MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

QUADRATISCHE DOPPELVERHÄLTNISSCHAREN AUF REGELFLÄCHEN

JOSEF VALA, Brno

In der Arbeit betrachtet man die Eigenschaften der Kegelschnittflächen, die zur gegebenen quadratischen R-Schar gehören. Weiter werden die Eigenschaften des Paares der quadratischen R-Systeme mit gleichen Grundkurven untersucht.

a) Betrachten wir eine Regelfläche Φ in dem projektiven dreidimensionalen Raum P_3. Die Fläche Φ sei keine Torse. Ihre Gleichung kann man in der Form

$$x = y(u) + vz(u) \tag{1}$$

angeben. Die Differentialgleichungen der Leitlinien der Fläche Φ haben die Gestalt:

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z', \\ z'' &= \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'; \end{aligned} \tag{2}$$

die Striche bedeuten Ableitungen nach u.

Durch die Differentialgleichung

$$v' + \alpha(u) + 2\beta(u)v + \gamma(u)v^2 = 0, \tag{3}$$

wo α, β, γ die gegebenen Funktionen des Parameters u sind, ist auf der Fläche Φ eine *Doppelverhältnisschar* (*R-Schar*) bestimmt. Die Linien der R-Schar schneiden die Erzeugenden der Fläche Φ in den projektiven Punktreiben durch.

Die Tangenten der Linien der R-Schar in den Punkten der Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine Geradenschar Γ_1 der Quadrik Ψ (Mayer [2], S. 4.). Die Quadriken Ψ längs aller Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine einparametrische Schar Ψ_u. Die Charakteristiken der Schar Ψ_u bestehen immer aus der Geraden und aus der Kurve k dritter Ordnung.

Wenn wir durch x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten des Punktes X bezeichnen,

$$X = x_1y + x_2z + x_3y' + x_4z',$$

dann gilt für die Kurve k (bei dem konstanten Wert des Parameters u):

$$x_1 = \varphi + B' + 2(B + \psi)(\beta + \gamma v) - B(\beta_{11} + v\beta_{21}),$$
$$x_2 = v(\varphi + B') - 2(B + \psi)(\alpha + \beta v) - B(\beta_{12} + v\beta_{22}),$$
$$x_3 = \psi + 2B,$$
$$x_4 = v(\psi + 2B), \tag{4}$$

wo $B = -\alpha - 2\beta v - \gamma v^2$,

$$\varphi = -v^2\alpha_{21} + v(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \alpha_{12}, \quad \psi = -v^2\beta_{21} + v(\beta_{22} - \beta_{11}) + \beta_{12}$$

(siehe [4]).

Wenn sich der Parameter u ändert, dann sind die Relationen (4) Gleichungen der Fläche Ω.

Grundkurven einer Doppelverhältnisschar nennt man das Kurvenpaar, in dessen Punkten die Kurven der R-Schar die asymptotischen Linien

$$2v' - \beta_{21}v^2 + (\beta_{22} - \beta_{11})v + \beta_{12} = 0 \tag{5}$$

der Fläche Φ berühren (Barner [1], S. 57).

Weiter werden wir voraussetzen, daß y, z die Grundkurven der R-Schar sind. Die Differentialgleichung aller R-Scharen, die die Linien y, z als Grundkurven haben, lautet dann:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta'_{21}}{2} v^2 - 2\beta(u)v - \frac{\beta_{12}}{2}, \tag{6}$$

wo β eine beliebige Funktion des Parameters u ist. Diese R-Scharen bezeichnen wir mit $R(y, z)$.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß keine der Linien y, z die asymptotische Kurve der Fläche Φ berührt und daß keine der Linien y, z durch die Fleknodalpunkte der Fläche Φ geht. Die Linien y, z seien im Sinne von Terracini [3] nicht konjugiert.

Weiter werden wir einige Ergebnisse der Behandlung [4] einführen, diese Ergebnisse sind für die weiteren Betrachtungen nützlich.

Es existieren zwei $R(y, z)$-Scharen mit der Eigenschaft, daß die zugehörigen Kurven dritter Ordnung k immer in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfallen. Wir bezeichnen diese R-Scharen mit $R_1(y, z)$, $R_2(y, z)$ und nennen sie *quadratisch*. Durch die Differentialgleichung (6) ist die $R_1(y, z)$-Schar bestimmt, wenn

$$\beta\beta_{12} = -\alpha_{12} + \frac{\beta'_{12}}{2} - \frac{\beta_{11}\beta_{12}}{2} \tag{7a}$$

gilt, ähnlich bestimmt die Gleichung (6) die $R_2(y, z)$-Schar, wenn für β

$$\beta\beta_{21} = \alpha_{21} - \frac{\beta'_{21}}{2} + \frac{\beta_{21}\beta_{22}}{2} \tag{7b}$$

gilt.

Die quadratischen Charakteristiken der $R_1(y, z)$-Schar bezeichnen wir mit $k_1(y, z)$, ähnlich die quadratischen Charakteristiken der $R_2(y, z)$-Schar mit $k_2(y, z)$.

Durch eine passende Transformation des Parameters u und durch eine passende Umnormung der Linien y, z kann man erreichen, daß die parametrische R-Schar ($v' = 0$) folgende Eigenschaften hat: Sie enthält die Linien y, z und ist gerade die R-Schar, die A. Terracini in der Arbeit [3] benützt.

Wir setzen voraus, daß die Gleichungen (1), (2) schon diese Form haben, es gilt dann:

$$\beta_{12} = \beta_{21} = 1, \quad \beta_{11} + \beta_{22} = 0. \tag{8}$$

Für die Kegelschnittsflächen $\Omega_1(y, z)$, $\Omega_2(y, z)$, die durch die Kurven $k_1(y, z)$, bzw. $k_2(y, z)$ gebildet werden (bei der Änderung des Parameters u), bekommen wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= v[-\alpha_{21} - 3\alpha_{12}] + [\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{12}\beta_{22}], \\ x_2 &= v^2[-\alpha_{21} - \alpha_{12}] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha_{12}^2 - 2\alpha_{12}\beta_{22}] - 2\alpha_{12}, \\ x_3 &= 4\alpha_{12}, \\ x_4 &= 4v\alpha_{12}; \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= v^2[2\alpha_{21}] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha_{21}^2 - 2\alpha_{21}\beta_{22}] + [\alpha_{12} + \alpha_{21}], \\ x_2 &= v^2[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha_{21}^2 + 2\alpha_{21}\beta_{22}] + v[\alpha_{12} + 3\alpha_{21}], \\ x_3 &= -4v\alpha_{21}, \\ x_4 &= -4v^2\alpha_{21}. \end{aligned} \tag{9b}$$

Längs der Kurve $k_1(y, z)$ berührt die Fläche $\Omega_1(y, z)$ eine Kegelfläche mit der Spitze $V_1(y, z)$

$$(-\alpha_{12} + \alpha_{21})y + (\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha_{12}^2 - 2\alpha_{12}\beta_{22})z + 4\alpha_{12}z'. \tag{10a}$$

Ähnlich berührt längs der Kurve $k_2(y, z)$ die Fläche $\Omega_2(y, z)$ eine Kegelfläche mit der Spitze $V_2(y, z)$

$$(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha_{21}^2 - 2\alpha_{21}\beta_{22})y + (-\alpha_{12} + \alpha_{21})z - 4\alpha_{21}y'. \tag{10b}$$

Die Verbindungsgeraden $\bar{n}(y, z)$ der Punkte $V_1(y, z)$, $V_2(y, z)$, die immer demselben Wert des Parameters u entsprechen, bilden eine Regelfläche.

Wir bezeichnen mit $R(\bar{n}, y, z)$ eine Doppelverhältnisschar mit folgender Eigenschaft: Die zugehörigen Berührquadriken gehen durch die zugehörigen (d. h. für demselben Wert des Parameters u) Geraden $\bar{n}(y, z)$. Die Differentialgleichung der $R(\bar{n}, y, z)$-Schar lautet:

$$\begin{aligned} &4\alpha_{12}\alpha_{21}v' + \alpha_{21}(-\alpha_{12} + \alpha_{21})v^2 + v[-\alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - \\ &- 4\alpha_{21}^2 - 2\alpha_{21}\beta_{22}) - \alpha_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha_{12}^2 - 2\alpha_{12}\beta_{22})] + \\ &+ \alpha_{12}(-\alpha_{12} + \alpha_{21}) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Wir werden noch einige Ergebnisse der angeführten Gleichungen angeben.

Die Tangente der Linie $k_1(y, z)$ in ihrem Schnittpunkt mit der Geraden p der Fläche Φ (er liegt auf der Kurve z) und die Tangente der Kurve z in demselben Punkte fallen zusammen, wenn

$$\alpha_{21} + 3\alpha_{12} = 0$$

gilt. Ähnlich fallen die Tangente der Linie $k_2(y, z)$ in ihrem Schnittpunkt mit der Geraden p der Fläche Φ (er liegt auf der Kurve y) und die Tangente der Kurve y in demselben Punkt zusammen, wenn

$$\alpha_{12} + 3\alpha_{21} = 0$$

gilt.

Aus den Gleichungen (10) bekommen wir: Der Punkt $V_2(y, z)$ liegt auf der Tangente der Kurve y nur in dem Falle, wenn

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{12}$$

gilt. Ähnlich liegt der Punkt $V_1(y, z)$ auf Tangente der Kurve z nur in dem Falle, wenn dieselbe Relation gilt. Wenn die Relation (12) für alle Werte des Parameters u gilt, dann bezeichnen wir das Kurvenpaar y, z mit K.

b) Mit A_3 bezeichnen wir den Schnittpunkt der Kurve $k_1(y, z)$ mit der asymptotischen Tangente der Fläche Φ im zugehörigen (d. h. für denselben Wert des Parameters u) Punkte der Kurve y. Ähnlich bezeichnen wir mit A_4 den Schnittpunkt der Kurve $k_2(y, z)$ mit der asymptotischen Tangente der Fläche Φ im zugehörigen Punkte der Kurve z.

Weiter betrachten wir das Koordinatentetraeder mit den Ecken $A_1 = y$, $A_2 = z$, A_3, A_4. Aus den Gleichungen (9a) bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} A_3 &= \bar{\Theta}_{12} y - 2\alpha_{12} z + 4\alpha_{12} y', \\ A_4 &= 2\alpha_{21} y + \Theta_{21} z - 4\alpha_{21} z', \end{aligned} \tag{13}$$

$$y' = -\frac{1}{4\alpha_{12}} \bar{\Theta}_{12} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{4\alpha_{12}} A_3,$$

$$z' = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{4\alpha_{21}} \Theta_{21} A_2 - \frac{1}{4\alpha_{21}} A_4,$$

wo $\bar{\Theta}_{12} = \alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}$,
$\Theta_{21} = \alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{21} + 2\alpha_{21}\beta_{22}$.

Weiter bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= \alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22}, \\ \bar{\Theta}_{21} &= \alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}. \end{aligned}$$

Wenn wir mit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ die Koordinaten des Punktes X im neuen Koordinatensysteme bezeichnen,

$$X = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3 + \bar{x}_4 A_4,$$

dann gilt nach (9) für die Flächen $\Omega_1(y, z)$, $\Omega_2(y, z)$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= v(-\alpha_{21} - \alpha_{12}), \\ \bar{x}_2 &= v^2(-\alpha_{21} - \alpha_{12}) + v\left(\Theta_{12} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \Theta_{21}\right), \\ \bar{x}_3 &= 1, \\ \bar{x}_4 &= -v \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}; \end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= v\left(\bar{\Theta}_{21} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} \bar{\Theta}_{12}\right) + (\alpha_{12} + \alpha_{21}), \\ \bar{x}_2 &= v(\alpha_{12} + \alpha_{21}), \\ \bar{x}_3 &= -v \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}, \\ \bar{x}_4 &= v^2. \end{aligned} \tag{14b}$$

Für $u = konst.$ bestimmen die Gleichungen (14) die Kegelschnitte $k_1(y, z)$, bzw. $k_2(y, z)$.

Nach (13) und (10) bekommen wir für die Koordinaten der Punkte $V_1(y, z)$, $V_2(y, z)$:

$$\bar{x}_1 = \alpha_{12} + \alpha_{21},\ \bar{x}_2 = \Theta_{12} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} \Theta_{21},\ \bar{x}_3 = 0,\ \bar{x}_4 = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}, \tag{15a}$$

bzw.

$$\bar{x}_1 = \bar{\Theta}_{21} + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} \bar{\Theta}_{12},\ \bar{x}_2 = -\alpha_{12} - \alpha_{21},\ \bar{x}_3 = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}},\ \bar{x}_4 = 0. \tag{15b}$$

Die quadratischen Flächen Ψ, die zur $R_1(y, z)$-Schar gehören, bezeichnen wir mit $\Psi_1(y, z)$, ähnlich bezeichnen wir mit $\Psi_2(y, z)$ die Flächen Ψ, die zur $R_2(y, z)$-Schar gehören.

Satz 1. *Die Erzeugenden der beiden Scharen der Fläche $\Psi_2(y, z)$ im Punkte A der Hüllfläche $\Omega_2(y, z)$, die Tangente des Kegelschnittes $k_2(y, z)$ der Fläche $\Omega_2(y, z)$ im Punkte A und die Verbindungsgerade des Punktes A mit der Spitze* *des Berührkegels der Fläche $\Omega_2(y, z)$ längs der durch A gehende Kurve $k_2(y, z)$ haben die harmonische Lage.*

Der gleiche Satz gilt auch für die Fläche $\Omega_1(y, z)$.

Beweis: Längs der Kurve $k_2(y, z)$ (für $u = u_0$) berührt die Fläche $\Omega_2(y, z)$ die Kegelfläche mit der Spitze $V_2(y, z)$ und die Fläche $\Psi_2(y, z)$. Die Erzeugenden der beiden Scharen der Fläche $\Psi_2(y, z)$ im Punkte A der Kurve $k_2(y, z)$ gehören zu den Asymptotenlinien der Fläche $\Psi_2(y, z)$. Die durch A gehende Erzeugende der erwähnten Kegelfläche und die Tangente der Kurve $k_2(y, z)$ im Punkte A sind nach dem Satze von Dupin die konjugierten Tangenten der Fläche $\Omega_2(y, z)$.

Satz 2. *Die Erzeugende p der Fläche Φ, die durch den Punkt $y(u_0)$ ($u_0 =$ konst) geht, die asymptotische Tangente der Fläche Φ in diesem Punkte, die Tangente der Kurve $k_2(y, z)$ im Punkte $y(u_0)$ und die Verbindungsgerade des Punktes $y(u_0)$ mit dem Punkte $V_2[y(u_0), z(u_0)]$ haben die harmonische Lage.*

Dieser Satz ist ein spezieller Fall des Satzes 1, wenn der Punkt A der Fläche $\Omega_2(y, z)$ auf der Kurve y liegt.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für den Fall, wenn der Punkt A der Fläche $\Omega_1(y, z)$ auf der Kurve z liegt.

c) Wenn sich der Parameter u ändert, dann bilden die Geraden (A_3, A_4) eine Regelfläche. Betrachten wir eine R-Schar auf der Fläche Φ mit der Eigenschaft, daß zu dieser R-Schar gehörende Flächen Ψ für jeden Wert des Parameters u die Verbindungsgerade der Punkte A_3, A_4 enthalten. Diese R-Schar bezeichnen wir mit $R(a, y, z)$. Man kann leicht die Differentialgleichung dieser R-Schar finden. Die Tangente der Kurve der $R(a, y, z)$-Schar ist durch die Punkte

$$y + vz = A_1 + vA_2, \quad y' + vz' + v'z$$

bestimmt; v' ist eine quadratische Funktion des Parameters v. Die Koordinaten des zweiten von diesen Punkten sind nach (13)

$$\bar{x}_1 = -\frac{1}{4\alpha_{12}}\bar{\Theta}_{12} + \frac{v}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2} + \frac{v}{4\alpha_{21}}\Theta_{21} + v', \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{4\alpha_{21}}, \quad \bar{x}_4 = -\frac{v}{4\alpha_{21}}.$$

Wenn wir nun die Bedingung des Durchschnittes der Tangenten der Linien der $R(a, y, z)$-Schar (in den Plückerischen Koordinaten) mit der Geraden (A_3, A_4) (immer für den gleichen Wert des Parameters u) aufschreiben, dann bekommen wir folgendes Ergebnis:

$$v' - \frac{1}{2}v^2 + \frac{v}{4}\left(\frac{1}{\alpha_{21}}\Theta_{21} + \frac{1}{\alpha_{12}}\bar{\Theta}_{12}\right) + \frac{1}{2} = 0. \tag{16}$$

Das ist die Differentialgleichung der $R(a, y, z)$-Schar.

Mit $t(a, y, z)$ bezeichnen wir das Linienpaar mit der Eigenschaft, daß in den Punkten des Linienpaares die Linien der $R(a, y, z)$-Schar die Linien der parametrischen Schar von Terracini (siehe (8)) berühren. Wenn

$$\frac{1}{\alpha_{21}}\Theta_{21} + \frac{1}{\alpha_{12}}\bar{\Theta}_{12} = 0$$

gilt, dann trennen die Linien des Paares $t(a, y, z)$ die Kurven y, z harmonisch.

Satz 3. *Wenn der Punkt $V_1(y, z)$ immer auf der zugehörigen (d. h. für den gleichen Wert des Parameters u) Geraden (A_1, A_4) liegt, dann fällt die $R(a, y, z)$-Schar mit der $R_1(y, z)$-Schar zusammen.*

Ein ähnlicher Satz gilt auch für die $R_2(y, z)$-Schar.

Beweis: Aus der Gleichung (15a) folgt, daß der Punkt $V_1(y, z)$ auf der Verbindungsgeraden der Punkte A_1, A_4 nur in dem Falle liegt, wenn

$$\frac{1}{\alpha_{12}}\Theta_{12} + \frac{1}{\alpha_{21}}\Theta_{21} = 0$$

gilt.

Wenn wir diese Relation in die Gleichung (16) einsetzen, dann bekommen wir

$$v' - \frac{1}{2}v^2 + v(-2\alpha_{12} + \beta_{22}) + \frac{1}{2} = 0,$$

das ist die Differentialgleichung der $R_1(y, z)$-Schar.

d) Die Tangenten der Linien der $R_1(y, z)$-Schar in allen Punkten der Fläche Φ bilden eine Geradenkongruenz $K_1(y, z)$, ähnlich bilden die Tangenten der Linien der $R_2(y, z)$-Schar in allen Punkten der Fläche Φ eine Geradenkongruenz $K_2(y, z)$. Die Linien der $R_1(y, z)$-Schar bilden eine Schar von Torsallinien der Kongruenz $K_1(y, z)$ auf der Fokalfläche Φ, ähnlich bilden die Linien der $R_2(y, z)$-Schar eine Schar von Torsallinien der Kongruenz $K_2(y, z)$ auf der Fokalfläche Φ. Betrachten wir den Fall, wo die Netze von Torsallinien der beiden Kongruenzen auf der gemeinsamen Fokalfläche zusammenfallen. Diese Bedingung ist nur in dem Falle erfüllt, wenn die Linien von $R_1(y, z)$ und $R_2(y, z)$-Scharen ein konjugiertes Netz bilden. (Das Doppelverhältnis der Erzeugenden der Fläche Φ, der asymptotischen Tangente und der Tangente der beiden R-Scharen in jedem Punkte der Fläche Φ ist gleich -1.)

Bei der Anwendung der Gleichungen (5), (6), (7) ($\beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{11} + \beta_{22}$ ersetzen wir nach (8)) bekommen wir leicht, daß die angeführte Bedingung nur in dem Falle erfüllt ist, wenn $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ gilt.

Die Torsalsysteme der Kongruenzen $K_1(y, z), K_2(y, z)$ auf der Fläche Φ fallen dann und nur dann zusammen, wenn die Kurven y, z ein Paar K (siehe a)) bilden.

Satz 4. *Zu der gegebenen Linie c_1, die keine Asymptotenkurve berührt und durch keine Fleknodalpunkte der Fläche Φ geht, gehört eine einparametrische Schar R(K) der Linien auf der Fläche Φ. Jede Linie der R(K)-Schar bildet mit der Linie c_1 ein Paar K. Die R(K)-Schar ist eine Doppelverhältnisschar.*

Beweis. Betrachten wir die Regelfläche Φ, die keine Torse ist. Die Gleichung der Fläche Φ sei in der Form (1). Weiter werden wir voraussetzen, daß die parametrischen Linien in der Gleichung (1) Asymptotenlinien sind und die Umnormung so durchgeführt ist, daß

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{11} = \beta_{22} = 0 \tag{17}$$

gilt.

Weiter betrachten wir auf der Fläche Φ zwei verschiedene Linien c_1, c_2:

$$y + \lambda_1 z, \quad y + \lambda_2 z,$$

die keine der asymptotischen Kurven berühren und durch keine Fleknodalpunkte der Fläche Φ gehen. Weiter setzen wir voraus, daß c_1, c_2 im Sinne von A. Terracini nicht konjugiert sind.

Betrachten wir alle R-Scharen, welche die Linien c_1, c_2 als Grundlinien haben. Die Differentialgleichung dieser Scharen bekommen wir in der Form

$$v' + (v - \lambda_1)(v - \lambda_2)\varrho = 0, \tag{18}$$

wo ϱ eine beliebige Funktion des Parameters u ist.

Setzen wir

$$\alpha = \lambda_1\lambda_2\varrho, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}\varrho(\lambda_1 + \lambda_2), \quad \gamma = \varrho,$$

$$B = -\lambda_1\lambda_2\varrho + \varrho(\lambda_1 + \lambda_2)v - \varrho v^2, \quad \psi = 0 \quad \text{(nach (18), (17))}$$

in die Gleichung (4) ein. Nach einer längeren Berechnung bekommen wir die Gleichung aller Flächen Ω, die zu allen R-Scharen mit c_1, c_2 als Grundkurven gehören.

$$\begin{aligned}
x_1 &= v^3\{-2\varrho^2\} + v^2\{-\alpha_{21} - \varrho' + 3\varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \\
&\quad + v\{\alpha_{22} - \alpha_{11} + [\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)]' - \varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2\varrho^2\} + \\
&\quad + \{\alpha_{12} - (\lambda_1\lambda_2\varrho)' + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\varrho^2\},\\
x_2 &= v^3\{-\alpha_{21} - \varrho' - \varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \\
&\quad + v^2\{\alpha_{22} - \alpha_{11} + [\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)]' + 2\varrho^2\lambda_1\lambda_2 + \varrho^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2\} + \\
&\quad + v\{\alpha_{12} - (\lambda_1\lambda_2\varrho)' - 3\varrho^2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \{2\lambda_1^2\lambda_2^2\varrho^2\},\\
x_3 &= v^2\{-2\varrho\} + v\{2\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)\} + \{-2\lambda_1\lambda_2\varrho\},\\
x_4 &= v^3\{-2\varrho\} + v^2\{2\varrho(\lambda_1 + \lambda_2)\} + v\{-2\lambda_1\lambda_2\varrho\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Wenn wir in den Gleichungen (19) $u = konst.$ voraussetzen, dann sind durch diese Gleichungen die Kurven k dritter Ordnung auf der Fläche Φ gegeben. Diese Kurven zerfallen in die Kurven niedrigerer Ordnung nur in

dem Falle, wenn die Determinante aus den Koeffizienten bei v^k, $k = 0, 1, 2, 3$, gleich Null ist.

Nach einer längeren Berechnung bekommen wir folgende Relation:

$$\begin{aligned}
&\varrho^2\{(\lambda_1 + \lambda_2)'[(\lambda_1\lambda_2)'(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)'\lambda_1\lambda_2] - [(\lambda_1\lambda_2)']^2\} + \\
&+ \varrho(-\lambda_1 + \lambda_2)\{\alpha_{12}(\lambda_1' - \lambda_2') + (\alpha_{22} - \alpha_{11})(\lambda_1'\lambda_2 - \lambda_2'\lambda_1) - \alpha_{21}(\lambda_1'\lambda_2^2 - \lambda_2'\lambda_1^2)\} + \\
&\quad + [\alpha_{22} - \alpha_{11} - \alpha_{21}(\lambda_1 + \lambda_2)] \cdot [-\alpha_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) - (\alpha_{22} - \alpha_{11})\lambda_1\lambda_2] - \\
&\qquad - [\alpha_{12} + \alpha_{21}\lambda_1\lambda_2]^2 = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Wir betrachten nur den Fall, daß die Kurve k in einen Kegelschnitt und in eine Gerade zerfällt; den Fall, daß die Kurven c_1, c_2 im Sinne von Terracini konjugiert sind, haben wir aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen (siehe [4]).

Wenn ϱ in der Gleichung (18) die Relation (20) erfüllt, dann ist die Schar (18) quadratisch. Wenn wir aus der Gleichung (20) die Größe ϱ berechnen und in die Gleichung (18) einsetzen, dann bekommen wir die Differentialgleichungen von zwei quadratischen Systemen; c_1 und c_2 sind die Grundkurven dieser Systeme. Wenn der Koeffizient bei ϱ^1 in der Gleichung (20) gleich Null ist, dann haben die Tangenten der beiden quadratischen Systeme, die Erzeugende und die Tangente der asymptotischen Linie ($v = konst$) die harmonische Lage in jedem Punkte der Fläche Φ. Diese Bedingung lautet dann nach (20):

$$\lambda_1'[\alpha_{12} + \lambda_2(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \lambda_2^2\alpha_{21}] = \lambda_2'[\alpha_{12} + \lambda_1(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \lambda_1^2\alpha_{21}].$$

Wenn die Linie c_1 fest ist (d. h. $\lambda_1 = f(u)$, f ist eine gegebene Funktion des Parameters u) und $\lambda_2 = v(u)$ (v ist eine beliebiege Funktion des Parameters u) dann bekommen wir für alle c_2, die mit c_1 ein K-Paar bilden, eine Differentialgleichung von Riccati.

Satz 5. *Wenn die Kurven y, z ein K-Paar bilden, dann gehören alle Linien auf der Fläche Φ, die mit der Kurve z ein K-Paar bilden, zu einer R-Schar; diese R-Schar ist $R(\bar{n}, y, z)$-Schar.*

Beweis: Betrachten wir die Regelfläche Φ, die keine Torse ist, ihre Gleichung sei in der Form (1), die parametrische R-Schar sei eine R-Schar von Terracini mit den Leitlinien y, z. Weiter soll $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ gelten.

Auf der Fläche Φ betrachten wir zwei Linien

$$\bar{y} = y + \lambda z, \quad z = \bar{z}, \quad \lambda = \lambda(u). \tag{21}$$

Setzen wir voraus, daß diese Linien keine Asymptotenkurve berühren und durch keine Fleknodalpunkte der Fläche Φ gehen. Die Linien (21) seien nicht im Sinne von Terracini konjugiert.

Die Gleichung der Fläche Φ transformieren wir weiter in die Form

$$\bar{x} = \bar{y} + \bar{v}\bar{z}. \tag{22}$$

Die Differentialgleichungen der Leitlinien $\bar{y}, \bar{z}$ sind dann:

$$\bar{y}'' = \bar{\alpha}_{11}\bar{y} + \bar{\alpha}_{12}\bar{z} + \bar{\beta}_{11}\bar{y}' + \bar{\beta}_{12}\bar{z}', \tag{23}$$

$$\bar{z}'' = \bar{\alpha}_{21}\bar{y} + \bar{\alpha}_{22}\bar{z} + \bar{\beta}_{21}\bar{y}' + \bar{\beta}_{22}\bar{z}'.$$

Aus den Gleichungen (21) bekommen wir dann

$$\bar{y}' = y' + \lambda'z + \lambda z', \quad \bar{y}'' = y'' + 2\lambda'z' + \lambda z'' + \lambda''z, \quad \bar{z}' = z', \quad \bar{z}'' = z''. \tag{21a}$$

Wenn wir für $\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}', \bar{z}', \bar{y}'', \bar{z}''$ nach (21), (21a), (2) in die Gleichung (23) einsetzen, bekommen wir leicht folgende Relationen:

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}_{11} = \alpha_{11} + \lambda\alpha_{21}, && \bar{\alpha}_{12} = \lambda'' - \lambda\lambda' + \lambda'\beta_{22} - \lambda^2\alpha_{21} + \lambda(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \alpha_{12}, \\ &\bar{\alpha}_{21} = \alpha_{21}, && \bar{\alpha}_{22} = \alpha_{22} - \lambda\alpha_{21} - \lambda', \\ &\bar{\beta}_{11} = -\beta_{22} + \lambda, && \bar{\beta}_{12} = 2\lambda' - \lambda^2 + 1 + 2\lambda\beta_{22}, \\ &\bar{\beta}_{21} = 1, && \bar{\beta}_{22} = \beta_{22} - \lambda. \end{aligned} \tag{24}$$

Nach den Gleichungen (6), (7) bekommen wir die Gleichungen der quadratischen Scharen, die die Kurven $\bar{y}, \bar{z}$ als Grundkurven haben.

$$\bar{v}' + \frac{\bar{\beta}_{12}}{2} + 2\bar{v}\frac{1}{\bar{\beta}_{12}}\left(-\bar{\alpha}_{12} + \frac{\bar{\beta}'_{12}}{2} - \frac{\bar{\beta}_{11}\bar{\beta}_{12}}{2}\right) - \bar{v}^2\frac{\bar{\beta}_{21}}{2} = 0, \tag{25}$$

$$\bar{v}' + \frac{\bar{\beta}_{12}}{2} + 2\bar{v}\frac{1}{\bar{\beta}_{21}}\left(\bar{\alpha}_{21} - \frac{\bar{\beta}'_{21}}{2} + \frac{\bar{\beta}_{21}\bar{\beta}_{22}}{2}\right) - \bar{v}^2\frac{\bar{\beta}_{21}}{2} = 0.$$

Aus den Gleichungen (25) und (5) (da muß man zur α_{ik}, β_{ik}, $i, k = 1, 2$, den Streifen zufügen), finden wir leicht die Bedingung, daß die Tangenten beider quadratischen R-Scharen, die Erzeugende, die Tangente der Asymptotenlinie in jedem Punkte der Fläche Φ eine harmonische Lage haben:

$$\bar{\beta}_{21}(-2\bar{\alpha}_{12} + \bar{\beta}'_{12}) + \bar{\beta}_{12}(2\bar{\alpha}_{21} - \bar{\beta}'_{21}) = 0. \tag{26}$$

Durch Einsetzen $\bar{\alpha}_{ik}, \bar{\beta}_{ik}$, $i, k = 1, 2$, aus den Gleichungen (24) in die Gleichungen (26) bekommen wir leicht (unter Voraussetzung $\alpha_{12} = \alpha_{21}$):

$$2\alpha_{12}\lambda' + \lambda\{-(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \beta'_{22} + 2\alpha_{12}\beta_{22}\} = 0. \tag{27}$$

Wenn nun die Kurven $y + v(u)z$, $v(u) = \lambda$, mit der Kurve z K-Paare bilden, dann muß λ der Differentialgleichung (27) entsprechen. Durch den Vergleich der Gleichung (27) mit der Gleichung (11) für $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ beweissen wir leicht die Behauptung des Satzes 5.

LITERATUR

[1] Barner M., *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Math. Z. *62* (1955), 50–93.
[2] Mayer O., *Études sur les surfaces réglées*, Bull. fac. de ştiinţe din Cerňauti *2* (1926), 1–33.
[3] Terracini A., *Diretrici congiunte di una rigata*, Rend. Semin. mat. Univ. è Politechn. Torino *9* (1949/50), 325–342.
[4] Vala J., *Spezielle Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 126–142.

Eingegangen am 27. 5. 1965.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty Vysokého učení technického, Brno