MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

O PRAVIDELNE PESTRÝCH POLYÉDROCH

ANTON KOTZIG, Bratislava

V celej tejto práci pod polyédrom rozumie sa eulerovský polyéder v zmysle Steinitzovom (pozri [2]). Pod n-valentným polyédrom budeme rozumieť — ako obvykle — polyéder, v ktorom každý vrchol je incidentný práve s n hranami. Nech P je n-valentný polyéder. Označme znakom V (resp. H, resp. S) počet jeho vrcholov (resp. hrán, resp. stien) a znakom s_k počet tých jeho stien, ktoré sú k-uholníkmi. Je zrejmé, že platia tieto rovnosti:

$$S = \sum_{i=3}^{\infty} s_i; \qquad 2H = \sum_{i=3}^{\infty} i s_i; \qquad 2H = nV. \tag{1}$$

Po dosadení podľa týchto rovností do známeho Eulerovho vzťahu:

$$V - H + S = 2 \tag{2}$$

a po úprave dostaneme:

$$\frac{4n}{n-2} = \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{2n}{n-2} - i\right) s_i. \tag{3}$$

Vskutku elementárnou úvahou sa ľahko možno presvedčiť, že existujú len polyédre troj-, štvor- a päťvalentné. Ak by totiž platilo $n \geqq 6$, potom je $2(n-2) < 2n \leqq 3(n-2)$ a platilo by:

$$\sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{2n}{n-2} - i\right) s_i \leqq 0; \qquad \frac{4n}{n-2} \geqq 4,$$

čo je v rozpore s rovnosťou (3). Preto neexistujú polyédre viac než päťvalentné. Pre jednotlivé prípustné n ($n \in \{3, 4, 5\}$) dostávame dosadením do (3) tieto známe rovnosti, ktoré pripomíname, lebo ich v ďalšom budeme potrebovať:

Prípad: Rovnosť:

$$\begin{cases} n = 3 & 3s_3 + 2s_4 + s_5 = 12 + s_7 + 2s_8 + \ldots + (k-6)s_k + \ldots \\ n = 4 & s_3 = 8 + s_5 + 2s_6 + \ldots + (k-4)s_k + \ldots \\ n = 6 & s_3 = 20 + 2s_4 + 5s_5 + \ldots + (3k-10)s_k + \ldots \end{cases} \tag{4}$$

Poznámka. Z platnosti rovností (4) ihneď vyplýva, že štvorvalentný polyéder obsahuje najmenej 8 trojuholníkov a päťvalentný najmenej 20 trojuholníkov.

Definícia: *O n-valentnom polyédri budeme hovoriť, že je pravidelne pestrý, keď existuje rastúca postupnosť prirodzených čísel* $2, u_1, u_2, \ldots, u_n$ *tak, že pre všetky* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *platí: každý vrchol polyédra je incidentný práve s jedným* u_i*-uholníkom.*

Veta. *Každý pravidelne pestrý polyéder je trojvalentný a buď obsahuje 12 štvoruholníkov, 8 šesťuholníkov a 4 osemuholníkov, alebo obsahuje 30 štvoruholníkov, 20 šesťuholníkov a 12 desaťuholníkov. Existuje aj taký pravidelne pestrý polyéder oboch uvedených typov, v ktorom každá stena je pravidelným mnohouholníkom a každý pravidelne pestrý polyéder je izomorfný práve s jedným z uvedených dvoch polyédrov.*

Dôkaz. Z práce [1] (pozri vetu 8) je známe, že v každom päťvalentnom polyédri existuje aspoň jeden taký vrchol, ktorý je incidentný najmenej so štyrmi trojuholníkmi. Z toho vyplýva, že pravidelne pestrý polyéder nemôže byť päťvalentný. Dokážme, že nemôže byť ani štvorvalentný!

Predpokladajme naopak, že existuje štvorvalentný polyéder, v ktorom každý vrchol je incidentný s k-uholníkom, p-uholníkom, q-uholníkom a s r-uholníkom, kde $2 < k < p < q < r$. Z poznámky je zrejmé, že $k = 3$. Platí však zrejme $xs_x = 3s_3$ pre všetky $x \in \{p, q, r\}$. Teda $s_x = \frac{3}{x} s_3$ pre všetky $x \in \{3, p, q, r\}$ a $s_y = 0$ pre všetky y nepatriace do $\{3, p, q, r\}$. Podľa (5) potom platí:

$$s_3 = 8 + \frac{3p - 12}{p} s_3 + \frac{3q - 12}{q} s_3 + \frac{3r - 12}{r} s_3 .$$

Čiže: $0 = 8 + 4s_3 (2 - 3c)$; kde $c = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$, a teda kde $2 - 3c > 0$. To je ale spor, lebo s_3 nemôže byť číslo záporné. Predpoklad existencie pravidelne pestrého štvorvalentného polyédra vedie ku sporu. Z uvedeného vyplýva, že pravidelne pestrý polyéder môže byť len trojvalentný. To dokazuje prvé tvrdenie vety.

Nech P je trojvalentný polyéder, v ktorom každý vrchol je incidentný s jedným p-uholníkom, s jedným q-uholníkom a s jedným r-uholníkom, pričom $p < q < r$. Ak by sme obiehali po obvode ľubovoľného p-uholníka z P, museli by sme po hranách zrejme prechádzať tak, že hrany, na ktorých susedí tento p-uholník s q-uholníkom, a hrany, na ktorých susedí s r-uholníkom, sa striedajú. Z toho vyplýva, že p je párne číslo. Obdobnou úvahou o q-uhol-

СИНОПСИСЫ

Бруновски П., *О наибыстрейшем поиске точки на линии*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 97 — 104. (немецк.)

Предполагается, что задано распределение вероятности исходного положения поиска начала координат на прямой. Начало находят, передвигаясь из исходного положения поочередно направо и налево на возрастающие расстояния. Доказывается существование стратегии, обеспечивающей в среднем минимальное время поиска.

Барновска М., *Асимптотическое представление спектральной матрицы дифференциального оператора четвертого порядка*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 105 — 127. (русск.)

В статье находится спектральная матрица дифференциального оператора четвертого порядка на интервале $(0, \infty)$ при больших значениях параметра.

Катриняк Т., *Примечание к структурам Стоуна I*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 128—142. (русск.)

В работе изучаются некоторые свойства структур с псевдодополнениями и такие структуры, структура всех идеалов которых является стуктурой стоуна.

Костырко П., *О некоторых пространствах с метрикой типа Бэра*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 143 — 153. (русск.)

В статье рассматриваются некоторые пространства вещественных функций с топологической и метрической точки зрения.

Гусарик Ф., *К циклосферическому изображению в* E_4, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 154 — 165. (словацк.; рез. русск.)

В работе методом обобщения циклографического изображения с E_3 на четырехмерное пространство E_4 решена задача о поверхностях шара, которые являются поверхностями соприкосновения вращательного конуса и пересекают плоскости $\varrho^{(i)}$ под углами $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Бучко М., Кауцки Й., *Об одном виде перестановок*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 166 — 174. (русск.)

В работе исследуются перестановки с циклами, порядки которых равны степеням натуральных чисел.

Коциг А., *Циклы в уравновешенно ориентированных полных графах*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 175 — 182. (англ.)

Пусть G — полный граф с $2n - 1$ вершинами, ориентированный так, что каждая вершина имеет внутреннюю и внешнюю полустепень равную n. Пусть r — натуральное число, $1 < r \leqslant 2n + 1$ и пусть R — некоторое множество вершин G, $|R| = r$. В графе G существует цикл длины k содержащий все вершины из R либо для всех $k \in K_r = \{r, r+1, \ldots, 2n+1\}$, либо существует такой цикл для всех $k \in K_r$ с единственным исключением $k \neq r$, или с единственным исключением $k \neq r + 1$.

SYNOPSES

Brunovský P., *On the fastest search for a point on a line*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 97–104. (German.)

There is given a probability distribution of the initial point of the search for the origin on a line. The search is carried out by advancing alternately to the right and to the left in increasing distances. The proof is given of the existence of a strategy, which realizes the minimum in the mean of the search time.

Barnovská M., *Asymptotic representation of the spectral matrix of a fourth-order differential operator*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 105–127. (Russian.)

In this paper the spectral matrix of a certain fourth-order differential operator for large values of the parameter on the interval $(0, \infty)$ is found.

Katriňák T., *Notes on Stone's lattices I*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 128—142. (Russian.)

In this paper some properties of pseudocomplemented lattices are studied. Further such lattices are discussed that the lattice of all their ideals is Stone's lattice.

Kostyrko P., *On some spaces with Bair's type metric*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 143—153. (Russian.)

In this paper some properties of real functions, from the topological and metrical point of view are considered.

Husárik F., *Contribution to the cyclospheric display in E_4*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 154–165. (Slovak, Russian summary.)

By a method of widening the cyclographic display from E_3 into the four-dimensional display E_4, the contribution solves the problem of spheric areas that are touching the rotation cone areas and cut the planes $\varrho^{(i)}$ under the angles $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Bučko M., Kaucký J., *On a class of premutations*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 166–174. (Russian.)

This paper contains an approach to permutations with cycles whose orders are powers of natural numbers.

Kotzig A., *Cycles in a complete graph oriented in equilibrum*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 175–182. (English.)

Let G be a complete graph with $2n + 1$ vertices oriented so that every vertex has an equal indegree and outdegree n. Let r be any natural number, $1 < r \leqq 2n + 1$ and let R be any set of G, $|R| = r$. In the graph G there exists a cycle of the length k containing all vertices of R either for all $k \in K_r = \{r, r + 1, \ldots, 2n + 1\}$, or there exists such a cycle for all $k \in K_r$ with the only exception of $k \neq r$, or with the only exception of $k \neq r + 1$.

Kotzig A., *On regularly varying polyhedra*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 183–186. (Slovak, English summary.)

By a regularly varying n-valent polyhedron we understand a polyhedron wherein each vertex is incident at exactly one u_i-gon $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, where if $i \neq j$, then $u_i \neq u_j$. It is proved that regularly varying polyhedron is trivalent and either contains 12 quadrilaterals, 8 hexagons and 6 octagons, or it contains 30 quadrilaterals, 20 hexagons and 12 decagons.

Bosák J., Kotzig A., Znám Š., *Modification of semi-completeness for integer sequences*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 187–192. (English.)

Given a natural number k and a sequence $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ of natural numbers an (uniquely determined) increasing sequence $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ of natural numbers is constructed such that (1) any non-negative integer c is representable in the form $c = a_1m_1 + a_2m_2 + \ldots$, where $0 \leqq a_i \leqq p_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \leqq k$; (2) any term of the sequence M has only one such representation.

Karasová I., Kessler A., *Solution of systems of one dimensional heat conduction equations by matrix similarity transformations*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 193–199. (German.)

The system of equations which in general is simultaneous is transformed into an independent one which has a trivial solution. Consequently the solution can be determined by standart programs on digital computers.

Hajko V., Potocký L., Hanusková M., *Succesive asymetric cyclic magnetization of an ellipsoid specimen*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 200—208. (German.)

The process of the succesive asymetric cyclic magnetization of an ellipsoid ferromagnetic specimen has been studied experimentally among constant values of the outer magnetic field in dependence on the initial magnetic state which is the starting state of the asymetric cyclic magnetization.

Коциг А., *О регулярно пестрых многогранниках*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 183 — 186 (словацк.; рез. англ.).

Под регулярно пестрым n-валентным многогранником понимается многогранник, в котором каждая вершина инцидентна с одним и только одним u_i-угольником ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), причем $i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j$. Доказывается, что всякий регулярно пестрый многогранник трехвалентен и содержит либо 12 четырехугольников, 8 шести- угольников и 6 восьмиугольников, либо 30 четырехугольников, 20 шестиугольников и 12 десятиугольников.

Босак Ю., Коциг А., Знам Ш., *Модификация полуполноты целочисленных после- довательностей*, Mat.-fyz časop. *16* (1966), 187 — 192. (англ.)

К данным натуральному числу k и последовательности $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ нату- ральных чисел строится (однозначно определенная) возрастающая последовательность $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ натуральных чисел такая, что (1) всякое неотрицательное целое число c можно представить в виде $c = a_1m_1 + a_2m_2 + \ldots$, где $0 \leqq a_i \leqq p_i$ ($i = 1,2,3,\ldots$), $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \leqq k$; (2) каждый член последовательности M имеет только одно такое представление.

Карасова И., Кесслер А., *Система одноразмерных дифференциальных уравнений ведения тепла решается при помощи матричного линейного преобразования*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 193 — 199. (немецк.)

Система, которая в общем случае состоит из зависимых уравнений, преобразуется в систему независимых уравнений, решение которых известно. Таким образом, числен- ный расщет приводит к ряду матричных операций, которые можно решить при помощи электронных вичислительных машин.

Гайко В., Потоцкы Л., Ганускова М., *Постепенная ассиметричная перемагне- тизация эллипсоидального образца*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966) 200—208. (Немецк.)

Исследуется экспериментально процесс постепенной ассиметричной перемагнети- зации эллипсоидального феромагнитного образца между постоянными значениями магнитного поля в зависимости от начального магнитного состояния, из которого исходится при ассиметричной перемагнетизации.

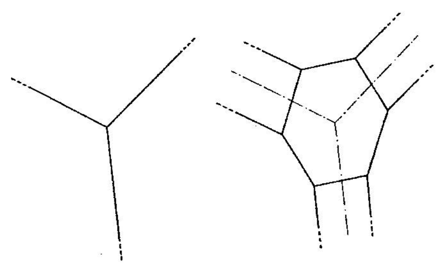
níku a r-uholníku zistíme, že ja q aj r je párne číslo. Čiže: $s_3 = s_5 = s_7 = \ldots = 0$ a dosadením do (4) pre $n = 3$ dostávame:

$$2s_4 = 12 + \sum_{i=3}^{\infty} (2i - 6)s_{2i}, \tag{5}$$

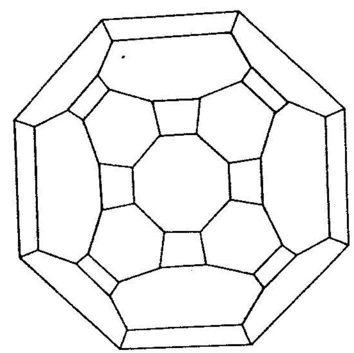
z čoho vyplýva: $s_4 \geqq 6$; $p = 4$. Okrem toho platí zrejme: $ps_p = qs_q = rs_r$, a teda $s_q = \dfrac{4}{q}s_4$; $s_r = \dfrac{4}{r}s_4$. Po dosadení do (5) a po úprave dostaneme:

$$\frac{1}{2s_4} = \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{4} > 0.$$

Je však $5 < q < r$, preto musí byť $q = 6$ a platí $\dfrac{1}{r} > \dfrac{1}{12}$; $12 > r > 6$ (pričom r je párne). Z toho vyplýva, že do úvahy prichádzajú len tieto dve možnosti: $p = 4$; $q = 6$; $r = 8$ (prvá možnosť); $p = 4$; $q = 6$; $r = 10$ (druhá možnosť). V prvom prípade ľahko zistíme, že platí $s_4 = 12$, $s_6 = 8$, $s_8 = 4$ a v druhom prípade $s_4 = 30$, $s_6 = 20$, $s_{10} = 12$. To dokazuje druhé tvrdenie vety. Že existujú aj také pravidelne pestré polyédre oboch typov, v ktorých každá stena je pravidelným mnohouholníkom (čo je v súhlase s výsledkami práce [3]), ľahko zistíme touto úvahou: Prvý z nich dostaneme, keď vo vhod- nom meradle urobíme zmenu znázornenú na obr. 1 vo všetkých vrcholoch kocky. Druhý dostaneme po obdobných zmenách v pravidelnom dvanásťstene — ktoré možno chápať tiež ako zre- zanie vrcholov a hrán pôvodného polyédra — vznikne vždy pravidelne pestrý päťuholníkovom. Po takýchto zmenách polyéder. Každému vrcholu polyédra odpovedá v ňom istý šesťuholník a každej

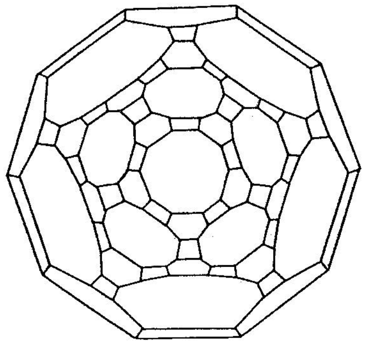


Obr. 1.


Obr. 2.

hrane štvoruholník. Stena, ktorá je v pôvodnom polyédri k-uholník zmení sa pritom na $2k$-uholník. Je zrejmé, že „zrezanie“ vrcholov a hrán možno urobiť v oboch prípadoch jediným spôsobom tak, že všetky steny nového polyédra

Obr. 3.



budú pravidelnými mnohouholníkmi. Je tiež zrejmé, že každý polyéder s požadovanými vlastnosťami je izomorfný práve s jedným z pravidelne pestrých polyédrov, ktorých konštrukciu sme práve opísali a tiež izomorfný práve s jedným z polyédrov znázornených na obr. 2, resp. 3. To dokazuje vetu.

LITERATÚRA

[1] Коцир А., *Из теории эйлеровских многогранников*, Mat. fyz. časop. *13* (1963), 20—31.
[2] Steinitz E., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin 1934.
[3] Коллектив авторов (руководитель Залгаллер В. А), *О правильногранных многогранниках*, Вестн. Ленингр. Ун-та *20* (1965), 150—152.

Došlo 12. 3. 1965.

Katedra numerickej matematiky a matematickej štatistiky Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského, Bratislava

ON REGULARLY VARYING POLYHEDRA

Anton Kotzig

Summary

By a regularly varying n-valent polyhedron we understand a polyhedron wherein each vertex is incident at exactly one u_i-gon ($i \in \{1,2, \ldots, n\}$), where if $i \neq j$ then $u_j \neq u_i$. It is proved that every regularly varying polyhedron is trivalent and either contains 12 quadrilaterals, 8 hexagons and 6 octagons, or it contains 30 quadrilaerals, 20 hexagons and 12 decagons. There exist polyhedra of both types, where in each face is a regular polygon.