MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ И ВЕКТОРНОЙ МЕР

МИЛОСЛАВ ДУХОНЬ (MILOSLAV DUCHOŇ), Братислава

В этой статье применяются теоремы о расширении векторной меры из кольца на наименьшее над ним σ-кольцо [1] к построению прямого произведения скалярной(1) и векторной мер. Под векторной мерой (см. напр. [1], [3], [6]) понимается σ-аддитивная функция множества μ, определенная на алгебре $\mathscr{P}$ подмножеств множества P со значениями в линейном топологическом пространстве X над полем действительных или комплексных чисел (короче скаляров).

Главным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть m — скалярная мера на σ-алгебре $\mathscr{M}$ подмножеств множества M. Пусть μ — векторная мера на σ-алгебре $\mathscr{P}$ подмножеств множества P со значениями в секвенциально полном локально выпуклом линейном топологическом пространстве X.*

Тогда существует и притом только одна векторная мера ν, со значениями в X, на σ-алгебре, порожденной множествами вида $C = A \times B$, $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{P}$, и такая, что

$$\nu(A \times B) = m(A)\mu(B), \quad A \in \mathscr{M}, \quad B \in \mathscr{P}.$$

A. Случай векторной меры со значениями в банаховом пространстве

Первым шагом будет доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть m — скалярная мера на σ-алгебре $\mathscr{M}$ подмножеств множества M. Пусть μ — векторная мера на σ-алгебре $\mathscr{P}$ подмножеств множества P со значениями в линейном нормированном пространстве X.*

Тогда существует и притом только одна векторная мера $\lambda = m \times \mu$ со значениями в X, определенная на алгебре $\mathscr{R} = \mathscr{M} \times \mathscr{P}$, порожденной в $R = M \times P$ множествами вида $C = A \times B$, $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{P}$, и такая, что

$$\lambda(A \times B) = m(A)\mu(B).$$

Доказательство. Данное доказательство является модификацией для „векторного" случая доказательства аналогичной теоремы для неотрицательных мер [4] (VIII. 2.2, VIII. 2.3).

Таким же способом, как и в случае скалярных мер [4, 5] (VIII. 2.1 и § 36.8 соответственно), можно доказать существование единственной конечно аддитивной функции $\lambda = m \times \mu$ на алгебре $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$ со значениями в X и такой, что $\lambda(A \times B) = m(A)\mu(B)$, $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{P}$.

Нам нужно еще показать, что она σ-аддитивна. Для этой цели докажем следующее утверждение. Если

$$C_n \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}, \; C_{n+1} \subset C_n, \; \|\lambda(C_n)\| > \varepsilon > 0$$

для $n = 1, 2, \ldots$, то существует точка $(u_0, v_0) \in C_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Из того, что $\|\lambda(C_n)\| > \varepsilon > 0$, вытекает

$$0 < \varepsilon < \|\lambda(C_n)\| = \|\lambda(\bigcup_{i=1}^{N} A_i^n \times B_i^n)\| = \|\sum_{i=1}^{N} m(A_i^n)\mu(B_i^n)\| \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{N} |m|(A_i^n)\|\mu\|(P) = |m|(M)\|\mu\|(P), \quad A_i^n \cap A_j^n = \emptyset, \; i \neq j, \; \bigcup_{i=1}^{N} A_i^n = M,$$

где $|m|$, $\|\mu\|$ обозначают соответственно полную вариацию функции m [3](III. 1.4) и полувариацию функции μ [3](IV. 10.3). Притом ясно, что те свойства полувариации, которые здесь используются, не требуют, чтобы X было банаховым пространством, а достаточно, чтобы X было нормированным пространством. Имеем $0 < |m|(M)$, $0 < \|\mu\|(P)$. Кроме того, скалярная мера на σ-алгебре имеет ограниченную полную вариацию [3](III. 4.7), поэтому $0 < |m|(M) < \infty$. Для векторной меры на σ-алгебре $\mathscr{P}$ со значениями в банаховом пространстве имеет место $\|\mu\|(B) < \infty$, $B \in \mathscr{P}$, но очевидно, что это имеет место также в случае только нормированного пространства (так как если μ принимает значения из X, то μ принимает значения также из его пополнения $\bar{X}$, а полувариация векторной меры не изменится, если рассматривать ее со значениями в X или в $\bar{X}$). Поэтому $0 < \|\mu\|(P) < \infty$. Обозначим через

$$D = \left\{u \in M : \|\mu\|(C_u) \geqq \frac{\varepsilon}{2|m|(M)}\right\},$$

где C_u — сечение множества C в точке u. Покажем, что

$$|m|(D) \geqq \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|(P)}.$$

(1) Т. е. конечной действительной или комплексной.

Пусть $C = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j$, где A_j — попарно непересекающиеся множества, $A_j \in \mathscr{M}$, $B_j \in \mathscr{P}$, $j = 1, \ldots, n$, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = M$. Можно предполагать, что

$$\|\mu\|(B_j) < \frac{\varepsilon}{2|m|(M)}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

$$\|\mu\|(B_j) \geqq \frac{\varepsilon}{2|m|(M)}, \quad j = p+1, \ldots, n,$$

и значит, $D = A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$. Имеем

$$\varepsilon \leqq \|\lambda(C)\| = \|\sum_{j=1}^{p} m(A_j)\mu(B_j) + \sum_{j=p+1}^{n} m(A_j)\mu(B_j)\| \leqq$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} |m|(A_j)\|\mu\|(B_j) + \sum_{j=p+1}^{n} |m|(A_j)\|\mu\|(B_j) \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2|m|(M)} \sum_{j=1}^{p} |m|(A_j) + \sum_{j=p+1}^{n} |m|(A_j)\|\mu\|(B_j) \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + |m|(D)\|\mu\|(P),$$

откуда вытекает, что $|m|(D) \geqq \dfrac{\varepsilon}{2\|\mu\|(P)}$.

Теперь уже аналогично [4](VIII. 2.3) можно легко доказать существование точки $(u_0, v_0) \in C_n$, $n = 1, 2, \ldots$, используя σ-аддитивность полной вариации $|m|$ и σ-аддитивность функции μ. Из этого уже вытекает доказательство σ-аддитивности функции λ. Мы показали, что функция $\lambda = m \times \mu$ является векторной мерой на алгебре $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$ со значениями в пространстве X.

Примечание. Если бы X было слабо секвенциально полным линейным нормированным пространством, то справедливость теоремы вытекает из [1] (теорема 2.3, стр. 179). Достаточно принять во внимание, что для всякого $x^* \in X^*$ (X^* — пространство всех непрерывных линейных функционалов на X) есть $x^*\lambda = m \times x^*\mu$ на алгебре $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$, и что $x^*\mu$ — скалярная мера. В этом частном случае получается сразу окончательное решение нашей задачи. Действительно, пусть $C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}$ и $x^* \in X^*$ произвольные. Тогда имеем

$$|x^*\lambda(C)| = |x^* \sum_{i=1}^{n} m(A_i)\mu(B_i)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |m(A_i)|\, |x^*\mu(B_i)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} |m|(A_i)c_{x^*} \leqq c_{x^*}\, |m|(M),$$

так как $x^*\mu$ — скалярная мера на σ-алгебре, а значит, она ограничена на $\mathscr{P}$[3] (III. 4.6) некоторой постоянной c_{x^*}, и, кроме того, $|m|(M) < \infty$. Тем самым мы показали, что для всякого $x^* \in X^*$ функция $x^*\lambda$ ограничена на алгебре $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$, и поэтому [3] (III. 1.5) имеет ограниченную полную вариацию. Из этого вытекает, что функцию λ [1] (теорема 5.1, стр. 189) можно продолжить однозначно до векторной меры $\bar{\lambda}$ со значениями в X, определенной на σ-алгебре, порожденной алгеброй $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$.

В более общем же случае банахова пространства нам придется воспользоваться еще одной леммой, к доказательству которой мы сейчас приступаем.

Пусть S — некоторое множество. Известно [2] (II. § 2(1)), что множество скалярных функций, безусловно суммируемых на S, представляет собой банахово пространство $l^1(S)$ с нормой

$$\|\eta\| = \sum_{s \in S} |\eta(s)|.$$

Лемма 2. *Пусть S — слабо относительно компактное подмножество банахова пространства X. Пусть Q — некоторое множество и пусть φ — отображение множества Q в S. Определим отображение $T: l^1(Q) \to X$ формулой*

$$T\eta = \sum_{q \in Q} \eta(q)\varphi(q)$$

для всякого $\eta \in l^1(Q)$.

Тогда отображение T — слабо вполне непрерывный линейный оператор из $l^1(Q)$ в X.

Доказательство. Каждому $\eta \in l^1(Q)$ поставим в соответствие элемент $\eta' \in l^1(S)$ следующим образом:

$$\eta'(s) = \sum_{q \in \varphi^{-1}\{s\}} \eta(q)$$

для всех $s \in S$. Так определенное η' будет действительно из $l^1(S)$, так как

$$\|\eta'\| = \sum_{s \in S} |\eta'(s)| = \sum_{s \in S} (|\sum_{q \in \varphi^{-1}\{s\}} \eta(q)|) \leqq \sum_{s \in S} (\sum_{q \in \varphi^{-1}\{s\}} |\eta(q)|) \leqq$$

$$\leqq \sum_{q \in Q} |\eta(q)| = \|\eta\|.$$

Тем самым определено отображение $T_1 : l^1(Q) \to l^1(S)$, причем, очевидно, $\|T_1\| \leqq 1$. Из определения отображения T имеем

$$[*] \qquad T\eta = \sum_{q\in Q} \eta(q)\varphi(q) = \sum_{s\in S} \eta'(s)s.$$

Отображение T' из $l^1(S)$ в X:

$$T'\eta' = \sum_{s\in S} \eta'(s)s$$

представляет собой [2] (III. § 3, лемма 2) слабо вполне непрерывный линейный оператор из $l^1(S)$ в X. На основании [*] имеем $T = T'\ T_1$, и поэтому [3] (VI. 4.5) T — слабо вполне непрерывный линейный оператор из $l^1(Q)$ в X.

Теорема 3. *Пусть m — скалярная мера на σ-алгебре $\mathscr{M}$ подмножеств множества M. Пусть μ — векторная мера на σ-алгебре $\mathscr{P}$ подмножеств множества P со значениями в банаховом пространстве X.*

Тогда существует и притом только одна векторная мера $\nu = m \times_\sigma \mu$ на σ-алгебре $\mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$, порожденной множествами вида $C = A \times B$, $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{P}$, и такая, что

$$(1) \qquad \nu(A \times B) = m(A)\mu(B), \quad A \in \mathscr{M},\ B \in \mathscr{P}.$$

Векторная мера $\nu = m \times_\sigma \mu$ на $\mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$ называется прямым произведением скалярной меры m и векторной меры μ. Из (1) следует, что векторная мера ν (если она существует) представляет собой продолжение σ-аддитивной функции $\lambda = m \times \mu$ на наименьшую σ-алгебру $\mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$, содержащую алгебру $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$.

Доказательство. На основании теоремы 1 функция $\lambda = m \times \mu$ — векторная мера на $\mathscr{M} \times \mathscr{P}$ со значениями в X. Достаточно показать, что множество $\{\lambda(C) : C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}\}$ значений векторной меры λ — слабо относительно компактное подмножество в X, так как тогда λ можно [1] (теорема 4.1, стр. 186) однозначно продолжить до векторной меры $\bar{\lambda}$ на $\mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$.

Известно [6] (Теорема 2.9, стр. 299), что множество $S = \{\mu(B) : B \in \mathscr{P}\}$ значений векторной меры μ — слабо относительно компактное подмножество пространства X. Если в лемме 2 положить $Q = \mathscr{P}$ и $\varphi = \mu$, то отображение $T : l^1(\mathscr{P}) \to X$:

$$T\eta = \sum_{p\in\mathscr{P}} \eta(p)\mu(p), \quad \eta \in l^1(\mathscr{P}),$$

представляет собой слабо вполне непрерывный линейный оператор из $l^1(\mathscr{P})$ в X, т.е. оно отображает каждое ограниченное множество в $l^1(\mathscr{P})$ в слабо относительно компактное множество в X.

Возьмем произвольное множество $C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}$. Можно предполагать, что оно имеет вид

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i,\quad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = M,\ A_i \in \mathscr{M},\ B_i \in \mathscr{P},$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Каждому множеству $C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}$ сопоставим функцию η_c на $\mathscr{P}$ следующим образом. Для $B \neq B_i$, $i = 1, \ldots, n$ положим $\eta_c(B_i) = 0$ и для $i = 1, \ldots, n$ положим $\eta_c(B_i) = m(A_i)$. Семейство $\mathscr{H}$ всех таких функций η_c для всех $C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}$ есть подмножество в $l^1(\mathscr{P})$, более того даже ограниченное подмножество. Действительно, пусть $\eta_c \in \mathscr{H}$, тогда имеем

$$\|\eta_c\| = \sum_{p\in\mathscr{P}} |\eta_c(p)| = \sum_{i=1}^{n} |m(A_i)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |m|(A_i) \leqq$$

$$\leqq |m|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqq |m|(M) < \infty$$

для всех $\eta_c \in \mathscr{H}$. Оператор T переводит множество $\mathscr{H}$ в слабо относительно компактное подмножество в X, которое совпадает с множеством

$$\{\lambda(C) : C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}\},\quad \lambda(C) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)\mu(B_i),$$

значений векторной меры λ, т.е. множество $\{\lambda(C) : C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}\}$ — слабо относительно компактное подмножество в пространстве X. Теорема доказана.

B. Случай векторной меры со значениями в локально выпуклом пространстве

Интересен вопрос, можно ли теорему 3 обобщить на случай, когда X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, которое секвенциально полное. Ответ положительный, как показывает следующее доказательство главной теоремы. Это обобщение можно получить из теоремы 3 с помощью приема, использованного И. Клуванеком в [1] (доказательство теоремы 4.2, стр. 187).

Доказательство теоремы. Обозначим через $\mathscr{N}$ семейство преднорем, которые определяют топологию в X. Для $p \in \mathscr{N}$ определим нормированное пространство X'_p следующим образом. Для $x, y \in X$ положим $x \equiv y (\mathrm{mod}\, p)$ тогда и только тогда, когда $p(x - y) = 0$. Пространство X тем самым распадается на непересекающиеся классы элементов взаимно эквивалентных в смысле этой эквивалентности. Множество таких классов обозначим через X'_p. Класс, содержащий элемент x, обозначим через x^p. Если положить $\|x^p\|_p = p(x)$ для произвольного $x \in X$, то функция $\|\cdot\|_p$ станет нормой на множестве X'_p. Пусть X_p — пополнение пространства X'_p в смысле этой нормы.

Рассмотрим для каждого $p \in \mathscr{N}$ векторную меру μ^p, определенную на σ-алгебре $\mathscr{P}$ при помощи равенства $\mu^p(B) = (\mu(B))^p$, значения ее принадлежат пространству X'_p и пространству X_p (это банахово пространство). По теореме 3 существует и притом только одна векторная мера $\overline{\lambda^p}$, $p \in \mathscr{N}$, на σ-алгебре $\mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$, со значениями в X_p, и такая, что

$$\overline{\lambda^p}(A \times B) = m(A)\mu^p(B), \quad A \in \mathscr{M}, \; B \in \mathscr{P}.$$

Очевидно, имеют место равенства

$$\overline{\lambda^p}(A \times B) = (m(A)\mu(B))^p, \quad A \in \mathscr{M}, \; B \in \mathscr{P},$$

$$\overline{\lambda^p}(C) = (\lambda(C))^p, \quad C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}, \quad C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j.$$

Кроме того, для каждого $C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}$ пересечение классов $\bigcap_{p \in \mathscr{N}} \overline{\lambda^p}(C) = \bigcap_{p \in \mathscr{N}} (\lambda(C))^p$ содержит один и только один элемент из X, а именно $\lambda(C)$, так как $\mathscr{N}$ — семейство преднорем, определяющее топологию хаусдорффова пространства X.

Теперь точно также, как и в [1] (стр. 188) можно доказать, что для всех $C \in \mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$ имеет место:

1. $\overline{\lambda^p}(C) \in X'_p$ для каждого $p \in \mathscr{N}$.

2. Пересечение классов $\bigcap_{p \in \mathscr{N}} \overline{\lambda^p}(C)$ содержит единственный элемент x из X, который обозначим $\bar{\lambda}(C)$, чем определена некоторая функция $\bar{\lambda}$ на $\mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$, которая является векторной мерой на $\mathscr{M} \times_\sigma \mathscr{P}$ со значениями в X, и такая, что $\bar{\lambda}(C) = \lambda(C)$ для $C \in \mathscr{M} \times \mathscr{P}$.

Следствие. *Пусть m — скалярная мера на σ-кольце (δ-кольце) $\mathscr{M}$ подмножеств множества M. Пусть μ — векторная мера на σ-кольце (δ-кольце) $\mathscr{P}$ подмножеств множества P со значениями в секвенциально полном локально выпуклом линейном топологическом пространстве X.*

Тогда существует и притом только одна векторная мера ν, со значениями в X, на σ-кольце (δ-кольце), порожденном множествами вида $C = A \times B$, $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{P}$, и такая, что

$$\nu(A \times B) = m(A)\mu(B), \quad A \in \mathscr{M}, \; B \in \mathscr{P}.$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{P}$ — σ-кольца. Для каждого $p \in \mathscr{N}$ существуют множества $M \in \mathscr{M}$ и $P_p \in \mathscr{P}$ такие, что $m(A - M) = 0$ для всех $A \in \mathscr{M}$ и $p(\mu(B - P_p)) = 0$ для всех $B \in \mathscr{P}$ ([1] Теорема 3.1). Из этого следует, что можно поступать аналогично тому как в доказательстве теоремы.

Если $\mathscr{M}$ и $\mathscr{P}$ δ-кольца, то к каждому множеству C из δ-кольца, порожденного множествами вида $A \times B$, $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{P}$, существуют множества $A \in \mathscr{M}$ и $B \in \mathscr{P}$ такие, что $C \subset A \times B$. Кроме того, система тех множеств C, для которых $C \subseteq A \times B$, образует σ-алгебру подмножеств множества $A \times B$. Из этого можно вывести утверждение по теореме.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Клуванек И., *К теории векторных мер*, Mat.-fyz. časop. *11* (1961), 173—191.
[2] Day M. M., *Normed linear spaces*, Berlin 1958.
[3] Dunford N., Schwartz J. T., *Linear Operators I*, New York 1958.
[4] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste I*, Warszawa 1958.
[5] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1962.
[6] Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J. T., *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. 7 (1955), 289—305.

Поступило 22. 7. 1965

ČSAV, Matematický ústav Slovenskej akadémie vied, Bratislava