MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

ОБ ОДНОМ ВИДЕ ПЕРЕСТАНОВОК

МИХАЛ БУЧКО (MICHAL BUČKO), Кошице,
ЙОСЕФ КАУЦКИ (JOSEF KAUCKÝ), Братислава

1

В 4 главе своей книги о комбинаторном анализе [1] Дж. Риордан занимается изучением некоторых свойств перестановок из n различных элементов, разложения которых в циклы не содержат единичных циклов.

М. Бучко в работе [2] обобщил эти рассуждения в том смысле, что рассматривал перестановки, разложения которых в циклы не содержат никаких k-циклов, где $1 \leqq k \leqq n$.

В настоящей статье мы рассмотрим некоторые свойства перестановок, циклы которых имеют порядок равный r-ым степеням натуральных чисел: $1^r, 2^r, 3^r, \ldots$, где $r \geqq 1$ — целое число.

2

В дальнейшем будем рассматривать только перестановки из n различных элементов. Каждая такая перестановка может быть однозначно записана как произведение конечного числа циклов, если не считать различными циклы, получающиеся друг из друга только циклической заменой элементов. О циклах будем говорить, что перестановка состоит из них.

В каждом цикле поставим наименьший элемент на первое место. Цикл с r элементами — это цикл порядка r; назовем его r-циклом. Перестановка, состоящая из k_1 циклов первого порядка, k_2 циклов второго порядка, ..., k_n циклов n-ого порядка, причем

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n, \tag{1}$$

называется перестановкой циклового класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ или, короче, класса (k).

Число перестановок класса (k) дается формулой [1]

$$C(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1}k_1!2^{k_2}k_2! \ldots n^{k_n}k_n!}. \tag{2}$$

Соответствующую производящую функцию

$$C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = C_n(t) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_n!} \left(\frac{t_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{t_2}{2}\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{t_n}{n}\right)^{k_n}. \tag{3}$$

Риордан называет цикловым индикатором симметрической группы.

Для решения некоторых задач из теории перестановок важна производящая функция для этих индикаторов [1]

$$\exp uC(t) = \exp\left(ut_1 + \frac{u^2}{2} t_2 + \frac{u^3}{3} t_3 + \ldots\right), \tag{4}$$

где в разложении левой стороны следует положить $C^n(t) = C_n(t)$.

3

Рассмотрим перестановки, порядки циклов которых равны r-ым степеням натуральных чисел. Так как индексы переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ задают порядки циклов, то мы должны в уравнении (4) положить

$$t_k = 0 \quad \text{для} \quad k \neq 1^r, 2^r, 3^r, \ldots. \tag{5}$$

Если соответствующие индикаторы обозначить через $B_n(t, r)$, то для них имеем производящую функцию

$$\exp uB(t, r) = \exp\left(ut_1 + \frac{u^{2^r}}{2^r} t_{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} t_{3^r} + \ldots\right), \tag{6}$$

в которой $B^n(t, r) = B_n(t, r)$.

Положим в этом уравнении

$$t_{1^r} = t_{2^r} = t_{3^r} = \ldots = t. \tag{7}$$

Эта операция означает, что в исследуемых перестановках пренебрегается величиной порядков циклов.

Если новый индикатор обозначить через $b_n(t, r)$, то будем иметь

$$\exp ub(t, r) = \exp t\left(u + \frac{u^{2^r}}{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} + \ldots\right), \tag{8}$$

где $b^n(t, r) = b_n(t, r)$.

Чтобы найти рекуррентное соотношение для этих индикаторов, продифференцируем последнее уравнение по u. Получаем

$$b(t, r) \exp ub(t, r) = t(1 + u^{2^r-1} + u^{3^r-1} + \ldots) \exp ub(t, r), \tag{9}$$

откуда после сравнения коэффициентов у одинаковых степеней u получаем

$$b_{n+1}(t, r) = t \sum_{i=1}^{s} (n)_{i^r-1}\, b_{n-i^r+1}(t, r), \tag{10}$$

где

$$s = \left[(n+1)^{\frac{1}{r}}\right]. \tag{11}$$

Если, наконец, записать

$$b_n(t, r) = \sum_{k=0}^{n} b(n, k, r) t^k \tag{12}$$

и если отсюда подставить в предыдущее соотношение, то получится уравнение, из которого следует новая рекуррентная формула

$$b(n+1, k, r) = \sum_{i=1}^{s} (n)_{i^r-1} b(n - i^r + 1, k-1, r). \tag{13}$$

Число $b(n, k, r)$ задает согласно определению $b_n(t, r)$ число перестановок, состоящих из k циклов, порядки которых являются r-ыми степенями натуральных чисел. При этом пренебрегается величиной порядков циклов. Из последнего уравнения можно рекуррентно вычислять эти числа.

Известный случай $r = 1$ дает проверку справедливости соотношения. В этом случае

$$b(n, k, 1) = c(n, k),$$

где $c(n, k)$ обозначает по Риордану число перестановок, состоящих из k циклов, причем пренебрегается их длиной.

Далее,

$$c(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k),$$

где $s(n, k)$ — число Стирлинга 1 рода. Если из этих соотношений подставить в уравнение (13), то получим рекуррентную формулу

$$s(n+1, k) = \sum_{i=1} (-1)^{i-1} (n)_{i-1} s(n+1-i, k-1)$$

и, так как $s(n, k) = 0$ для $k > n$, в этой сумме производится сложение от $i = 1$ до $i = n + 2 - k$. Но это соотношение получается из известного свойства чисел Стирлинга 1 рода

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k).$$

Положим теперь в уравнении (12) $t = 1$ и запишем

$$b_n(1, r) = b_n(r). \tag{14}$$

Число $b_n(r)$ задает число перестановок из n различных элементов, порядки

циклов которых равны r-ым степеням натуральных чисел. Для этих чисел имеем из (10) рекуррентное соотношение

$$b_{n+1}(r) = \sum_{i=1}^{s} (n)_{i^r-1} b_{n-i^r+1}(r). \tag{15}$$

Для $r = 1$ имеем, очевидно,

$$b_n(1) = n!$$

и последнее уравнение дает в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n+1} (n)_{i-1} b_{n+1-i}(1) = \sum_{i=1}^{n+1} (n)_{i-1} (n+1-i)! = \sum_{i=1}^{n+1} n! = (n+1)! = b_{n+1}(1).$$

Таблица 1 содержит числа $b(n, k, 2)$ для $n, k = 1, 2, \ldots, 10$. Так, например, $b(6, 3, 2) = 90$ говорит о том, что существует 90 перестановок из 6 элементов, каждая из которых состоит из 3 циклов с порядками равными 1 и $2^2 = 4$. Следовательно, это перестановки типа (a) (b) (cdef).

Таблица 1. Числа $b(n, k, 2)$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	0	1								
3	0	0	1							
4	6	0	0	1						
5	0	30	0	0	1					
6	0	0	90	0	0	1				
7	0	0	0	210	0	0	1			
8	0	1260	0	0	420	0	0	1		
9	40320	0	11340	0	0	756	0	0	1	
10	0	403200	0	56700	0	0	1260	0	0	1

К табулированию чисел $b(n, k, r)$ нужно в общем случае сказать следующее.

1. Прежде всего стоят на главной диагонали каждой такой таблицы одни единицы, так как для $k = n$ имеет только основная перестановка требуемые свойства.

2. Далее, если n означает строки, а k столбцы, то над главной диагональю таблицы стоят одни нули, так как не существует перестановки, имеющей больше циклов чем элементов.

3. Наконец, в 1 столбце ($k = 1$) стоит число перестановок, состоящих из одного цикла. Значит, для $n \neq i^r$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ стоят в нем одни нули. В строке $n = i^r$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ стоит число

$$(i^r - 1)!,$$

поскольку в каждом цикле на первом месте стоит наименьший элемент, а остальные элементы могут следовать за ним в произвольном порядке, что для $n = i^r$ дает $(i^r - 1)!$ возможностей.

Числа в остальных же столбцах получатся по формуле (13).

4

Будем искать теперь число четных и число нечетных перестановок из предыдущего раздела.

Обозначим через $B_n^e(t, r)$ [через $B_n^o(t, r)$] индикатор для четных (для нечетных) перестановок. Если $\bar{B}_n(t, r)$ — функция, которая получится из индикатора $B_n(t, r)$, если в нем положить $-t_{2^r}$ вместо t_{2^r}, $-t_{4^r}$ вместо t_{4^r} и т.д., то согласно [1]

(16)
$$B_n^e(t, r) = \tfrac{1}{2}[B_n(t, r) + \bar{B}_n(t, r)],$$
$$B_n^o(t, r) = \tfrac{1}{2}[B_n(t, r) - \bar{B}_n(t, r)].$$

Следовательно, производящими функциями для этих индикаторов будут

(17)
$$2 \exp uB^e(t, r) = \exp\left(ut_1 + \frac{u^{2^r}}{2^r} t_{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} t_{3^r} + \dots\right) + \exp\left(ut_1 - \frac{u^{2^r}}{2^r} t_{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} t_{3^r} - \dots\right),$$

(18)
$$2 \exp uB^o(t, r) = \exp\left(ut_1 + \frac{u^{2^r}}{2^r} t_{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} t_{3^r} + \dots\right) - \exp\left(ut_1 - \frac{u^{2^r}}{2^r} t_{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} t_{3^r} - \dots\right).$$

Положим в этих уравнениях

$$t_{1^r} = t_{2^r} = t_{3^r} = \dots = t,$$

что означает, что в перестановках будем пренебрегать величиной порядков циклов. Если обозначить соответствующие индикаторы соответственно через $b_n^e(t, r)$ и $b_n^o(t, r)$, то получим

(19)
$$2 \exp ub^e(t, r) = \exp t\left(u + \frac{u^{2^r}}{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} + \dots\right) + \exp t\left(u - \frac{u^{2^r}}{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} - \dots\right),$$

(20)
$$2 \exp ub^o(t, r) = \exp t\left(u + \frac{u^{2^r}}{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} + \dots\right) - \exp t\left(u - \frac{u^{2^r}}{2^r} + \frac{u^{3^r}}{3^r} - \dots\right).$$

Если, наконец, продифференцировать эти соотношения по u и подходящим образом преобразовать полученные уравнения, то получим

(21)
$$b^e(t, r) \exp ub^e(t, r) = t(1 + u^{3^r-1} + u^{5^r-1} + \dots) \exp ub^e(t, r) + t(u^{2^r-1} + u^{4^r-1} + \dots) \exp ub^o(t, r),$$

(22)
$$b^o(t, r) \exp ub^o(t, r) = t(1 + u^{3^r-1} + u^{5^r-1} + \dots) \exp ub^o(t, r) + t(u^{2^r-1} + u^{4^r-1} + \dots) \exp ub^e(t, r).$$

Из этих уравнений обычным способом получаются следующие рекуррентные соотношения

(23)
$$b_{n+1}^e(t, r) = t\sum_{i=0}^{p} (n)_{(2i+1)^r-1}\, b_{n-(2i+1)^r+1}^e(t, r) + t\sum_{j=1}^{q} (n)_{(2j)^r-1}\, b_{n-(2j)^r+1}^o(t, r),$$

(24)
$$b_{n+1}^o(t, r) = t\sum_{i=0}^{p} (n)_{(2i+1)^r-1}\, b_{n-(2i+1)^r+1}^o(t, r) + t\sum_{j=1}^{q} (n)_{(2j)^r-1}\, b_{n-(2j)^r+1}^e(t, r),$$

где

$$p = \left[\frac{1}{2}\left((n+1)^{\frac{1}{r}} - 1\right)\right], \qquad q = \left[\frac{1}{2}(n+1)^{\frac{1}{r}}\right].$$

Уравнения симметричны относительно индикаторов $b_n^e(t, r)$ и $b_n^o(t, r)$. Если еще записать

$$b_n^e(t, r) = \sum_{k=0}^{n} b^e(n, k, r)t^k,$$

$$b_n^o(t, r) = \sum_{k=0}^{n} b^o(n, k, r)t^k$$

и подставить отсюда в предыдущие соотношения, то получим уравнения, из которых получаются следующие рекуррентные формулы для чисел $b^e(n, k, r)$ и $b^o(n, k, r)$

(25)
$$b^e(n+1, k, r) = \sum_{i=0}^{p} (n)_{(2i+1)^r-1}\, b^e[n - (2i+1)^r + 1, k-1, r] + \sum_{j=1}^{q} (n)_{(2j)^r-1}\, b^o[n - (2j)^r + 1, k-1, r],$$

$$b^o(n+1,k,r)=\sum_{i=0}^{p}(n)_{(2i+1)^r-1}\,b^o[n-(2i+1)^r+1,k-1,r]+ \tag{26}$$
$$+\sum_{j=1}^{q}(n)_{(2j)^r-1}\,b^e[n-(2j)^r+1,k-1,r].$$

Числа $b^e(n,k,r)$ и $b^o(n,k,r)$ задают число соответственно четных и нечетных перестановок из n различных элементов, порядки циклов которых число циклов равно k равны r-ым степеням натуральных чисел. При этом пренебрегается величиной порядков циклов.

Покажем, что например для $r=1$ уравнение (23) вытекает из результатов Риордана. Действительно, в этом случае в обозначении Риордана

$$b_n^e(t,1)=c_n^e(t),\qquad b_n^o(t,1)=c_n^o(t)$$

и, далее,

$$\frac{2c_n^e(t)}{n!}=\binom{t+n-1}{n}+\binom{t}{n},$$

$$\frac{2\,c_n^o(t)}{n!}=\binom{t+n-1}{n}-\binom{t}{n}.$$

Теперь, например, из уравнения (23)

$$2c_{n+1}^e(t)=t\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n)_{2i}(n-2i)!\,\frac{2c_{n-2i}^e(t)}{(n-2i)!}+t\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(n)_{2i-1}[n-(2i-1)]!\,\frac{2c_{n-2i+1}^o(t)}{(n-2i+1)!}$$

или же

$$\frac{2c_{n+1}^e(t)}{n!}=t\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\binom{t-1+n-2i}{n-2i}+\binom{t}{n-2i}\right\}+$$
$$+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left\{\binom{t-1+n-(2i-1)}{n-(2i-1)}-\binom{t}{n-(2i-1)}\right\}.$$

Далее,

$$\frac{2c_{n+1}^e(t)}{(n+1)!}=\binom{t+n}{n+1}+\binom{t}{n+1}=\frac{t}{n+1}\binom{t+n}{n}+\frac{t}{n+1}\binom{t-1}{n}=$$
$$=\frac{t}{n+1}\left[\binom{t+n}{n}+\binom{t-1}{n}\right],$$

так что доказательство справедливости предыдущего соотношения сводится к доказательству тождества

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\binom{t-1+n-2i}{n-2i}+\binom{t}{n-2i}\right\}+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left\{\binom{t-1+n-(2i-1)}{n-(2i-1)}-\right.$$
$$\left.-\binom{t}{n-(2i-1)}\right\}=\binom{t+n}{n}+\binom{t-1}{n}.$$

Но левая сторона этого уравнения равна, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{t-1+k}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{t}{n-k},$$

а если учесть еще известные формулы

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}=\binom{x+n+1}{n},\qquad\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}=(-1)^n\binom{x-1}{n},$$

то видно, что первая и вторая суммы дают соответственно

$$\binom{t+n}{n}\quad\text{и}\quad\binom{t-1}{n}.$$

Тем самым справедливость уравнения (23) для $r=1$ установлена. Аналогичные результаты получатся и для уравнения (24).

В таблице 2 приводятся полиномы $b_n^e(t,2)$ и $b_n^o(t,2)$ для $n=1,2,\ldots,10$. Полагаем $b_0^e(t,2)=1$, $b_1^o(t,2)=0$. Далее, очевидно, $b_1^e(t,2)=1$, $b_1^o(t,2)=0$, так как из одного элемента можно образовать только одну четную перестановку и никакой нечетной перестановки. Остальные полиномы вычисляются уже по формулам (23) и (24).

Таблица 2. Полиномы $b_n^e(t,2)$, $b_n^o(t,2)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b_n^e(t,2)$	1	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	t^7	t^8+ $+1260t^2$	t^9+ $+11\,340t^3+$ $+40\,320t$	$t^{10}+$ $+56\,700t^4+$ $+403\,200t^2$
$b_n^o(t,2)$	0	0	0	0	$6t$	$30t^2$	$90t^3$	$210t^4$	$420t^5$	$756t^6$	$1260t^7$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Riordan J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York 1958.
[2] Bučko M., *O niektorých problémoch z teórie permutácií*, Sborník vedeckých prác VŠT v Košiciach 1966 (v tlači).

Поступило 3. 3. 1965.

Katedra matematiky Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej, Košice

ČSAV, Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied, Bratislava