MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

O MNOHOSTENOCH BEZ OPÍSANEJ GUĽOVEJ PLOCHY II

ERNEST JUCOVIČ, Prešov

Všetky mnohosteny, o ktorých bude reč, sú konvexné. Pojmy budú použité v rovnakom význame ako v [6]. Teda o mnohostene M povieme, že je bez opísanej resp. vpísanej guľovej plochy, ak žiaden s M izomorfný mnohosten nie je taký, že všetky jeho vrcholy ležia na guľovej ploche, resp. že všetky jeho steny sa dotýkajú guľovej plochy.

Existenciu takých mnohostenov dokázal Steinitz [1], Grünbaum [2] zostrojil ďalšie. V [6] je dokázané, že sedem je minimálny počet stien mnohostena bez opísanej guľovej plochy.

V nasledujúcich riadkoch vo vete 1 vyčleňujeme jednu skupinu mnohostenov bez opísanej guľovej plochy; tieto navyše nemajú hamiltonovskú kružnicu. (Kružnica mnohostena — v grafovom význame — je postupnosť $A_1h_1A_2h_2 \dots A_1$ jeho navzájom rôznych vrcholov A_i a navzájom rôznych hrán h_j, v ktorej každý prvok inciduje s predchádzajúcim. Hamiltonovská je taká kružnica mnohostena, ktorá každý jeho vrchol obsahuje.) Vo vete 2 sa zaoberáme maximálnym počtom vrcholov mnohostena s n vrcholmi, ktoré nemôžu ležať na guľovej ploche, mnohostenu opísanej.

Použijeme tieto Steinitzove [1] vety:

S1: Mnohosten je bez opísanej guľovej plochy práve vtedy, ak k nemu konjugovaný mnohosten je bez vpísanej guľovej plochy.

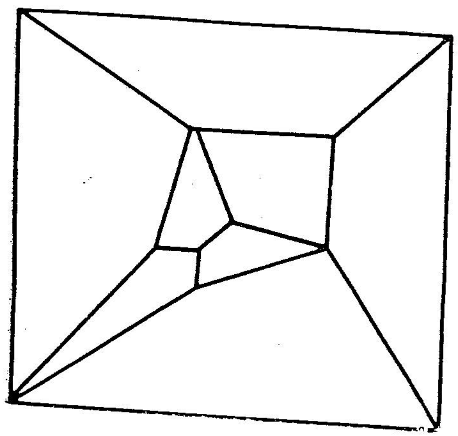
S2: Ak medzi s stenami mnohostena M existuje trieda T s $m \geqq \frac{s}{2}$ stenami takými, že žiadne dve steny tejto triedy T nie sú susedné, potom je M bez vpísanej guľovej plochy. Pri $m = \frac{s}{2}$ to nastane, ak existujú také dve steny, ktoré nepatria do triedy T a majú spoločnú hranu.

Veta 1. *Mnohosten M s nepárnym počtom $2g + 1$ vrcholov, ktorého všetky steny majú párny počet hrán, je bez opísanej guľovej plochy. Nemá hamiltonovskú kružnicu.*

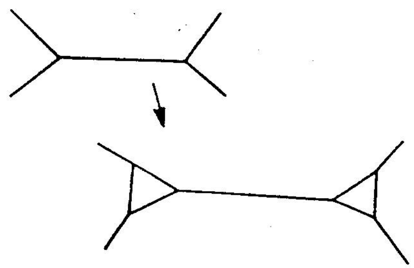
Dôkaz. Graf z vrcholov a hrán mnohostena M je planárny a každá kružnica k v ňom ohraničuje oblasť, pozostávajúcu z $2k_1$-, $2k_2$- ... $2k_t$-uholníka.

Každá hrana je spoločná práve dvom stenám; ak je m počet hrán, spoločných stenám ležiacim v oblasti ohraničenej kružnicou k, potom má kružnica k $2(k_1 + k_2 + \ldots k_i) - 2m = 2n$ hrán. Ale hamiltonovská kružnica mnohostena M by musela mať nepárny počet vrcholov, teda i hrán, čo nie je podľa predchádzajúceho možné. Tým je dokázaná druhá časť vety.

Podľa Königovej vety (pozri Berge [3]) je bichromatický taký graf, ktorého všetky kružnice sú párneho stupňa. Jeho vrcholy možno potom rozdeliť do dvoch tried tak, že žiadne dva vrcholy tej istej triedy nie sú susedné (nemajú spoločnú hranu). U mnohostena M je potom v jednej triede najviac ak g, v druhej najmenej $g + 1$ vrcholov. Steny mnohostena M', konjugovaného ku M, sú potom rozdelené do dvoch tried tak, že sú splnené podmienky **S2**. M' je teda bez vpísanej guľovej plochy a podľa **S1** je M bez opísanej guľovej plochy.



Obr. 1.



Obr. 2.

Poznámka 1. Na obr. 1 je mnohosten s najmenším počtom stien (deväť) bez hamiltonovskej kružnice; spĺňa predpoklady našej 1. vety. K tomuto záveru sme dospeli tak, že sme o všetkých mnohostenoch s $s = 4, 5, 6, 7, 8$ stenami zistili, že hamiltonovskú kružnicu majú. (Prehľad týchto mnohostenov podľa Brücknera [4] a Hermesa [5].)

Poznámka 2. Na základe **S1** a vety 1 platí: Mnohosten s nepárnym počtom stien, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa, je bez vpísanej guľovej plochy.

Veta 2. *Nech Γ_n je množina všetkých mnohostenov s n vrcholmi. Pre $H \in \Gamma_n$ značí $\varphi(H) = n - v$, kde v je maximálny počet tých vrcholov mnohostena izomorfného s H, ktoré ležia na guľovej ploche, mnohostenu H opísanej.*

O $\varphi(n) = \max \varphi(H)$, $H \in \Gamma_n$ platí

$$\varphi(n) \geqq \left[\frac{n-11}{3}\right]. \tag{1}$$

Dôkaz vykonáme tak, že ku každému $n \geqq 14$ zostrojíme mnohosten, ktorý spĺňa (1). Najprv pre $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$; budeme uvažovať o mnohostene k danému konjugovanom a dokážeme:

Nech je H_k' mnohosten s $n = 3k + 2$ stenami, izomorfný s tým, ktorý vznikne „odseknutím" vrcholov k-bokého hranola (t. j. zámenou jeho vrcholov za trojuholníkové steny, pričom nie sú odstránené celé hrany hranola — obr. 2). Najmenej $k - 3 = \dfrac{n-11}{3}$ stien H_k' sa nedotýka guľovej plochy, do H_k' vpísanej.

Pri dôkaze budeme potrebovať aj obrátený postup k odseknutiu trojhranného vrchola, totiž nahradenie trojuholníkovej steny trojhranným vrcholom. Uvážme najprv, koľko trojuholníkových stien môže H_k' mať, ktoré nie je možné nahradiť trojhranným vrcholom.

Majme stenu ABC, ďalej hrany AK, BL, CM. Stenu ABC trojhranným vrcholom nahradiť nie je možné vtedy, keď sa roviny ABK, BCL, ACM nepretínajú v polpriestore opačnou k polpriestoru $ABC\ K$. To nastane, ak každá z dvojíc uhlov $\sphericalangle KAB$ a $\sphericalangle LBA$, $\sphericalangle LBC$ a $\sphericalangle MCB$, $\sphericalangle MCA$ a $\sphericalangle KAC$ má súčet $\leqq 2R$. Mnohouholník $ABL \ldots KA$ má najmenej 6 vrcholov. Ak by $\sphericalangle KAB + \sphericalangle LBA \leqq 2R$, potom pri žiadnej inej hrane mnohouholníka $ABL \ldots KA$, patriacej aj trojuholníku, nemôže byť súčet vnútorných uhlov $\leqq 2R$, lebo ináč by mnohouholník $ABL \ldots KA$ nebol konvexný. Na každej zo dvoch stien mnohostena H_k', ktoré vznikli z podstáv hranola, môže teda existovať iba jedna dvojica susedných uhlov, ktorých súčet je $\leqq 2R$. Mnohosten H_k' má teda najviac ak dve trojuholníkové steny, ktoré nie je možné nahradiť trojhranným vrcholom.

Označme $\alpha_1, \ldots \alpha_{2k}$ trojuholníkové steny, ktoré vznikli „odseknutím" vrcholov hranola, $\beta_1, \ldots \beta_k$ osemuholníky (na mieste pôvodných bočných stien), γ_1, γ_2 $2k$-uholníkové podstavy. Pripusťme, že medzi trojuholníkovým je maximálny počet, t. j. dve, takých stien, ktoré nie je možné nahradiť trojhrannými vrcholmi; nech sú to α_1, α_2.

Pripusťme, že sa guľa vpísaná do mnohostena H typu H_k' dotýka $m \geqq 2k + 6$ stien, teda sa nedotýka $p \leqq k - 4$ stien. Ak medzi tými nedotýkajúcimi sa je $z \leqq p$ trojuholníkových, ktoré je možné nahradiť trojhranými vrcholmi, vykonajme to. Dostávame mnohosten N_1 s $3k + 2 - z \geqq 2k + 6$ stenami, medzi ktorými je $u \geqq 2k - (k - 4) = k + 4$ trojuholníkových, ktoré všetky sa vpísanej guľovej plochy dotýkajú; ďalej má N_1 $(k + 2)$ stien β_i, γ_i, a snáď

i α_1, α_2, ktoré sa vpísanej guľovej plochy nedotýkajú. So stenami β_i, γ_i, ktoré sa jej nedotýkajú, veďme rovnobežné roviny, dotýkajúce sa vpísanej gule. Žiadna z týchto rovín neodsekne takú stenu, ktorá sa dotýka vpísanej gule, neodsekne teda žiadnu z tých $u \geqq k + 4$ trojuholníkových (z ktorých žiadne dve nie sú susedné), ani nespôsobí, aby mali spoločnú hranu. Naproti tomu môže taká rovina, rovnobežná napr. s β_1 celkom odseknúť iba takú stenu, ktorá sa vpísanej gule nedotýka; po odstránení stien $\alpha_i, i \neq 1, 2$, ktoré sa vpísanej gule nedotýkali, to môžu byť iba steny $\beta_i, \gamma_i, \alpha_1, \alpha_2$; dostávame mnohosten N_2. V mnohostene N_2 veďme roviny rovnobežné so stenami α_1, α_2, dotýkajúce sa vpísanej gule. Tým sa počet stien nezmení, ale môže sa stať, že nové trojuholníkové steny α_1', α_2' majú spoločné hrany s trojuholníkovými stenami mnohostenu N_2; takto vytvorený mnohosten, označme ho N, by mal vpísanú guľu. Ale mal by $u + v$ stien, $v \leqq k + 4$, $u \geqq k + 4$ trojuholníkových, z ktorých žiadne dve nemajú spoločnú hranu; to je spor s **S2**. Neexistuje teda mnohosten H typu H_k', ktorému vpísaná guľa by sa dotýkala $m \geqq 2k + 6$ jeho stien. O mnohostene typu H_k, konjugovanom ku H_k', potom platí, že žiadnych jeho $m \geqq 2k + 6$ vrcholov neleží na opísanej guľovej ploche (podľa **S1** a vlastností polárneho zobrazenia). Tých vrcholov, ktoré na opísanej guľovej ploche neležia, je teda najmenej $k - 3 = \left[\frac{n - 11}{3}\right]$.

Tým je veta dokázaná pre $n \equiv 2 (\bmod 3)$, $n \geqq 14$.

Pre $n = 3k + 3$, resp. $n = 3k + 4$ nasaďme ihlany na jednu resp. dve (trojuholníkové) steny mnohostena H_k, ktorý podľa predchádzajúceho spĺňa (1). Najviac ak $2k + 6$ resp. $2k + 7$ vrcholov týchto mnohostenov leží na opísanej guľovej ploche, lebo v opačnom prípade by $2k + 6$ vrcholov mnohostena H_k ležalo na opísanej guľovej ploche, čo podľa predchádzajúceho nie je možné. Tých vrcholov, ktoré na opísanej guľovej ploche neležia, je potom v oboch prípadoch aspoň $k - 3 = \left[\frac{n - 11}{3}\right]$.

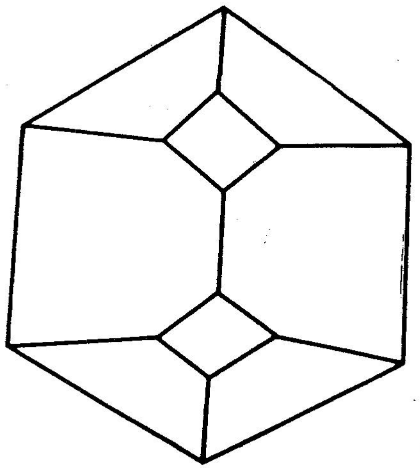
Poznámka 3. Pre $n \leqq 16$ platí nasledujúci odhad lepší ako v (1):

$$\varphi(n) \geqq 1 \text{ pre } n = 8, 9, \dots 13, \quad \varphi(n) \geqq 2 \text{ pre } n = 14, 15, 16.$$

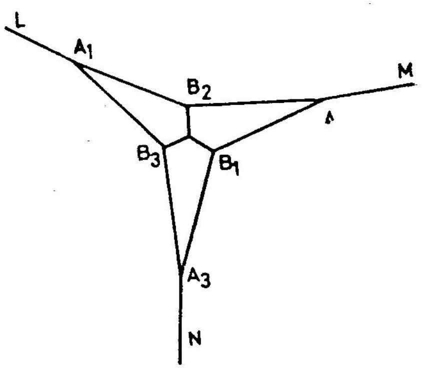
Mnohosten, ktorý vznikne nasadením ihlanov na steny štvorstena, je podľa Steinitza [1] bez opísanej guľovej plochy; má 8 vrcholov. Pre $n = 9, 10, 11, 12, 13$ nasaďme na jeho steny 1, 2, 3, 4, 5 ihlanov; takto vzniknutý mnohosten nemá všetky vrcholy na opísanej guľovej ploche.

Pre $n = 14$ mnohosten na obr. 3 obsahuje dve sedmice bodov, každá z ktorých obsahuje bod, neležiaci na opísanej guľovej ploche. Každých tých sedem bodov spolu s príslušnými hranami tvorí konfiguráciu na obr. 4. Keby tých sedem bodov ležalo na opísanej guľovej ploche, preťala by ona hrany A_1L, A_2M, A_3N v bodoch, ktoré spolu s použitými 7 bodmi by boli vrcholmi mnohostena na obr. 5, ktorý by tak mal opísanú guľovú plochu, čo je spor s Grünbaumom [2]. Alebo opísaná guľová plocha nepretína hrany A_1L, A_2M, A_3N, potom aspoň jedna zo spomínaných sedmíc obsahuje viac ako dva vrcholy neležiace na opísanej guľovej ploche. Pre $n = 15$, resp. 16 nasaďme jeden resp. dva ihlany na jeho trojuholníkové steny.

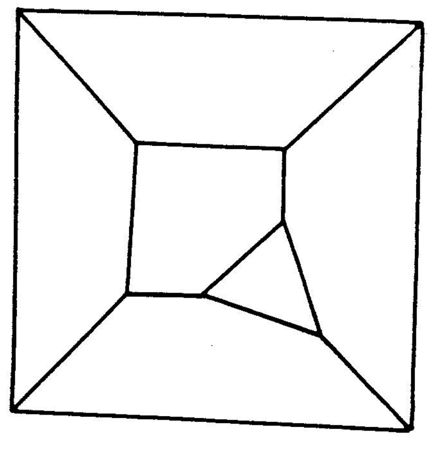
Poznámka 4. Úsudok z dôkazu 2. vety umožňuje takto zosilniť Steinitzovu vetu **S2**: Ak medzi s stenami mnohostena M existuje trieda T s $m \geqq \frac{s}{2}$ stenami takými, že žiadne dve steny tejto triedy nie sú susedné, potom sa žiadna do M vpísaná guľová plocha nedotýka všetkých stien triedy T. Pri $m = \frac{s}{2}$ to nastane, ak mnohosten M má hranu, ktorá neinciduje so žiadnou stenou triedy T. (Pozri [7].)



Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.

LITERATÚRA

[1] Steinitz E., *Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern II*, J. reine und angew. Math. *159* (1928), 133—143.

[2] Grünbaum B., *On Steinitz's Theorem about non inscribable Polyhedra*, Indagationes math. *25* (1963), 452—455.

[3] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.

[4] Brückner M., *Vielecke und Vielflache*, Leipzig 1900.

[5] Hermes O., *Die Formen der Vielflache*, J. reine und angew. Math. *120* (1891) 27—59, 305—353.

[6] Jucovič E., *O mnohostenoch bez opísanej guľovej plochy I.*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 90—94.

[7] Jucovič E., *Bemerkung zu einem Satz von Steinitz*, Elem. Math. (v tlači).

Došlo 23. 4. 1965.

Katedra matematiky
Pedagogickej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika,
Prešov

ON NON-INSCRIBABLE POLYHEDRA II

Ernest Jucovič

Summary

The following theorems are proved: 1. A convex polyhedron with an odd number of vertices, all faces of which are of even order, is without a circumsphere. 2. Let Γ_n be the set of all convex polyhedra with n vertices. For $H \in \Gamma_n$ denote $\varphi(H) = n - v$, where v is the greatest number of vertices of a polyhedron of type H lying on a circumsphere. For $\varphi(n) = \max \varphi(H)$, $H \in \Gamma_n$, we have

$$\varphi(n) \geqq \left[\frac{n-11}{3}\right].$$