MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

O ROZKLADOCH MNOŽINY NA k NEPÁRNYCH MNOŽÍN

ROBERT KARPE, Brno

Definícia. *Párnou resp. nepárnou množinou nazveme množinu o párnom resp. nepárnom počte prvkov;* ďalej *párnym resp. nepárnym rozkladom na množine nazveme jej rozklad na párne resp. nepárne podmnožiny.*

Ako vieme, Stirlingovo číslo 2. druhu, ktoré označíme ${}^1S(n, k)$, udáva počet všetkých možných rozkladov množiny n rôznych prvkov na k neprázdnych podmnožín.

V našom článku riešime analogickú úlohu, vznikajúcu za dodatočnej podmienky, aby všetky podmnožiny rozkladu boli nepárne. Nech teda znak ${}^2S(n, k)$ označuje počet rozkladov množiny n rôznych prvkov na k nepárnych podmnožín.

Definujeme ${}^2S(0, 0) = 1$, ${}^2S(r, 0) = {}^2S(0, s) = 0$ pre $r > 0$, $s > 0$.

Pre ${}^2S(n, k)$ platí vzorec analogický ku známemu vzorcu: ${}^1S(n, k) = {}^1S(n - 1, k - 1) + k \,.\, {}^1S(n - 1, k)$, pozri napríklad [1], str. 33.

Veta. *Pre ľubovoľné prirodzené čísla $n \geq 2$, $k \geq 2$ platí:*

$$ {}^2S(n, k) = {}^2S(n - 2, k - 2) + k^2 \,.\, {}^2S(n - 2, k). $$

Dôkaz. Nech $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je množina n od seba rôznych prvkov. Položme $N = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ a označme $R(X, s)$ rozklad množiny X na s neprázdnych podmnožín.

Nech $R(N, k - 2)$ je nepárny rozklad. Potom bude nepárnym rozkladom tiež $R(M, k)$, utvorený pridaním dvoch jednoprvkových podmnožín (x_{n-1}), (x_n) ku $R(N, k - 2)$.

Zvoľme teraz istý nepárny rozklad $R(N, k)$. Ak začleníme do množín rozkladu $R(N, k)$ prvky x_{n-1}, x_n (a to je možné spolu k^2 spôsobmi), môžu nastať dva prípady:

1. x_{n-1}, x_n, ležia v tej istej množine,
2. x_{n-1}, x_n, ležia každý v inej množine.

V prvom prípade je výsledný rozklad $R(M, k)$ nepárny. V druhom prípade je možné výsledný rozklad $R(M, k)$ urobiť nepárnym takto: Nech $x_{n-1} \in M_1$, $x_n \in M_2$, $M_1 \neq M_2$ (množiny rozkladu), takže M_1, M_2 sú párne. Ak je x_i prvok s najnižším indexom v množine $M_1 \cup M_2$, a ak platí napríklad $x_i \in M_1$, preradíme x_i do M_2. Vidno, že aspoň jeden z prvkov x_{n-1}, x_n, nebude sám vytvárať podmnožinu nového rozkladu, vzniknutého preradením prvku x_i.

Pretože všetkých nepárnych rozkladov $R(N, k-2)$, resp. $R(N, k)$ je ${}^2S(n-2, k-2)$, resp. ${}^2S(n-2, k)$, vyplýva odtiaľ bezprostredne veta pre $n \geq 3$, $k \geq 3$. Rozšírenie platnosti vety pre $n \geq 2$, $k \geq 2$, je vzhľadom na uvedené definície triviálne.

Položme teraz pre stručnosť ${}^2S(n, k) = S_n^k$. Potom $F_k(x) = S_k^k + S_{k+2}^k \cdot x^2 + S_{k+4}^k \cdot x^4 + \dots$ je vytvárajúca funkcia pre ${}^2S(n, k)$.

Analogickým postupom ako v [2], str. 168—170, dostaneme vzhľadom na uvedenú vetu:

$$(1 - k^2x^2) \,.\, F_k(x) = F_{k-2}(x);$$

odtiaľ vyplýva pre nepárne k:

$$F_k(x) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - 9x^2)(1 - 25x^2)\dots(1 - k^2x^2)},$$

a pre párne k:

$$F_k(x) = \frac{1}{(1 - 4x^2)(1 - 16x^2)(1 - 36x^2)\dots(1 - k^2x^2)}.$$

Číslo ${}^2S(n, k)$ je vo $F_k(x)$ koeficientom pri x^{n-k}.

LITERATÚRA

[1] Riordan J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York—London 1958.
[2] Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik*, Leipzig 1901.

Došlo 18. 11. 1963.

Katedra matematiky strojní fakulty
Vysokého učení technického,
Brno

THE PARTITION OF A SET INTO k ODD SETS

Robert Krape

Summary

The well-known definition of Stirling's number of the second kind is supplemented by a condition, stating that every set of the partition must contain an odd number of elements.

For numbers so defined and denoted by the symbol ${}^2S(n, k)$ an analogous basic relation holds good, and their generating function can also be found in an analogous way.