MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

STYK MONOSYSTÉMŮ PROJEKTIVNÍCH PROSTORŮ

MILOSLAV JŮZA, Praha

V článku je dokázáno několik vět o styku jednoparametrických soustav projektivních podprostorů S_n projektivního prostoru S_{2n+1}, jež jsou zobecněním analogických vět o styku přímkových osnov (1).

Budeme užívat tohoto označení: Aritmetické body projektivního prostoru budeme zpravidla značit malými latinskými písmeny: $x, y, a, p, \ldots$, příslušné geometrické body budeme značit odpovídajícími velkými písmeny: $X, Y, A, P, \ldots$, reálná čísla budeme obvykle značit řeckými písmeny: α, β, ϱ, $\sigma, \ldots$ Pod názvem *projektivní prostor* budeme vždy rozumět *reálný* projektivní prostor. Čtenář sám uváží, jak je nutno změnit znění vět pro monosystémy v komplexním projektivním prostoru závislé na reálném nebo komplexním parametru.

Máme-li v n-rozměrném projektivním prostoru S_n křivky $X(\tau)$, $Y(\tau)$, řekneme, že tyto křivky mají při parametrizaci τ pro hodnotu $\tau = \tau_0$ *analytický styk řádu* σ ($\sigma \geqq 0$), můžeme-li zvolit příslušné aritmetické body $x(\tau)$, $y(\tau)$ tak, že platí

$$x(\tau_0) = y(\tau_0),\ x'(\tau_0) = y'(\tau_0), \ldots,\ x^{(\sigma)}(\tau_0) = y^{(\sigma)}(\tau_0).$$

Máme-li v S_n křivky $X(\tau)$, $Y(\nu)$, řekneme, že mají v bodě $A = X(\tau_0) = Y(\nu_0)$ *styk řádu* σ, existuje-li funkce $\nu = \nu(\tau)$ třídy $\mathbf{C}_\sigma$(2), $\nu_0 = \nu(\tau_0)$, $\nu'(\tau_0) \neq 0$, tak, že křivky $X(\tau)$, $Y(\nu(\tau))$ mají při parametrizaci τ pro hodnotu $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu σ.

Monosystémem v projektivním prostoru S_m nazveme jednoparametrický systém n-rozměrných lineárních podprostorů $V_n(\tau)$ prostoru S_m. Je-li $V_n(\tau) = [x_0(\tau), x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)]$, potom křivky $x_i(\tau)$ nazveme *řídicími křivkami* monosystému, prostory $[x_0(\tau), \ldots, x_n(\tau)]$ při pevném τ *tvořícími prostory* monosystému (viz [3]). Určujeme-li tvořící prostory jejich Grassmanovými souřadnicemi, můžeme je považovat za body prostoru S_N, kde $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$, a o monosystému můžeme mluvit jako o křivce v tomto prostoru.

(1) Viz [1], kap. II, odst. 304—305, a kap. IV.
(2) Řekneme, že funkce $\varphi(\tau)$ je třídy $\mathbf{C}_\sigma$, má-li spojitou derivaci řádu σ.

Řekneme, že *monosystém je třídy* $\mathbf{C}_\sigma$, je-li třídy $\mathbf{C}_\sigma$ jakožto křivka prostoru S_N(3). Řekneme, že dva monosystémy mají *analytický styk řádu* σ *pro hodnotu* $\tau = \tau_0$, nebo *styk řádu* σ *podél tvořícího prostoru* A, mají-li tyto křivky analytický styk řádu σ pro $\tau = \tau_0$, nebo styk řádu σ v bodě představujícím tvořící prostor A.

Věta 1. *Monosystém $V_n(\tau)$ v prostoru S_m je třídy $\mathbf{C}_\sigma$ právě tehdy, jestliže na něm můžeme zvolit řídicí křivky tak, aby byly třídy $\mathbf{C}_\sigma$. Monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\tau)$ v prostoru S_m mají pro $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu σ právě tehdy, můžeme-li zvolit řídicí křivky $x_0(\tau), \ldots, x_n(\tau)$ na $V_n(\tau)$ a $y_0(\tau), \ldots, y_n(\tau)$ na $W_n(\tau)$ tak, že*

$$x_i^{(\lambda)}(\tau_0) = y_i^{(\lambda)}(\tau_0); \quad \lambda = 0, \ldots, \sigma; \quad i = 0, \ldots, n.$$

Důkaz. I. Derivace řádu λ Grassmanových souřadnic jsou celistvými racionálními funkcemi derivací souřadnic řídicích křivek do řádu nejvýš λ. Jestliže tedy derivace řídicích křivek až do řádu λ jsou spojité nebo jestliže u dvou monosystémů se pro nějakou hodnotu parametru rovnají, platí totéž o derivacích Grassmanových souřadnic.

II. Nechť Grassmanovy souřadnice $\pi_{j_0 \ldots j_n}(\tau)$ prostorů $V_n(\tau)$ jsou třídy $\mathbf{C}_\sigma$ v okolí čísla τ_0 a budiž např. $\pi_{a_0 \ldots a_n}(\tau_0) \neq 0$. Potom $\pi_{a_0 \ldots a_n}(\tau) \neq 0$ v celém okolí τ_0 a v tomto okolí můžeme zvolit jako řídicí křivky $x_0(\tau), \ldots, x_n(\tau)$, kde

$$x_i(\tau) = (x_{i,0}(\tau), \ldots, x_{i,m}(\tau)),$$

při čemž

$$x_{i,j}(\tau) = \pi_{a_0, \ldots, a_{i-1}, j, a_{i+1}, \ldots, a_n}(\tau); \quad i = 0, \ldots, n; \quad j = 0, \ldots, m \text{ (4)}.$$

Nyní je zřejmé, že jsou-li $\pi_{j_0, \ldots, j_n}$ třídy $\mathbf{C}_\sigma$, platí totéž o souřadnicích řídicích křivek $x_i(\tau)$. Dále je odtud zřejmé, že splývají-li derivace Grassmanových souřadnic dvou monosystémů až do řádu $\sigma (\sigma \geqq 0)$, platí totéž pro derivace souřadnic právě definovaných řídicích křivek.

V dalším se budeme zabývat monosystémy $V_n(\tau)$ v prostoru S_{2n+1}. Budeme předpokládat, že všechny uvažované monosystémy jsou aspoň třídy $\mathbf{C}_1$. Takovýto monosystém $V_n(\tau) = [x_0(\tau), x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)]$ nazveme *nerozvinutelným*, jestliže

$$[x_0(\tau), x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau), x_0'(\tau), x_1'(\tau), \ldots, x_n'(\tau)] \neq 0.$$

(3) To znamená, že body této křivky jsou při vhodné volbě skalárních faktorů funkcemi třídy $\mathbf{C}_\sigma$.
(4) Viz [2], kap. VII, § 4.

Věta 2. *V S_{2n+1} mějme nerozvinutelný monosystém $V_n(\tau)$ třídy $\mathbf{C}_{\sigma+1}(\sigma \geqq 0)$ s řídicími křivkami $x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)$ a nerozvinutelný monosystém $W_n(\tau)$ třídy $\mathbf{C}_{\sigma+1}$ s řídicími křivkami $y_0(\tau), \dots, y_n(\tau)$. Budiž*

$$(1) \qquad x_i(\tau_0) = y_i(\tau_0), x_i'(\tau_0) = y_i'(\tau_0), \dots, x_i^{(\sigma)}(\tau_0) = y_i^{(\sigma)}(\tau_0), i = 0, \dots, n.$$

Potom oba monosystémy mají při parametrizaci τ pro hodnotu $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu $\sigma + 1$ právě tehdy, jestliže existují čísla β_i^j tak, že platí

$$(2) \qquad y_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) = x_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n} \beta_i^j x_j(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Důkaz. I. Nechť oba monosystémy mají pro $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu $\sigma + 1$. Potom existují systémy řídicích křivek $\bar{x}_0(\tau), \dots, \bar{x}_n(\tau)$ na $V_n(\tau)$ a $\bar{y}_0(\tau), \dots, \bar{y}_n(\tau)$ na $W_n(\tau)$ tak, že

$$\bar{x}_i(\tau_0) = \bar{y}_i(\tau_0), \dots, \bar{x}_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) = \bar{y}_i^{(\sigma+1)}(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Existují funkce $\gamma_i^j(\tau)$ tak, že

$$x_i(\tau) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_i^j(\tau)\bar{x}_j(\tau), \quad i = 0, \dots, n.$$

Položíme-li

$$\tilde{y}_i(\tau) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_i^j(\tau)\bar{y}_j(\tau), \quad i = 0, \dots, n,$$

potom bude

$$(3) \qquad x_i(\tau_0) = \tilde{y}_i(\tau_0), \dots, x_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) = \tilde{y}_i^{(\sigma+1)}(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Nechť pro soustavu řídicích křivek $y_0(\tau), \dots, y_n(\tau)$ platí (1). Protože až na skalární faktor $[y_0(\tau), \dots, y_n(\tau)] = [\tilde{y}_0(\tau), \dots, \tilde{y}_n(\tau)]$, existují funkce $\alpha_{i,j}(\tau)$ (pro něž zřejmě existuje pro $\tau = \tau_0$ derivace řádu $\sigma + 1$) tak, že

$$y_i(\tau) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j}(\tau)\tilde{y}_j(\tau), \quad i = 0, \dots, n.$$

Derivováním dostaneme

$$y_i^{(k)}(\tau) = \sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{l} \alpha_{i,j}^{(l)}(\tau)\tilde{y}_j^{(k-l)}(\tau); \quad i = 0, \dots, n; \quad k = 0, \dots, \sigma + 1.$$

Protože platí (1) a (3), dostaneme odtud

$$\alpha_{i,j}(\tau_0) = \delta_i^j \text{ (5)}, \quad \alpha_{i,j}^{(l)}(\tau_0) = 0, \quad k = 1, \dots, \sigma,$$

(5) $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$

tedy

$$y_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) = \tilde{y}_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j}^{(\sigma+1)}(\tau_0)\tilde{y}_j(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n,$$

odkud podle (3) plyne (2) pro $\beta_i^j = \alpha_{i,j}^{(\sigma+1)}(\tau_0)$.

II. Nechť pro řídicí křivky obou monosystémů platí (1) a (2). Definujme na $W_n(\tau)$ nový systém řídicích křivek

$$y_i(\tau) = y_i(\tau) - (\sigma + 1)!^{-1} \sum_{j=0}^{n} \beta_i^j y_j(\tau)(\tau - \tau_0)^{\sigma+1}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Potom

$$\bar{y}_i^{(k)}(\tau_0) = y_i^{(k)}(\tau_0) = x_i^{(k)}(\tau_0); \quad k = 0, \dots, \sigma; \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\bar{y}_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) = y_i^{(\sigma+1)}(\tau_0) - \sum_{j=0}^{n} \beta_i^j y_j(\tau_0) = x_i^{(\sigma+1)}(\tau_0); \quad i = 0, \dots, n.$$

Oba monosystémy tedy mají pro $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu $\sigma + 1$.

Věta 3. *V S_{2n+1} mějme nerozvinutelný monosystém $V_n(\tau)$ třídy $\mathbf{C}_{\sigma+1}(\sigma \geqq 0)$ s řídicími křivkami $x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)$ a nerozvinutelný monosystém $W_n(\nu)$ třídy $\mathbf{C}_{\sigma+1}$ s řídicími křivkami $y_0(\nu), \dots, y_n(\nu)$. Budiž*

$$(4) \quad x_i(\tau_0) = y_i(\nu_0), \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0), \dots, \frac{\mathrm{d}^\sigma x_i}{\mathrm{d}\tau^\sigma}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^\sigma y_i}{\mathrm{d}\nu^\sigma}(\nu_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Potom oba monosystémy mají podél tvořícího prostoru $A = [x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)] = [y_0(\nu_0), \dots, y_n(\nu_0)]$ styk řádu $\sigma + 1$ právě tehdy, existují-li čísla β_i^j, γ tak, že platí

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}y_i}{\mathrm{d}\nu^{\sigma+1}}(\nu_0) = \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}x_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) + \gamma\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n} \beta_i^j x_j(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Důkaz. I. Nechť oba monosystémy mají podél tvořícího prostoru A styk řádu $\sigma + 1$. Pak existuje funkce $\nu(\tau)$, $\nu_0 = \nu(\tau_0)$, $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) \neq 0$, třídy $\mathbf{C}_{\sigma+1}$, tak, že monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu(\tau))$ mají pro $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu $\sigma + 1$. Označme $\bar{y}_i(\tau) = y_i(\nu(\tau))$, $i = 0, \dots, n$, takže podle (4) je $\bar{y}_i(\tau_0) = x_i(\tau_0)$, $i = 0, \dots, n$. Dále je pro $i = 0, \dots, n$

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0)\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0),$$

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{d}^k\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^k}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^k y_i}{\mathrm{d}\nu^k}(\nu_0)\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0)\right)^k + \sum_{j=2}^{k-1} (.)\frac{\mathrm{d}^j\nu}{\mathrm{d}\tau^j}(\tau_0) +$$

$$+\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0)\frac{\mathrm{d}^k\nu}{\mathrm{d}\tau^k}(\tau_0),\ k = 2, \ldots, \sigma + 1,$$

kde (.) znamená koeficienty, které nás nezajímají. Odtud plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}^k\nu}{\mathrm{d}\tau^k}(\tau_0) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 1, \\ 0 & \text{pro } k = 2, \ldots, \sigma. \end{cases} \tag{8}$$

Jinak by totiž existovalo nejmenší číslo k_0 $(1 \leqq k_0 \leqq \sigma)$ tak, že (8) pro k_0 neplatí. Ale v tom případě by bylo pro $i = 0, \ldots, n$ podle (4), (6), (7)

$$\frac{\mathrm{d}^k\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^k}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^k x_i}{\mathrm{d}\tau^k}(\tau_0),\quad k = 0, \ldots, k_0 - 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^{k_0}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^{k_0}}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^{k_0}x_i}{\mathrm{d}\tau^{k_0}}(\tau_0) + \mu\cdot\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0),\ \mu = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) - 1 & \text{pro } k_0 = 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}^{k_0}\nu}{\mathrm{d}\tau^{k_0}}(\tau_0) & \text{pro } k_0 > 1, \end{cases}$$

a tedy monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu(\tau))$ by podle věty 2 neměly pro $\tau = \tau_0$ vzhledem k parametru τ analytický styk řádu k_0, ačkoliv je $k_0 < \sigma + 1$. Tedy platí (8). Podle (6), (7), (8) a (4) máme pro $i = 0, \ldots, n$

$$\frac{\mathrm{d}^k\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^k}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^k y_i}{\mathrm{d}\nu^k}(\nu_0) = \frac{\mathrm{d}^k x_i}{\mathrm{d}\tau^k}(\tau_0),\quad k = 0, \ldots, \sigma,$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}y_i}{\mathrm{d}\nu^{\sigma+1}}(\nu_0) + \mu\cdot\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0).$$

Protože však $V_n(\tau)$ a $W_n(\nu(\tau))$ mají vzhledem k τ pro $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu $\sigma + 1$, platí podle věty 2

$$\frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}x_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n}\beta_i^j x_j(\tau_0),\quad i = 0, \ldots, n,$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}y_i}{\mathrm{d}\nu^{\sigma+1}}(\nu_0) = \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}x_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n}\beta_i^j x_j(\tau_0) - \mu\cdot\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0),\quad i = 0, \ldots, n. \tag{9}$$

Pro $\sigma > 0$ je podle (4) $\dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0) = \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0)$, takže dostáváme ihned (5).

Pro $\sigma = 0$ má (9) tvar

$$(1 + \mu)\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) + \sum_{j=1}^{n}\beta_i^j x_j(\tau_0).$$

Jest $1 + \mu \neq 0$, neboť jinak by $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), x_0(\tau_0), \ldots, x_n(\tau_0)$ byly lineárně závislé. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) + \left(\frac{1}{1+\mu} - 1\right)\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_i^j}{1+\mu}x_j(\tau_0),$$

což je opět výraz tvaru (5).

II. Nechť platí (4) a (5). Je-li přitom $\sigma = 0$, pak položme $\nu(\tau) = \nu_0 + (1 + \gamma)^{-1}(\tau - \tau_0)$ (6), $\bar{y}_i(\tau) = y_i(\nu(\tau))$, $i = 0, \ldots, n$, tedy $\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) = \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0)\cdot\dfrac{1}{1+\gamma}$ a dosazením do (5) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n}(1+\gamma)^{-1}\cdot\beta_i^j\cdot x_j(\tau_0),$$

tedy monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu(\tau))$ mají pro $\tau = \tau_0$ podle věty 2 analytický styk 1. řádu, tedy původní monosystémy styk 1. řádu podél prostoru $V_n(\tau_0) = W_n(\nu_0)$.

Je-li $\sigma > 0$, pak položme $\nu(\tau) = \nu_0 + (\tau - \tau_0) - (\sigma + 1)!^{-1}\cdot\gamma\cdot(\tau - \tau_0)^{\sigma+1}$, $\bar{y}_i(\tau) = y_i(\nu(\tau))$, $i = 0, \ldots, n$, tedy podle (7)

$$\frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}y_i}{\mathrm{d}\nu^{\sigma+1}}(\nu_0) - \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0)$$

a podle (5) a (4) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}\bar{y}_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}x_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) + \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) - \gamma\cdot\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0) + \sum_{j=0}^{n}\beta_i^j\cdot x_j(\tau_0) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^{\sigma+1}x_i}{\mathrm{d}\tau^{\sigma+1}}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n}\beta_i^j\cdot x_j(\tau_0),$$

tedy i v tomto případě mají podle věty 2 monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu(\tau))$ pro $\tau = \tau_0$ analytický styk řádu $\sigma + 1$, tedy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu)$ styk řádu $\sigma + 1$ podél prostoru $V_n(\tau_0) = W_n(\nu_0)$.

(6) Je totiž $1 + \gamma \neq 0$, neboť jinak by body

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0),\quad y_0(\nu_0) = x_0(\tau_0), \ldots, y_n(\nu_0) = x_n(\tau_0)$$

byly lineárně závislé.

Věta 4. *Nerozvinutelné monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu)$ třídy $\mathbf{C}_1$ v prostoru S_{2n+1} mají podél prostoru $Q = V_n(\tau_0) = W_n(\nu_0)$ styk 1. řádu právě tehdy, mají-li oba v každém bodě prostoru Q společný tečný prostor.*

Důkaz. I. Nechť oba monosystémy mají podél Q styk 1. řádu. Potom existují řídicí křivky $x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)$ monosystému $V_n(\tau)$, řídicí křivky $y_0(\nu), \dots, y_n(\nu)$ monosystému $W_n(\nu)$ a funkce $\nu(\tau)$, $\nu(\tau_0) = \nu_0$, $\nu'(\tau_0) \neq 0$, tak, že

$$(10) \qquad x_i(\tau_0) = y_i(\nu(\tau_0)), \quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}y_i(\nu(\tau))}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Ale je-li $a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i(\tau_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i(\nu(\tau_0))$ bod prostoru Q, pak tečný prostor monosystému $V_n(\tau)$ v tomto bodě je prostor

$$\left[x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\mathrm{d}x_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0)\right],$$

tečný prostor monosystému $W_n(\nu)$ je prostor

$$\left[y_0(\nu_0), \dots, y_n(\nu_0), \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{\mathrm{d}y_i(\nu(\tau))}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0)\right],$$

a tedy oba prostory splývají podle (10).

II. Nechť oba monosystémy mají v každém bodě společného tvořícího prostoru Q společný tečný prostor. Nejprve můžeme zvolit řídicí křivky $x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)$ monosystému $V_n(\tau)$ a $y_0(\nu), \dots, y_n(\nu)$ monosystému $W_n(\nu)$ tak, že platí

$$(11) \qquad x_i(\tau_0) = y_i(\nu_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Protože $x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0), \dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), \dots, \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0)$ je v důsledku nerozvinutelnosti $V_n(\tau)$ báze prostoru S_{2n+1}, existují čísla α_i^j, β_i^j tak, že platí

$$(12) \qquad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_i^j \cdot \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n} \beta_i^j \cdot x_j(\tau_0).$$

Podle předpokladu mají $V_n(\tau)$ i $W_n(\nu)$ v bodech $x_i(\tau_0) = y_i(\nu_0)$ společný tečný prostor, tedy existují čísla γ_i tak, že podle (11) a (12) platí pro $i = 0, \dots, n$

$$\left[\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)\right] = \gamma_i \left[\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0), y_0(\nu_0), \dots, y_n(\nu_0)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \gamma_i \alpha_i^j \left[\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)\right], \quad i = 0, \dots, n,$$

tedy, protože $\left[x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0), \dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), \dots, \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0)\right] \neq 0$, bude

$$\alpha_i^j = \frac{1}{\gamma_i} \delta_i^j, \quad \gamma_i \neq 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Dále $V_n(\tau)$ a $W_n(\nu)$ mají společný tečný prostor v bodě

$$x_0(\tau_0) + \dots + x_n(\tau_0) = y_0(\nu_0) + \dots + y_n(\nu_0),$$

tedy existuje číslo γ tak, že

$$\sum_{i=0}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)\right] = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)\right] =$$

$$= \gamma \cdot \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0), y_0(\nu_0), \dots, y_n(\nu_0)\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{\gamma}{\gamma_i} \left[\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)\right],$$

tedy musí být

$$\gamma_i = \gamma, \quad i = 0, \dots, n,$$

a (12) má tvar

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0) = \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n} \beta_i^j \cdot x_j(\tau_0),$$

což podle věty 3 znamená, že oba monosystémy mají styk 1. řádu podél Q.

Křivku $x(\tau)$ monosystému $V_n(\tau)$ třídy $\mathbf{C}_2$ s řídicími křivkami $x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)$ v prostoru S_{2n+1} nazveme *asymptotickou*, jestliže $[x''(\tau), x'(\tau), x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)] = 0$.

Věta 5. *Nerozvinutelné monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu)$ třídy $\mathbf{C}_2$ v prostoru S_{2n+1} mají podél prostoru $Q = V_n(\tau_0) = W_n(\nu_0)$ styk 2. řádu právě tehdy, jestliže se jejich asymptotické křivky v každém bodě prostoru Q dotýkají.*

Důkaz. I. Nechť oba monosystémy mají podél prostoru Q styk 2. řádu. Pak existují řídicí křivky $x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)$ na $V_n(\tau)$, řídicí křivky $y_0(\nu), \dots, y_n(\nu)$ na $W_n(\nu)$ a funkce $\nu(\tau)$, $\nu(\tau_0) = \nu_0$, $\nu'(\tau_0) \neq 0$, tak, že

$$(13) \qquad x_i(\tau_0) = y_i(\nu(\tau_0)), \quad \frac{\mathrm{d}x_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0) = \frac{\mathrm{d}y_i(\nu(\tau))}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), \quad \frac{\mathrm{d}^2x_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2y_i(\nu(\tau))}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Budiž

$$\bar{a} = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i x_i(\tau_0) = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i y_i(\nu(\tau_0))$$

bod prostoru Q a

$$a(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\tau) x_i(\tau), \quad \alpha_i(\tau_0) = \bar{\alpha}_i, \; i = 0, \dots, n,$$

budiž asymptotická křivka na $V_n(\tau)$ procházející bodem $\bar{a}$.
Potom

$$\left[\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\tau_0) \frac{\mathrm{d}^2 x_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau_0) + \right.$$
$$\left. +2 \sum_{i=0}^{n} \alpha_i'(\tau_0) \frac{\mathrm{d}x_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\tau_0) \frac{\mathrm{d}x_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), x_0(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)\right] = 0,$$

tedy podle (13) též

$$\left[\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\tau_0) \frac{\mathrm{d}^2 y_i(\nu(\tau))}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau_0) + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{i=0}^{n} \alpha_i'(\tau_0) \frac{\mathrm{d}y_i(\nu(\tau))}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\tau_0) \frac{\mathrm{d}y_i(\nu(\tau))}{\mathrm{d}\tau}(\tau_0), y_0(\nu(\tau_0)), \dots, y_n(\nu(\tau_0))\right] = 0,$$

což znamená, že křivka

$$b(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\tau) y_i(\nu(\tau))$$

má pro $\tau = \tau_0$ asymptotický směr na $W_n(\nu(\tau))$. Ale podle (13) prochází $b_n(\tau)$ pro $\tau = \tau_0$ bodem $\bar{a}$ a dotýká se v něm křivky $a(\tau)$.

II. Nechť se dotýkají asymptotické křivky obou monosystémů v každém bodě prostoru Q. Monosystémy $V_n(\tau)$, $W_n(\nu)$ mají tedy v každém bodě prostoru Q společný tečný prostor, tedy podle věty 4 mají podél Q styk 1. řádu. Existuje tedy funkce $\nu(\tau)$, $\nu(\tau_0) = \nu_0$, $\nu'(\tau_0) \neq 0$, a řídicí křivky $x_0(\tau), \dots, x_n(\tau)$ na $V_n(\tau)$ a řídicí křivky $y_0(\tau), \dots, y_n(\tau)$ na $W_n(\nu(\tau))$ tak, že platí

$$x_i(\tau_0) = y_i(\tau_0), \; x_i'(\tau_0) = y_i'(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

Zvolme funkce $\alpha_i^j(\tau)$ tak, aby

$$\bar{x}_i(\tau) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_i^j(\tau) x_j(\tau), \quad i = 0, \dots, n,$$

byl normalisovaný systém asymptotických řídicích křivek (viz [3]), tj. aby platilo

$$(14) \qquad \bar{x}_i''(\tau) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_i^j(\tau) \bar{x}_j(\tau),$$

a definujme

$$\bar{y}_i(\tau) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_i^j(\tau) y_j(\tau), \quad i = 0, \dots, n.$$

Potom platí též

$$(15) \qquad \bar{x}_i(\tau_0) = \bar{y}_i(\tau_0), \; \bar{x}_i'(\tau_0) = \bar{y}_i'(\tau_0), \quad i = 0, \dots, n,$$

tedy křivky $\bar{y}_i(\tau)$ se dotýkají v bodech prostoru Q asymptotických křivek $\bar{x}_i(\tau)$ a jejich směry v těchto bodech jsou tedy asymptotické na $W_n(\nu(\tau))$. To znamená, že existují čísla μ_i, ν_i^j tak, že

$$(16) \qquad \bar{y}_i''(\tau_0) = \mu_i \bar{y}_i'(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n} \nu_i^j \bar{y}_j(\tau_0).$$

Protože $\bar{x}_0(\tau), \dots, \bar{x}_n(\tau)$ je normalizovaný systém asymptotických řídicích křivek, je také křivka $\bar{x}_0(\tau) + \dots + \bar{x}_n(\tau)$ asymptotická. Křivka $\bar{y}_0(\tau) + \dots + \bar{y}_n(\tau)$ se však této křivky dotýká v bodě $\bar{x}_0(\tau_0) + \dots + \bar{x}_n(\tau_0)$ prostoru Q a tedy má v tomto bodě asymptotický směr. Odtud snadno plyne, že v (16) musí být

$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = \mu.$$

Ze (14) a (16) plyne potom podle (15)

$$\bar{y}_i''(\tau_0) = \bar{x}_i''(\tau_0) + \mu \bar{x}_i'(\tau_0) + \sum_{j=0}^{n} (\nu_i^j - \gamma_i^j(\tau_0)) \bar{x}_j(\tau_0),$$

což vzhledem k (15) podle věty 3 znamená, že oba monosystémy mají styk 2. řádu podél Q.

LITERATURA

[1] Čech E., *Projektivní diferenciální geometrie*, Praha 1926.
[2] Hodge W. V. D., Pedoe D., *Methods of Algebraic Geometry*, vol. I, Cambridge 1947.
[3] Jůza M., *Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées*, Czechosl. Math. J. *10* (85), 1960, 440–456.

Došlo 10. 4. 1965.

Výzkumný ústav matematických strojů,
Praha

КАСАНИЕ МОНОСИСТЕМ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Милослав Юза

Резюме

Пусть в проективном пространстве S_{2n+1} дано n кривых $x_0(\tau), \ldots, x_n(\tau)$ и n кривых $y_0(\nu), \ldots, y_n(\nu)$. Системы пространств $V_n(\tau) = [x_0(\tau), \ldots, x_n(\tau)]$ и $W_n(\nu) = [y_0(\nu), \ldots, y_n(\nu)]$ мы будем называть моносистемами. Предположим, что эти моносистемы неразвертывающиеся, это значит, что

$$[x_0(\tau), \ldots, x_n(\tau), x_0'(\tau), \ldots, x_n'(\tau)] \neq 0,$$

$$[y_0(\nu), \ldots, y_n(\nu), y_0'(\nu), \ldots, y_n'(\nu)] \neq 0.$$

Если определить пространства $V_n(\tau)$ и $W_n(\nu)$ при помощи их координат Грассманна, то эти моносистемы являются кривыми в пространстве S_N, где $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$. Эти кривые имеют касание порядка σ в точке $V_n(\tau_0) = W_n(\nu_0)$, если можно подобрать направляющие кривые $x_i(\tau)$, $y_i(\nu)$ моносистем и параметры τ, ν так, что $x_i(\tau_0) = y_i(\nu_0)$, $\frac{dx_i}{d\tau}(\tau_0) = \frac{dy_i(\nu_0)}{d\nu}(\nu_0), \ldots, \frac{d^\sigma x_i}{d\tau^\sigma}(\tau_0) = \frac{d^\sigma y_i}{d\nu^\sigma}(\nu_0)$, $i = 0, \ldots, n$, и только в этом случае. Они имеют касание 1-ого порядка тогда и только тогда, когда моносистемы $V_n(\tau)$, $W_n(\nu)$ имеют в каждой точке пространства $V_n(\tau_0) = W_n(\nu_0)$ общее касательное пространство; они имеют касание 2-ого порядка тогда и только тогда, когда асимптотические линии обеих моносистем касаются в каждой точке этого пространства.