MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

POZNÁMKA K DUÁLNYM POLOGRUPÁM

DOROTA KRAJŇÁKOVÁ, Bratislava

V práci [2] Š. Schwarz vyšetruje štruktúru istých pologrúp s nulou, tzv. duálnych pologrúp. Zaviedol pojem ľavého (pravého) anulátora podmnožiny A pologrupy S a pojem duálnej pologrupy nasledujúcim spôsobom.

Definícia 1. *Nech A je neprázdna podmnožina pologrupy S s nulou. Ľavým (pravým) anulátorom $\mathscr{L}(A)$ ($\mathscr{R}(A)$) podmnožiny A nazývame množinu všetkých $x \in S$, pre ktoré platí $xA = 0$ ($Ax = 0$).*

Definícia 2. *Pologrupu $S \neq 0$ nazývame duálnou, ak pre každý ľavý ideál L pologrupy S platí*

$$\mathscr{L}[\mathscr{R}(L)] = L \tag{1}$$

a pre každý pravý ideál R pologrupy S platí

$$\mathscr{R}[\mathscr{L}(R)] = R. \tag{2}$$

Ako vieme, pologrupy zvyškov (mod m), kde m je prirodzené číslo, sú pologrupy s nulou. Vzniká otázka, či pologrupa S zvyškov (mod m) je duálna. Na túto otázku dáva odpoveď veta, ktorá je obsahom tejto poznámky.

Najprv vyšetríme niektoré vlastnosti pologrupy S zvyškov (mod m), ktoré budeme potrebovať k dôkazu vety.

Lema 1. *Nech S je pologrupa zvyškov* (mod p^α), *kde p je prvočíslo a α celé kladné číslo. Pre každé $x \in S$ nesúdeliteľné s p platí $Sx = xS = S$.*

Dôkaz. Z práce [1] podľa vety 4 vyplýva, že pologrupa S zvyškov (mod p^α) má práve dva idempotenty. Sú to 0,1. Teda pologrupa S sa dá rozložiť ako množinový súčet dvoch disjunktných tried K_0, K_1. Triedu K_0 tvoria prvky patriace k idempotentu 0 a sú to tie prvky pologrupy S, ktoré sú súdeliteľné s p. Triedu K_1 tvoria prvky patriace k idempotentu 1 a sú to prvky pologrupy S nesúdeliteľné s p.

Ak x je nesúdeliteľné s p, potom $x \in K_1$, a teda existuje také prirodzené číslo ϱ, že $x^\varrho = 1$. Keďže pologrupa S má jednotku, je $x \in Sx$. Ale tiež $x^n \in Sx$ pre ľubovoľné prirodzené číslo n. Teda tiež $x^\varrho = 1 \in Sx$. Potom platí $S = S \,.\, 1 \subseteq Sx$. Z toho vyplýva $Sx = S$.

Pologrupa S zvyškov (mod p^α) je komutatívna, teda $xS = Sx = S$.

Lema 2. *Vlastný ideál M pologrupy S zvyškov (mod p^α) neobsahuje prvky nesúdeliteľné s p.*

Dôkaz. Podľa predpokladu $M \subset S$. Pripusťme, že M obsahuje prvok y nesúdeliteľný s p. Potom $Sy \subseteqq M$. Ale podľa lemy 1 $Sy = S$. Teda $S = Sy \subseteqq M$. To je spor s predpokladom $M \subset S$.

Lema 3. *Každý ideál M pologrupy S zvyškov (mod p^α) dá sa písať vo tvare $M = Sp^r$, kde r je celé kladné číslo $0 \leqq r \leqq \alpha$.*

Dôkaz. Je zrejmé, ak $M = S$, potom $r = 0$; ak $M = (0)$, potom $r = \alpha$. Ostáva nám dokázať: ak $(0) \neq M \neq S$, existuje také r, že $M = Sp^r$.

Nech $(0) \neq M \neq S$. Podľa lemy 2 M obsahuje prvok $a \neq 0$ súdeliteľný s p. Môžeme ho písať vo tvare $a = t \cdot p^n$, pričom $(t, p) = 1$. Potom $S(tp^n) \subseteqq M$. Ale $S(tp^n) = (St)p^n = Sp^n \subseteqq M$. Z toho vyplýva, že $p^n \in M$ a všetky vyššie mocniny $p^{n+1}, p^{n+2}, \ldots$ sú z M. Nech najnižšia mocnina p, ktorú M obsahuje, je p^r. Tvrdíme, že $M = Sp^r$.

Pripusťme, že $Sp^r \subset M$. Potom existuje ďalší prvok $y \in M$, ktorý sa dá písať vo tvare $y = t \cdot p^{r-k}$, pričom k je celé kladné číslo $1 \leqq k \leqq r - 1$, a $(t, p) = 1$. Ale $S(tp^{r-k}) = Sp^{r-k} \subset M$. Z toho vyplýva, že $p^{r-k} \in M$ a to je spor s tým, že p^r je najnižšia mocnina, ktorú M obsahuje.

Veta. *Pologrupa S zvyškov (mod m) je duálna vtedy a len vtedy, keď $m = p^\alpha$, pričom p je ľubovoľné prvočíslo a α celé kladné číslo.*

Dôkaz. a) Nech $m = p^\alpha$. Podľa lemy 3 každý jej ideál môžeme písať vo tvare Sp^r, $0 \leqq r \leqq \alpha$. Keďže S je komutatívna pologrupa, stačí ukázať, že každý ideál Sp^r spĺňa podmienku (1).

$$\mathscr{L}[\mathscr{R}(Sp^r)] = \mathscr{L}[p^{\alpha-r}S] = Sp^r.$$

b) Ak $m = p_1^\alpha \cdot p_2^\beta \ldots p_n^\gamma$ ($p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú rôzne prvočísla, $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ sú celé kladné čísla), ukážeme, že pologrupa S nie je duálna. Stačí, ak dokážeme, že aspoň jeden ideál pologrupy S nesplňuje podmienku (1). Uvažujme o ideále $Sp_1 \cup Sp_2$, $(p_1 \neq p_2)$. Na základe [2] (lema 1, 2) môžeme písať:

$$\mathscr{L}[\mathscr{R}(Sp_1 \cup Sp_2)] = \mathscr{L}[\mathscr{R}(Sp_1) \cap \mathscr{R}(Sp_2)] = \mathscr{L}[Sp_1^{\alpha-1}p_2^\beta \ldots p_n^\nu \cap Sp_1^\alpha p_2^{\beta-1} \ldots p_n^\nu] = \mathscr{L}[Sp_1^\alpha \cdot p_2^\beta \ldots p_n^\nu] = \mathscr{L}(0) = S \neq Sp_1 \cup Sp_2.$$

Tým je veta dokázaná.

СИНОПСИСЫ

Уоллес А. Д., *Проблемы периодичности — функции и полугруппы*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 209—212. (Англ.)

Статья содержит ряд параллельных предложений и проблем в аналитической топологии и в полугруппах.

Карпе Р., *О разложениях совокупности на k нечетных совокупностей*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 213—214. (Словацк.; рез. англ.)

В статье дается вывод некоторых свойств чисел ${}^2S(n, k)$. Формула для этих чисел получается из формулы Стерлинга второго рода присоединением некоторого дальнейшего условия.

Крайнякова Д., *Заметка о дуальных полугруппах*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 215—217. (Словацк.; рез. англ.)

В статье дается доказательство теоремы: Полугруппа классов вычетов по модулю m дуальна тогда и только тогда, когда $m = p^\alpha$ (p — простое и α — целое, $\alpha > 0$).

Юза М., *Касание моносистем проективных пространсте*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 218—228. (Чешск.; рез. русск.)

Пусть $V_n(t)$, $W_n(t)$ — две системы проективных пространств размерности n (моносистемы) в проективном пространстве размерности $2n + 1$. В статье указаны условия, при которых эти моносистемы имеют касание порядка 1 или 2 для пространста $V_n(t_0) = W_n(t_0)$.

Юцович Е., *О невписываемых многогранниках II*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 229—234. (Словацк.; рез. англ.)

Доказываются теоремы: 1. Для выпуклого многогранника с нечетным числом вершин, все грани которого имеют четную степень, не существует описанной сферы. 2. Пусть Γ_n — множество всех выпуклых многогранников с n вершинами. Для $H \in \Gamma_n$ введем обозначение $\varphi(H) = n - v$, где v — максимальное число вершин многогранника типа H, лежащих на описанной сфере. Для $\varphi(n) = \max \varphi(H)$, $H \in \Gamma_n$ справедливо $\varphi(n) \geqq \left[\frac{n-11}{3}\right]$.

Розанов Ю. А., *Некоторые задачи теории оценок и прогнозирования*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 235—256. (Русск.)

Обзорная статья об оценках коэффициентов регрессии и нелинейных методах прогнозирования. Статья содержит постановку некоторых новых задач.

Вала Й., *Квадратичные системы Рикати на линейчатых поверхностях*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 257—267. (Нем.)

На линейчатой неразвертывающейся поверхности в P_3 существуют в общем случае две квадратичные системы Рикати (системы $R(y, z)$), которые имеют заданные главные линии y, z. Исследуются некоторые свойства этих систем и многообразий, которые принадлежат к этим системам.

SYNOPSES

Wallace A. D., *Problems on periodicity — functions and semigroups*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 209—212. (English.)

The paper contains a collection of parallel propositions and problems, in analytic topology and semigroups.

Karpe R., *The partition of a set into k odd sets*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 213—214. (Slovak, English summary.)

Some properties of the numbers ${}^2S(n, k)$ are derived in the article. The definition of these numbers originates in the definition of Stirling's numbers of the second kind, supplemented by a certain further condition.

Krajňáková D., *A note on dual semigroups*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 215—217. (Slovak, English summary.)

In this paper the proof of the following theorem is given: A semigroup of residue classes (mod m) is dual if and only if $m = p^\alpha$ (p is prime and α a positive integer).

Jůza M. *Contact of monosystems of projective spaces*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 218—228. (Czech, Russian summary.)

Let $V_n(t)$, $W_n(t)$ be two systems of n-dimensional projective spaces depending on one parameter (monosystems) in a $(2n+1)$-dimensional projective space. Conditions are given for the contact of order one or two between such monosystems in the space $V_n(t_0) = W_n(t_0)$.

Jucovič E., *On non-inscribable polyhedra II*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 229—234. (Slovak, English summary.)

The following theorems are proved: 1. A convex polyhedron with an odd number of vertices, all faces of which are of even order, is without a circumsphere. 2. Let Γ_n be the set of all convex polyhedra with n vertices. For $H \in \Gamma_n$ denote $\varphi(H) = n - v$, where v is the greatest number of vertices of a polyhedron of type H lying on a circumsphere. For $\varphi(n) = \max \varphi(H)$, $H \in \Gamma_n$, we have $\varphi(n) \geqq \left[\frac{n-11}{3}\right]$.

Rozanov Ju. A., *Some problems of the estimation and prediction theory*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 235—256. (Russian.)

A review article dealing with the estimates of the regression coefficients and the nonlinear methods of the prediction. Some new problems are given.

Vala J., *Quadratic systems of Riccati on ruled surfaces*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 257—267. (German.)

On the nondevelopable ruled surface in P_3 there exist in general two quadratic systems of Riccati (systems $R(y, z)$) determined by two given fundamental curves y, z. Some properties of the systems and varieties belonging to the systems are found.

Riečan B., *Abstract formulation of some theorems of measure theory*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 268—273. (English.)

Let $(X, \mathscr{S}, m)$ be a measure space, $\mathscr{N}_n = \{E \in \mathscr{S} : m(E) < 1/n\}$. In the article three theorems are formulated and proved by means of some properties of the systems $\mathscr{N}_n$ only: Egoroff's theorem, Luzin's theorem and the statement that every Baire measure is regular.

Duchoň M., *The product of scalar and vector measures*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 274—281. (Russian.)

The product of the scalar (i. e. finite real or complex) measure m defined on σ-ring $\mathscr{M}$ and of the vector-valued measure μ defined on σ-ring $\mathscr{P}$ (with values in sequentially complete locally convex topological linear space X) is constructed.

Bartoš P., Kaucký J., *Additional note to our paper „A genesis for combinatorial identities“*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 282—284. (English.)

The note contains a further method by means of which some combinatorial formulas can be derived.

Rosa A., *A note on cyclic Steiner triple systems*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 285—290. (Slovak, English summary.)

A new construction of cyclic Steiner triple system of order n for every admissible n is given, which permits to construct such a system in a certain uniform manner for two adjacent orders $6k + 3$ and $6k + 7$ with arbitrary $k \neq 1$.

Bartoš P., Znám Š., *On symmetric and cyclic means of positive numbers*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 291—297. (Slovak, English summary.)

Three new kinds of means ($G_{1\alpha}$, $A_{2\alpha}$, $G_{2\alpha}$) are introduced and the relation between them and the known kinds of means is shown.

Krajčovič S., *On the calculation of geoelectric resistivity anomalies of infinite circular half-cylinders*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 298—302. (English.)

In the paper there is deduced the method of the computation of geoelectric resistivity anomalies due to a half-cylindrical embedded body for different ratios of the resistivities of the half-cylindrical body to the surroundings. Further the conditions are given when one must consider the influence of the half-cylindrical embedded body and the conditions under which it is possible to neglect that infuence.

Dubinský J., Chaloupka P., Kowalski T., *The position of the cosmic equator in the zone of zero meridian*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 303—308. (Russian.)

In 1963 the position of the cosmic equator in the zone of zero meridian was determined by means of a large-surface wide-angle telescope $\varphi E = 6{,}5\ ^\circ$N. The coefficient of correlation among points of the parabola of third degree and measured values is $\varrho = 0{,}84$. Our measurements covering the range from sun's maximum to sun's minimum (1956—1963) and against all expectations the changes in the position of the cosmic equator apparently remain within the range of the errors of observation.

Риечан Б., *Абстрактная формулящия некоторых теорем теории меры*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 268–273. (Англ.)

Пусть $(X, \mathcal{S}, m)$ — пространство меры, $\mathcal{N}_n = \{E \in \mathcal{S} : m(E) < 1/n\}$. В статье сформулированы и доказаны три теоремы при помощи только некоторых свойств систем $\mathcal{N}_n$: теоремы Егорова, Лузина и утверждение, что всякая мера Бэра регулярна.

Духонь М., *Прямое произведение скалярной и векторной мер*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 274–281. (Русск.)

Построено прямое произведение скалярной (т. е. конечной действительной или комплексной) меры m, определенной на σ-кольце $\mathcal{M}$, и векторной меры μ, определенной на σ-кольце $\mathcal{P}$ (со значениями в секвенциально полном локально выпуклом топологическом линейном пространстве X).

Бартош П., Кауцки Й., *Замечание к нашей статье: „Об одном способе получения комбинаторных тождеств"*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 282–284. (Англ.)

Заметка содержит новый метод, с помощью которого можно получить некоторые комбинаторные формулы.

Роса А., *Замечание о циклических системах троек Штейнера*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 285–290. (Словацк.; рез. англ.)

Приводится новое построение циклических систем троек Штейнера порядка n для каждого допустимого n, позволяющее построить такую систему некоторым единым образом для двух сопряженных порядков $6k + 3$ и $6k + 7$ для произвольного $k \neq 1$.

Бартош П., Знам Ш., *О симметрических и циклических средних положительных чисел*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 291–297. (Словацк.; рез. англ.)

В статье вводятся три новые вида средних величин ($G_{1\alpha}$, $A_{2\alpha}$, $G_{2\alpha}$) и показывается их соотношение к известным видам средних.

Крайчович С., *Заметка о вычислении геоэлектрических аномалий удельного сопротивления, созданных бесконечным круговым полуцилиндром*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 298–302. (Англ.)

В статье предлагается метод вычисления геоэлектрических аномалий удельного сопротивления, созданных полуцилиндрическим телом, при разных отношениях удельных сопротивлений полуцилиндра и окружающей среды. Далее даны условия, при соблюдении которых необходимо учитывать влияние полуцилиндрического тела и условия, при соблюдении которых можно этим влиянием пренебречь.

Дубински Ю., Халоупка П., Ковалски Т., *Положение космического экватора в области нулевого меридиана*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 303—308. (Русск.)

В 1963 г. с помощью широкоугольного телескопа с большой поверхностью было определено расположение космического экватора в области нулевого меридиана $\varphi E = 6{,}5\,°N$. Коэффициент корреляции между точками параболы третьей степени и измеренными значениями $\varrho = 0{,}84$. Наше измерение дополняет серию измерений расположенных в период от солнечного максимума до солнечного минимума (1956—1963 гг.), и вопреки ожиданию измерения расположения космического экватора остаются в пределах ошибок наблюдения.

LITERATÚRA

[1] Parízek B., Schwarz Š., *O komutatívnej pologrupe zvyškových tried* (mod m), Mat.-fyz. časop. *8* (1958), 136–150.

[2] Schwarz Š., *On dual semigroups*, Czechosl. Math. J. *10* (*85*) (1960), 201–230.

Došlo dňa 1. 4. 1965.

Katedra matematiky
Chemickotechnologickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

A NOTE ON DUAL SEMIGROUPS

Dorota Krajňáková

Summary

A semigroup of residue classes (mod m) is dual if and only if $m = p^\alpha$ (p is prime and α a positive integer).