $G_{1\alpha}$ a $A_{1\alpha}$. Označme

$$G_{2\alpha} = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_1 a_j + \alpha_2 a_{j+1} + \ldots + \alpha_n a_{j+n-1})^{\frac{1}{n}},$$

$$A_{2\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j^{\alpha_1} \cdot a_{j+1}^{\alpha_2} \ldots a_{j+n-1}^{\alpha_n},$$

pričom pre $k > n$ je $a_k = a_{k-n}$; ostatné označenia používame v tom istom zmysle ako v časti I.



$G_{2\alpha}$ nazývame cyklickým geometrickým priemerom s váhou $\alpha$; $A_{2\alpha}$ nazývame cyklickým aritmetickým priemerom s váhou $\alpha$. Analógia $G_{2\alpha}$ s $G_{1\alpha}$ a $A_{2\alpha}$ s $A_{1\alpha}$ je zrejmá. Okrem toho $G_{2\alpha}$ a $A_{2\alpha}$ predstavujú v podstate zovšeobecnenie geometrického a aritmetického priemeru. Skutočne, ak položíme $\bar{\alpha} = (1, 0, \ldots, 0)$, resp. $\bar{\bar{\alpha}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, potom dostaneme: $G_{2\bar{\alpha}} = G$, $G_{2\bar{\bar{\alpha}}} = A$, $A_{2\bar{\alpha}} = A$, $A_{2\bar{\bar{\alpha}}} = G$.

**Veta II.** *Pre ľubovoľné $\alpha$, pre ktoré aspoň dve $\alpha_i$ sú rôzne od nuly, platí:*

$$G \leqq A_{2\alpha} \leqq A, \quad G \leqq G_{2\alpha} \leqq A.$$

*V prípade $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ platí všade znamienko rovnosti. Medzi $A_{2\alpha}$ a $A$ a medzi $G$ a $G_{2\alpha}$ platí rovnosť len v tomto prípade.*

Dôkaz. a) Dokážeme najskôr nerovnosti $G \leqq G_{2\alpha}$ a $A_{2\alpha} \leqq A$. Na základe lemy pre ľubovoľné $i = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$a_i^{\alpha_1} \cdot a_{i+1}^{\alpha_2} \ldots a_{i+n-1}^{\alpha_n} \leqq \alpha_1 a_i + \alpha_2 a_{i+1} + \ldots + \alpha_n a_{i+n-1}.$$

Keď znásobíme, resp. sčítame všetky takéto nerovnosti pre $i = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \leqq G_{2\alpha}^n, \quad \text{resp.} \quad nA_{2\alpha} \leqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Z tohto dostaneme dokazované nerovnosti odmocnením, resp. delením číslom $n$. Na základe podobných úvah ako vo vete I a na základe lemy usúdime, že rovnosť nastane práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

b) Teraz dokážeme nerovnosti (9) $G_{2\alpha} \leqq A$, $G \leqq A_{2\alpha}$.

V leme položme $m = n$, (10) $b_i = \alpha_1 a_i + \alpha_2 a_{i+1} + \ldots + \alpha_n a_{i+n-1}$,
resp. $b_i = a_i^{\alpha_1} \cdot a_{i+1}^{\alpha_2} \ldots a_{i+n-1}^{\alpha_n}$,

$$\beta_i = \frac{1}{n} \quad \text{pre všetky} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dostaneme:

$$G_{2\alpha} \leqq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_i = A, \quad \text{resp.} \quad G = \prod_{i=1}^{n} (a_i^{\alpha_1} \cdot a_{i+1}^{\alpha_2} \ldots a_{i+n-1}^{\alpha_n})^{\frac{1}{n}} \leqq A_{2\alpha}.$$

Zrejme pri $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ nastáva rovnosť. Tým je veta dokázaná.

Poznámka II. Z vety II vyplýva, že podmienka $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ je postačujúca k tomu, aby vo vzťahu (9) nastala rovnosť. Nasledujúci príklad ukazuje, že táto podmienka nie je nutná.

Položme

$$\alpha = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right),$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 2, \quad \text{resp.} \quad a_1' = 1, a_2' = 2, a_3' = 2, a_4' = 1.$$

V prvom prípade platí:

$$G_{2\alpha} = \frac{\sqrt[4]{12^4}}{6} = 2 = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 2) = A.$$

V druhom prípade:

$$A_{2\alpha} = \frac{1}{4} 4 \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} = G.$$

Nepodarilo sa nám určiť všeobecnú nutnú podmienku toho, aby nastala rovnosť. Nasledujúca veta rieši len špeciálny prípad problému; uvádzame ju z toho dôvodu, že ju budeme v tretej časti práce používať.

**Veta III.** *Keď $\{\alpha_i\}$ je rýdzo monotónna postupnosť, potom vo vzťahoch* (9) *platí znamienko rovnosti vtedy a len vtedy, keď*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n \left(= \frac{1}{n}\right). \tag{11}$$

Dôkaz. Ľahko sa presvedčíme o tom, že (11) je postačujúca podmienka k platnosti $G_{2\alpha} = A$ a $G = A_{2\alpha}$.

Z dôkazu vety II (pozri časť b) a z lemy vyplýva: ak vo vzťahoch (9) nastane rovnosť, potom pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ musí platiť:

$$\alpha_i a_1 + \alpha_{i+1} a_2 + \ldots + \alpha_{i+n-1} a_n = \alpha_{i+1} a_1 + \alpha_{i+2} a_2 + \ldots + \alpha_{i+n} a_n, \tag{12}$$

resp.

$$a_1^{\alpha_i} a_2^{\alpha_{i+1}} \ldots a_n^{\alpha_{i+n-1}} = a_1^{\alpha_{i+1}} a_2^{\alpha_{i+2}} \ldots a_n^{\alpha_{i+n}},$$

kde $\alpha_k = \alpha_{k-n}$, pre $k > n$. Výrazy vo vzťahu (12) dostaneme z výrazov (10) cyklickou zámenou poradia sčítancov resp. činiteľov. Po úprave dostaneme z (12) rovnosť:

$$(a_1 - a_2)(\alpha_i - \alpha_{i+1}) + (a_2 - a_3)(\alpha_i - \alpha_{i+2}) + \ldots + \\ + (a_{n-1} - a_n)(\alpha_i - \alpha_{i-n+1}) = 0, \tag{13}$$

resp.

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(\alpha_i - \alpha_{i+1})} \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(\alpha_i - \alpha_{i+2})} \ldots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{(\alpha_i - \alpha_{i+n-1})} = 1.$$



Nech $\alpha_l = \max\limits_{1 \le k \le n} \alpha_k$; potom $\alpha_l - \alpha_k \geqq 0$ pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Postupnosť $\{a_i\}$ je rýdzo monotónna, preto výrazy $(a_k - a_{k+1})$ sú buď všetky kladné, buď všetky záporné $\left(\text{výrazy } \frac{a_k}{a_{k+1}} \text{ sú buď všetky menšie ako jedna, buď všetky väčšie ako jedna}\right)$. Teda rovnosti (13) môžu byť splnené len vtedy, keď $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. Tým je dôkaz vety ukončený.

## III

V tejto časti ukážeme niekoľko aplikácií vzťahov uvedených v časti II.

**Veta IV.** *Pre každé prirodzené číslo $n > 2$ platí:*

$$\frac{2^{2n}}{n+1} < \binom{2n}{n} < \frac{(2n+2)^n}{(n+1)!}. \tag{14}$$

Dôkaz. Položme $a_i = i$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$; $\alpha_j = 0$ pre $j = 3, 4, \ldots, n$. Na základe nerovnosti $G \leqq G_{2\alpha} \leqq A$ (veta II) a na základe vety III dostaneme:

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{\frac{1+2}{2} \cdot \frac{2+3}{2} \cdots \frac{n+n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}} < \frac{n(n+1)}{2n}.$$

Po úprave máme:

$$2^n < \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1) \,.\, (n+1)}{n!} < \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Keď stredný výraz upravíme a celú nerovnosť vydelíme výrazom $n + 1$, dostaneme:

$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (2n-1) \,.\, 2n}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n \,.\, n!} < \frac{(n+1)^{n-1}}{n!},$$

čiže

$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{(2n!)}{(n!)^2 \,.\, 2^n} < \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}.$$

Keď celú nerovnosť vynásobíme $2^n$, dostaneme (14).

**Veta V.** *Nech prirodzené číslo $n \geqq 2$; nech $a$ je kladné reálne číslo. Potom*

$$\left(\frac{n+a}{a}\right)^n < \left(\frac{\frac{n(n+1)}{2a} + n}{n}\right) < \frac{1}{n!}\left(\frac{(n+1)(n+a)}{2a}\right)^n. \tag{15}$$

Dôkaz. Položme $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \frac{1}{n+a}$, $\alpha_n = \frac{a+1}{n+a}$, $a_i = i$. Na základe nerovnosti $G \leqq G_{2\alpha} \leqq A$ (veta II) a na základe vety III máme:

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{\frac{1+2+\ldots+n+an}{n+a} \cdot \frac{2+3+\ldots+n+1+a}{n+a} \cdots \frac{n+1+2+\ldots+(n-1)+(n-1)a}{n+a}} <$$

$$< \frac{n(n+1)}{2n}.$$

Po umocnení a vynásobení výrazom $(n+a)^n$ dostaneme:

$$(n+a)^n \,.\, n! < \left[\binom{n+1}{2} + an\right] \cdot \left[\binom{n+1}{2} + a\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\binom{n+1}{2} + 2a\right] \cdots \left[\binom{n+1}{2} + (n-1)a\right] < \left(\frac{(n+1)(n+a)}{2}\right)^n.$$

Keď celú nerovnosť vydelíme $a^n \,.\, n!$, dostaneme (15).

**Dôsledok.** *Pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \geqq 2$ a pre ľubovoľné kladné reálne číslo $b$ platí:*

$$\left(\frac{n+1+2b}{n+1}\right)^n < \binom{n+b}{n} < \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1+2b}{2}\right)^n. \tag{16}$$

Dôkaz. Ak položíme $a = \frac{n(n+1)}{2b}$ a dosadíme do (15), dostaneme nerovnosť (16).

## LITERATÚRA


[1] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.



Došlo 4. 9. 1965.



*Katedra matematiky Chemickotechnologickej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej, Bratislava*


## ON SYMMETRIC AND CYCLIC MEANS OF POSITIVE INTEGERS


Pavel Bartoš, Štefan Znám


Summary


Three new kinds of means ($G_1\alpha$, $A_2\alpha$, $G_2\alpha$) are introduced and the relation between them and the known kinds of means is shown.