MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

PRÍSPEVOK K CYKLOSFÉRICKÉMU ZOBRAZENIU VO ŠTVORROZMERNOM EUKLIDOVSKOM PRIESTORE

FRANTIŠEK HUSÁRIK, Zvolen

Cyklosférické zobrazenie je zovšeobecnením cyklografického zobrazenia na štvorrozmerný euklidovský priestor E_4. Myšlienku rozšírenia cyklografického zobrazenia na n-rozmerný priestor použili v poslednej dobe niektorí autori na riešenie zovšeobecneného Apolloniovho problému: Zostrojiť nadplochy guľové v E_n, ktoré sa dotýkajú $n+1$ daných guľových nadplôch. Metódou zovšeobecnenia cyklografického zobrazenia na viacrozmerný priestor môžeme riešiť celý rad ďalších úloh o nadplochách guľových.

Uvažujme štvorrozmerný reálny euklidovský priestor E_4, ktorý budeme nazývať operačným priestorom. Nech $[0; x_1, x_2, x_3, x_4]$ je pravouhlá súradnicová sústava v operačnom priestore E_4. Nech y_1, y_2, y_3, y_4 sú nehomogénne súradnice bodu Y v operačnom priestore E_4. V cyklosférickom zobrazení môžeme zobraziť body operačného priestoru E_4 na priemetnú nadrovinu $E_3^p \equiv [0; x_1, x_2, x_3]$ tak, že ku každému bodu $Y(y_1, y_2, y_3, y_4) \in E_4$, ktorý neleží v priemetnej nadrovine E_3^p (teda $y_4 \neq 0$), priradíme v priemetnej nadrovine E_3^p orientovanú plochu guľovú — cyklosféru C_Y. Nositeľkou cyklosféry C_Y je plocha guľová G_Y o rovnici

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - y_n)^2 = y_4^2.$$

Obrátene, ku kladnej cyklosfére $C_Y \in E_3^p$ priradíme v E_4 bod $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$, kde $y_4 > 0$, a k zápornej cyklosfére $C_Y \in E_3^p$ priradíme v E_4 bod $Y^*(y_1, y_2, y_3, -y_4)$, kde $y_4 > 0$. Bodu $P(p_1, p_2, p_3, 0)$ priemetnej nadroviny E_3^p priradíme ten istý bod P. Plochu guľovú G_Y budeme orientovať tak, že spôsobom uvedeným v [4] orientujeme niektorú z kružníc, ktorá tvorí zdanlivý obrys plochy guľovej v priemetnej nadrovine E_3^p. Napr. v Mongeovej projekcii v E_3^p to bude kružnica, ktorá tvorí obrys plochy guľovej G_Y v druhej priemetni.

Majme v operačnom priestore E_4 priamku p, ktorej parametrické rovnice sú:

$$y_i = a_i + \lambda m_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{1}$$

Budeme predpokladať, že pre smerové parametre priamky (1) je

$$m_4^2 - \sum_{i=1}^{3} m_i^2 \neq 0.$$

Množinu cyklosfér, ktoré odpovedajú všetkým bodom priamky p, okrem jej stopníka do priemetnej nadroviny E_3^p, budeme nazývať lineárnym cyklosférickým radom a nositeľkou jeho cyklosfér je v priemetnej nadrovine E_3^p jednoparametrická sústava plôch guľových s rovnicou

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - a_n - \lambda m_n)^2 = (a_4 + \lambda m_4)^2. \tag{2}$$

Parciálnym derivovaním podľa parametru λ zo vzťahu (2) dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - a_n - \lambda m_n) m_n + (a_4 + \lambda m_4) m_4 = 0. \tag{2'}$$

Po vylúčení parametru λ z rovníc (2) a (2′) je:

$$\sum_{n=1}^{3} \left(x_n - a_n + \frac{\sum_{j=1}^{3} (x_j - a_j) m_j + a_4 m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2} m_n \right)^2 = \left(a_4 - \frac{\sum_{j=1}^{3} (x_j - a_j) m_j + a_4 m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2} m_4 \right)^2. \tag{3}$$

Rovnica (3) je v priemetnej nadrovine E_3^p rovnicou obalovej plochy lineárneho cyklosférického radu prislúchajúceho k priamke (1).

Ku každému bodu $Y \in E_4$ môžeme v cyklosférickom zobrazení priradiť guľovo-kužeľovú rotačnú nadkvadriku (GK_Y nadkvadriku), ktorej rovnica je:

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - y_n)^2 = (x_4 - y_4)^2.$$

Je to rotačná kužeľová nadkvadrika s vrcholom v bode Y a plocha guľová G_Y, ktorá je nositeľkou cyklosféry prislúchajúcej k bodu Y, je jej stopnou guľovou plochou do priemetnej nadroviny E_3^p.

Potom všetkým bodom priamky (1) bude priradená jednoparametrická sústava guľovo-kužeľových nadkvadrík s rovnicou

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - a_n - \lambda m_n)^2 = (x_4 - a_4 - \lambda m_4)^2. \tag{4}$$

Parciálnym derivovaním podľa parametru λ zo vzťahu (4) dostaneme:

$$(4') \qquad \sum_{n=1}^{3} (x_n - a_n - \lambda m_n) m_n = (x_4 - a_4 - \lambda m_4) m_4 .$$

Po vylúčení parametru λ z rovníc (4) a (4') je:

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{3} \left(x_n - a_n + \frac{\sum_{j=1}^{3} (x_j - a_j) m_j - (x_4 - a_4) m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2} m_n \right)^2 = \left(x_4 - a_4 + \frac{\sum_{j=1}^{3} (x_j - a_j) m_j - (x_4 - a_4) m_4}{m_4^2 - \sum_{j=1}^{3} m_j^2} m_4 \right)^2 .$$

Rovnica (5) je v E_4 rovnicou obalovej nadplochy jednoparametrickej sústavy guľovo-kužeľových nadkvadrík priradených bodom priamky (1).

V operačnom priestore E_4 je vždy možné urobiť takú ortogonálnu transformáciu súradnicovej sústavy(1), že priamka p určená rovnicami (1) bude mať v novej súradnicovej sústave v E_4 parametrické rovnice

$$(6) \qquad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \lambda v_3, \quad y_4 = \lambda v_4 .$$

Budeme predpokladať, že pre smerové parametre priamky (6) platí: $v_4^2 - v_3^2 \neq 0$ a $v_3 \neq 0$.

Rovnica obalovej plochy lineárneho cyklosférického radu prislúchajúceho k priamke (6) v novej súradnicovej sústave v priemetnej nadrovine E_3^p, podľa (3) je:

$$(7) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \frac{v_4^2}{v_4^2 - v_3^2} x_3^2 = 0 .$$

Pokiaľ je $v_4 \neq 0$, je pre túto kvadratickú plochu diskriminant $A = 0$ a $A_{44} \neq 0$ a obalovou plochou lineárneho cyklosférického radu je rotačná plocha kužeľová. Táto kužeľová plocha je reálna, keď $v_4^2 < v_3^2$. Keď $v_4^2 > v_3^2$, je obalová plocha lineárneho cyklosférického radu imaginárna. Vrchol obalovej kužeľovej plochy je stopníkom priamky (6) do priemetnej nadroviny E_3^p.

Ak $v_4 = 0$, je $A = 0$ a $A_{44} = 0$ a obalová plocha lineárneho cyklosférického radu je rotačná plocha valcová.

Obrátene, každá rotačná kužeľová alebo valcová plocha v priemetnej nadrovine E_3^p môže byť obalovou plochou dvoch lineárnych cyklosférických radov. Jeden z týchto radov určuje v E_4 priamku p a druhý priamku p^*. Priamky p a p^* sú súmerne združené podľa priemetnej nadroviny E_3^p, čo vidieť z rovníc (6) a (7). Túto dvojznačnosť odstránime tak, že orientujeme plochu guľovú, ktorú ľubovoľne vpíšeme do danej kužeľovej alebo valcovej plochy.

(1) Pri tejto transformácii môžeme zaistiť, že nová priemetná nadrovina bude totožná s pôvodnou, alebo bude s ňou totálne rovnobežná.

Rovnica obalovej nadplochy jednoparametrickej sústavy guľovo-kužeľových nadkvadrík priradených bodom priamky (6) v novej súradnicovej sústave v E_4, podľa (5) je:

$$(8) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \frac{v_4^2}{v_4^2 - v_3^2} x_3^2 - \frac{2 v_3 v_4}{v_4^2 - v_3^2} x_3 x_4 + \frac{v_3^2}{v_4^2 - v_3^2} x_4^2 = 0 .$$

Je to kužeľová nadkvadrika 2-ho druhu, ako je uvedené v literatúre [3], a priamka (6) je jej stredovou osou. Jej stopnou kvadrikou do priemetnej nadroviny E_3^p je rotačná kužeľová plocha o rovnici (7). Táto kužeľová nadkvadrika je reálna pokiaľ stopná kužeľová plocha je reálna, teda keď $v_4^2 < v_3^2$. Keď $v_4^2 > v_3^2$, je imaginárna a degeneruje sa v stredovú os (6). Je vytvorená sústavou reálnych alebo imaginárnych rovín, ktoré prechádzajú stredovou osou (6). Stopy týchto rovín do priemetnej nadroviny E_3^p vytvárajú stopnú rotačnú kužeľovú plochu (7).

Podľa predpokladu je $v_4^2 - v_3^2 \neq 0$ a $v_3 \neq 0$. Vtedy z rovníc (6) ihneď vidieť, že priamka p nie je kolmá na priemetnú nadrovinu E_3^p a má od priemetnej nadroviny E_3^p odchýlku $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$.

Z uvedeného vyplýva:

Veta 1. *Ku každej priamke $p \in E_4$, ktorá má od priemetnej nadroviny E_3^p odchýlku $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ a nie je na E_3^p kolmá, môžeme v cyklosférickom zobrazení v E_4 priradiť kužeľovú nadkvadriku 2-ho druhu. Priamka p je stredovou osou tejto nadkvadriky a stopnou kvadrikou do priemetnej nadroviny E_3^p je rotačná kužeľová plocha, ktorá je obalovou plochou lineárneho cyklosférického radu prislúchajúceho k priamke p.*

Nech sa bod $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ nachádza na nadkvadrike (8). V ďalšom budeme predpokladať, že bod B nie je incidentný s priamkou (6), to znamená, že nemôže byť $b_1 = b_2 = 0$ a tiež budeme predpokladať, že $b_4 \neq 0$. Hľadajme guľovo-kužeľovú nadkvadriku GK_L, ktorá je incidentná s bodom B a patrí do jednoparametrickej sústavy guľovo-kužeľových nadkvadrík priradených bodom priamky (6). Pre túto nadkvadriku podľa vzťahu (4) platí:

$$(9) \qquad b_1^2 + b_2^2 + (b_3 - \lambda v_3)^2 - (b_4 - \lambda v_4)^2 = 0 .$$

Rovnica (9) je kvadratická rovnica pre parameter λ. V dôsledku predpokladanej vlastnosti bodu B má táto kvadratická rovnica dvojnásobný koreň

$$\lambda_{1,2} = \lambda = \frac{b_3 v_3 - b_4 v_4}{v_3^2 - v_4^2}.$$

Nadkvadrika GK_L určuje v E_4 bod L, ktorý sa zrejme nachádza na priamke (6). Z vlastností cyklosférického zobrazenia uvedených v [1] je známe, že sa plocha guľová G_B, ktorá je nositeľkou cyklosféry C_B, bude stopnej guľovej plochy G_L nadkvadriky GK_L dotýkať, a to práve v stopníku P priamky $t \equiv (L, B)$.

Parametrické rovnice priamky t sú:

$$x_i = b_i + \lambda b_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$x_j = b_j + \lambda \left(b_j - \frac{b_3 v_3 - b_4 v_4}{v_3^2 - v_4^2} v_j \right) \qquad (j = 3, 4).$$

Potom pre súradnice bodu P dostaneme:

$$p_i = \frac{b_i v_4 (b_4 v_4 - b_3 v_3)}{v_3 (b_4 v_3 - b_3 v_4)} \qquad (i = 1, 2), \tag{10}$$

$$p_3 = \frac{b_3 v_3 - b_4 v_4}{v_3},$$

$$p_4 = 0.$$

Bod P sa tiež nachádza na rotačnej kužeľovej ploche, ktorá je stopnou plochou kužeľovej nadkvadriky (8) do priemetnej nadroviny E_3^p. Ukážeme, že v bode P majú plocha guľová G_B a stopná rotačná kužeľová plocha nadkvadriky (8) spoločnú dotykovú rovinu, čo znamená, že plocha guľová G_B a stopná rotačná kužeľová plocha sa v bode P dotýkajú.

Rovnica plochy guľovej je:

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n - b_n)^2 = b_4^2.$$

Dotyková rovina k ploche guľovej v bode P má rovnicu

$$\sum_{n=1}^{3} x_n (p_n - b_n) - \sum_{n=1}^{3} b_n p_n + \sum_{n=1}^{3} b_n^2 = b_4^2.$$

Keď do tejto rovnice dosadíme vzťahy (10) a zoberieme do ohľadu predpokladanú vlastnosť bodu B, po dlhšej úprave dostaneme rovnicu dotykovej roviny k ploche guľovej v bode P vo tvare

$$\frac{v_4^2 - v_3^2}{b_4 v_3 - b_3 v_4} \sum_{n=1}^{2} b_n x_n - v_4 x_3 = 0. \tag{11}$$

Podobne, rovnica dotykovej roviny k stopnej rotačnej kužeľovej ploche nadkvadriky (8) v bode P je:

$$\sum_{n=1}^{2} x_n p_n + \frac{v_4^2}{v_3^2 - v_3^2} x_3 p_3 = 0.$$

Keď do tejto rovnice dosadíme vzťahy (10), po úprave dostaneme rovnicu dotykovej roviny vo tvare

$$\frac{v_4^2 - v_3^2}{b_4 v_3 - b_3 v_4} \sum_{n=1}^{2} b_n x_n - v_4 x_3 = 0,$$

čo je tá istá rovnica ako rovnica (11).

Týmto je dokázaná

Veta 2. *Nech sa bod B nachádza na kužeľovej nadkvadrike Γ priradenej v cyklosférickom zobrazení ľubovoľnej priamke p podľa vety 1, pričom bod B nie je bodom priemetnej nadroviny E_3^p a nie je incidentný so stredovou osou nadkvadriky Γ. Potom guľová plocha G_B, ktorá je nositeľkou cyklosféry C_B prislúchajúcej bodu B a rotačná kužeľová plocha K, ktorá je stopnou plochou kužeľovej nadkvadriky Γ do priemetnej nadroviny E_3^p, navzájom sa dotýkajú.*

Majme rovnicu

$$\sum_{n=1}^{4} A_n x_n + A_5 = 0, \tag{12}$$

kde aspoň jedno A_n $(n = 1, 2, 3)$ je rôzne od nuly.

Rovnica (12) určuje v operačnom priestore E_4 nadrovinu, pričom x_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ sú nehomogénne súradnice bodu ležiaceho v nadrovine. Ak x_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ budeme považovať za súradnice cyklosféry, rovnica (12) bude vyjadrovať množinu cyklosfér, ktoré sú priradené všetkým bodom nadroviny. Prienikom nadroviny (12) s priemetnou nadrovinou E_3^p je rovina, ktorú budeme nazývať stopnou rovinou nadroviny (12). Rovnica tejto stopnej roviny v priemetnej nadrovine E_3^p je:

$$\sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5 = 0. \tag{13}$$

Množinu cyklosfér, ktorých súradnice vyhovujú rovnici (12), budeme nazývať lineárnym cyklosférickým nadpoľom a stopnú rovinu o rovnici (13) budeme nazývať osovou rovinou lineárneho cyklosférického nadpoľa.

Pre odchýlku nadroviny (12) od priemetnej nadroviny E_3^p je:

$$\cos \alpha = \frac{A_4}{\sqrt{\sum_{n=1}^{4} A_n^2}}, \quad \text{kde} \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Keď z tohoto vzťahu vylúčime A_4 dostaneme:

(15)
$$A_4 = \operatorname{cotg} \alpha \sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}.$$

Definícia 1. *Uhlom, pod ktorým rovina pretína plochu guľovú, budeme rozumieť uhol φ, ktorý je definovaný vzťahom $v = r \,.\, \cos \varphi$, kde $v \geqslant 0$ je vzdialenosť stredu guľovej plochy od roviny a $r > 0$ je polomer plochy guľovej. Keď $v \leqslant r$ je $0 \leqslant \cos \varphi \leqslant 1$, vtedy je φ reálne a bude z intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Keď $v > r$ je $\cos \varphi > 1$ a uhol φ je imaginárny, t. j. $\cos \varphi = \cosh \psi > 1$, kde $\varphi = i\psi$ a ψ bude z intervalu $(0, \infty)$.*

Pre vzdialenosť stredu cyklosféry lineárneho cyklosférického nadpoľa (12) od osovej roviny (13) dostávame:

$$v = \frac{\left| \sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5 \right|}{\sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}},$$

kde x_n $(n = 1, 2, 3)$ sú súradnice stredu cyklosféry. Potom podľa definície 1 je:

$$\cos \varphi = \frac{\left| \sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5 \right|}{|x_4| \sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}}.$$

Ak uvážime, že z rovnice (12) je:

$$x_4 = -\frac{\sum_{n=1}^{3} A_n x_n + A_5}{A_4},$$

potom

(15)
$$\cos \varphi = \frac{|A_4|}{\sqrt{\sum_{n=1}^{3} A_n^2}}.$$

Porovnaním vzťahov (14) a (15) dostávame:

$$\cos \varphi = |\operatorname{cotg} \alpha|.$$

Platí teda:

Veta 3. *Nech nadrovina priestoru E_4 je určená lineárnym cyklosférickým nadpoľom. Všetky cyklosféry lineárneho cyklosférického nadpoľa pretínajú jeho*

osovú rovinu pod tým istým uhlom φ, ktorého kosínus je konštantný a rovný absolútnej hodnote kotangensu odchýlky nadroviny od priemetnej nadroviny.

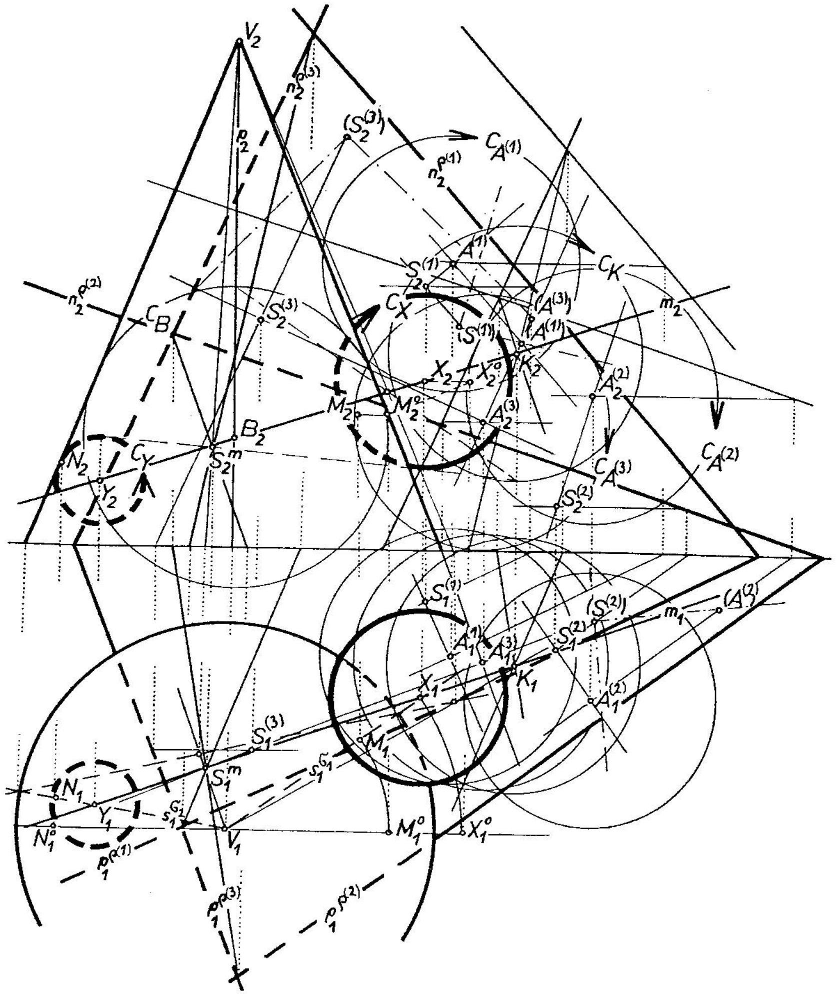
Tieto vlastnosti môžeme použiť na konštruktívne riešenie niektorých úloh o plochách guľových v trojrozmernom euklidovskom priestore.

Úloha. *Dané sú tri roviny $\varrho^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$, ktoré nemajú spoločnú priamku a žiadne dve $\varrho^{(i)}$ nie sú rovnobežné. Daná je ďalej rotačná kužeľová plocha K. Treba zostrojiť plochy guľové, ktoré roviny $\varrho^{(i)}$ pretínajú pod uhlami $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ a dotýkajú sa rotačnej kužeľovej plochy K.*

Rozbor. Priestor, v ktorom sa nachádzajú roviny $\varrho^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ a rotačná kužeľová plocha K, zvoľme za priemetnú nadrovinu E_3^p vo štvorrozmernom operačnom priestore E_4. Rotačnú kužeľovú plochu K v E_3^p môžeme považovať za obalovú plochu lineárneho cyklosférického radu. Tento lineárny cyklosférický rad určíme tak, že orientujeme plochu guľovú, ktorú ľubovoľne vpíšeme do rotačnej kužeľovej plochy K. Uvažovaný cyklosférický rad určí v E_4 priamku p. K priamke p priradíme podľa vety 1 kužeľovú nadkvadriku Γ. Ku každej z rovín $\varrho^{(i)}$ priradíme v E_4 nadrovinu $E_3^{(i)}$, kde rovina $\varrho^{(i)}$ bude stopnou rovinou nadroviny $E_3^{(i)}$ do E_3^p a $E_3^{(i)}$ má od priemetnej nadroviny E_3^p odchýlku $\alpha^{(i)}$, pre ktorú platí: $|\operatorname{cotg} \alpha^{(i)}| = \cos \varphi^{(i)}$, pričom sa rozhodneme pre jeden z uhlov $\alpha^{(i)}$ $\left(\text{menší ako } \frac{\pi}{2}, \text{ alebo väčší ako } \frac{\pi}{2}\right)$. Pretože $\varrho^{(i)}$ nemajú spoločnú priamku a žiadne dve $\varrho^{(i)}$ nie sú rovnobežné, majú nadroviny $E_3^{(i)}$ spoločnú priamku m, ktorá je vždy vlastná. Cyklosféry prislúchajúce bodom priamky m sú podľa vety 3 incidentné s guľovými plochami, ktoré roviny $\varrho^{(i)}$ pretínajú pod danými uhlami $\varphi^{(i)}$. Keď zostrojíme priesečníky X a Y priamky m s kužeľovou nadkvadrikou Γ, potom podľa vety 2 cyklosféry C_X a C_Y priradené bodom X a Y určujú hľadané plochy guľové.

Konštrukcia. Za zobrazovaciu metódu vo štvorrozmernom operačnom priestore E_4 zvolíme kótovano-Mongeovu projekciu. Je to v podstate Klímova zobrazovacia metóda [4] s tým rozdielom, že súradnicu a_4 bodu A pripisujeme do zátvorky ako kótu k priemetu bodu A do priemetnej nadroviny E_3^p.

Na obr. 1 sú roviny $\varrho^{(i)}$ určené svojimi stopami. Zvoľme $\cos \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}$, $\cos \varphi^{(2)} = 1$, $\cos \varphi^{(3)} = 2$. Aby sme zostrojili napr. nadrovinu $E_3^{(1)}$, ktorá má od E_3^p odchýlku $\alpha^{(1)}$, pričom platí: $|\operatorname{cotg} \alpha^{(1)}| = \frac{1}{2}$ a rovina $\varrho^{(1)}$ je stopnou rovinou $E_3^{(1)}$, zvolíme v $\varrho^{(1)}$ ľubovoľný bod $S^{(1)}$. Bodom $S^{(1)}$ vedieme v nadrovine E_3^p na rovinu $\varrho^{(1)}$ kolmú priamku $o^{(1)}$. Priamka $o^{(1)}$ je kolmý priemet spádovej priamky nadroviny $E_3^{(1)}$ a bod $S^{(1)}$ je jej stopníkom. Aby spádová priamka $o^{(1)}$, a tým aj nadrovina $E_3^{(1)}$ bola určená, treba poznať okrem jej stopníka $S^{(1)}$ ešte kótu aspoň jedného jej bodu. Túto treba určiť tak, aby spádová priamka $o^{(1)}$ mala od priemetnej nadroviny E_3^p odchýlku $\alpha^{(1)}$, pre ktorú platí: $|\cotg \alpha^{(1)}| = \frac{1}{2}$. Keď teda zvolíme na $o^{(1)}$ bod $A^{(1)}$, potom zo vzťahu $\frac{v}{r} = \frac{1}{2}$ vyplýva, že kóta bodu $A^{(1)}$, teda polomer cyklosféry $C_{A^{(1)}}$ je dvakrát taký veľký ako skutočná dĺžka úsečky $\overline{S^{(1)}A^{(1)}}$. Podobným spôsobom určíme nadroviny $E_3^{(2)}$ a $E_3^{(3)}$ a použitím konštrukčných metód z [2]



Obr. 1.

alebo [4] zostrojíme spoločnú priamku m nadrovín $E_3^{(1)}$, $E_3^{(2)}$ a $E_3^{(3)}$. Aby sme zostrojili spoločné body X a Y priamky m s kužeľovou nadkvadrikou Γ, uvažujme nadrovinu E_3^λ určenú mimobežnými priamkami m a p, kde priamka p je stredovou osou nadkvadriky Γ. Nadrovina E_3^λ má s kužeľovou nadkvadrikou Γ spoločné dve roviny σ_1 a σ_2 reálne, alebo imaginárne. Stopy s^{σ_1} a s^{σ_2} rovín σ_1 a σ_2 dostaneme ako tvoriace priamky, v ktorých stopná rovina $\gamma^{E_3^\lambda}$ nadroviny E_3^λ pretína stopnú kužeľovú plochu kužeľovej nadkvadriky Γ. Pretože roviny σ_1, σ_2 a priamka m sa nachádzajú v nadrovine E_3^λ, musí priamka m s rovinami σ_1 a σ_2 mať spoločné body X a Y, ktoré ľahko zostrojíme. Cyklosféry prislúchajúce k bodom X a Y určujú už hľadané plochy guľové G_X a G_Y. Známymi metódami z E_3 môžeme tiež zistiť dotykové body M a p guľových plôch G_X a G_Y s danou rotačnou kužeľovou plochou.

Diskusia riešenia. Pri riešení tejto úlohy sme ku každej z rovín $\varrho^{(i)}$ priradili v operačnom priestore E_4 nadrovinu $E_3^{(i)}$, pre ktorú platí: $|\cotg \alpha^{(i)}| = \cos \varphi^{(i)}$, pričom sme sa rozhodli pre jeden z uhlov $\alpha^{(i)}$. Toto sme urobili zistením polomeru a voľbou orientácie cyklosfér $C_{A^{(i)}}$. Ako vidieť z obrázka, priamku p sme určili cyklosférou C_B vpísanou do kužeľovej plochy K. Rôznou orientáciou cyklosfér C_B a $C_{A^{(i)}}$ $(i = 1, 2, 3)$ môžeme vytvoriť spolu 16 navzájom rôznych polôh nadrovín $E_3^{(i)}$ a priamky p. Pri zvolenej, usporiadanej skupine znamienok cyklosfér C_B a $C_{A^{(i)}}$ skupina s opačnými znamienkami dáva to isté riešenie, čo vyplýva zo súmernosti podľa priemetnej nadroviny E_3^p. Ostáva teda 8 prípadov vzájomne rôznych orientácií, z ktorých každý má dve riešenia. Dovedna existuje 16 riešení uvedenej úlohy. Tieto riešenia môžu po dvojiciach splývať, alebo byť imaginárne.

Riešenie úlohy a diskusia platí aj v tom prípade, keď ľubovoľné dve z rovín $\varrho^{(i)}$, napr. $\varrho^{(1)}$ a $\varrho^{(2)}$ sú rovnobežné, ale je $\cos \varphi^{(1)} \neq \cos \varphi^{(2)}$. Ak roviny $\varrho^{(1)}$ a $\varrho^{(2)}$ sú rovnobežné a $\cos \varphi^{(1)} = \cos \varphi^{(2)}$, potom v týchto prípadoch kde cyklosféry $C_{A^{(1)}}$ a $C_{A^{(2)}}$ sú súhlasne orientované, neexistuje priamka m a nedostaneme žiadne riešenie. Ľahko zistíme, že z uvedených 8 prípadov sú takéto 4 a úloha má potom 8 riešení, ktoré môžu po dvojiciach splývať, alebo môžu byť imaginárne.

Keď všetky tri roviny $\varrho^{(i)}$ sú incidentné s vrcholom V kužeľovej plochy K, potom priamka m má s kužeľovou nadkvadrikou Γ spoločný bod V a môžu sa stať dva prípady:

a) Priamka m nemá už s nadkvadrikou Γ žiadny spoločný bod okrem bodu V. Úloha nemá riešenie.

b) Priamka m je incidentná s niektorou tvoriacou rovinou kužeľovej nadkvadriky Γ a úloha má nekonečne mnoho riešení.

Môže sa tiež stať, že všetky tri roviny $\varrho^{(i)}$ sú incidentné s bodom R, pričom bod R sa nachádza na rotačnej kužeľovej ploche K. Potom priamka m má s kužeľovou nadkvadrikou Γ spoločný bod R. K bodu R však neprislúcha žiadna cyklosféra, ktorá by udávala riešenie uvedenej úlohy. Okrem bodu R môže mať priamka m s nadkvadrikou Γ spoločný ešte bod X. V tomto prípade úloha bude mať najviac 8 riešení (môže mať aj menej, keď bude $X \equiv R$, nedostaneme žiadne riešenie). V tomto prípade žiadne riešenia nemôžu byť imaginárne a nemôžu ani splývať. Môže sa tiež stať, že priamka m bude incidentná s tvoriacou rovinou nadkvadriky Γ, ktorá zrejme prechádza bodom R. Vtedy úloha má nekonečne mnoho riešení.

LITERATÚRA

[1] Gyarmathi L., *Konstruktive Lösung der Apollonius-Aufgabe im n-dimensionalen Raum durch Benützung einer Erweiterung der zyklographischen Abbildung auf mehrdimensionale Räume*, Publc. math. *1* (1949), 123–128.

[2] Harant M., *Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom euklidovskom priestore*, Spisy vyd. Přírodověd. fak. Masarykovy univ. (1956), 455–485.

[3] Harant M., *Teória nadkvadrík vo štvorrozmernom euklidovskom priestore, ktorých stredy vypĺňajú stredový útvar*, Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae. Math. *2* (1957), 25–47.

[4] Klíma J., *Deskriptivní geometrie čtyřrozměrného prostoru*, Sborník VŠT, *44* (1938).

[5] Seifert L., *Cyklografie*, Praha 1949.

Došlo 20. 2. 1965.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vysokej školy lesníckej a drevárskej, Zvolen

К ЦИКЛОСФЕРИЧЕСКОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Франтишек Гусарик

Резюме

В статье показано, что в оперативном пространстве $E_4 \equiv [0; x_1, x_2, x_3, x_4]$ к прямой p можно в циклосферическом изображении отнести коническую гиперквадрику 2-го порядка. Поверхностью следа этой гиперквадрики в гиперплоскости проекции $E_3^p \equiv [0; x_1, x_2, x_3]$ является вращающаяся коническая поверхность. Если точка B находится на приведенной конической гиперквадрике 2-го порядка, то поверхность шара, которая является носительницей циклосферы, принадлежащей точке B в циклосферическом изображении в E_4, касается поверхности следа. Циклосферы, принадлежащие точкам гиперплоскости E_3^m, пересекают плоскость её следа под углом φ, для которого $\cos \varphi = |\mathrm{cotg} \alpha|$, где α угол наклона гиперплоскости E_3^m к гиперплоскости проекции E_3^p.

Приведенные свойства были использованы при решении задач о поверхностях шара, которые являются поверхностями соприкосновения вращательного конуса и пересекают плоскости $\varrho^{(i)}$ под углами $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$.