MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕТРИКОЙ ТИПА БЭРА

ПАВЕЛ КОСТЫРКО (PAVEL KOSTYRKO), Братислава

В монографии [4] в гл. 2, § 1, прим. 5 определяется пространство Ω всех вещественных функций, определенных на интервале $\langle 1, \infty)$, с метрикой ϱ, где $\varrho(f, g) = 0$, если $f = g$ и $\varrho(f, g) = 1/\inf \{x | f(x) \neq g(x)\}$, если $f \neq g$.

В этой статье мы будем рассматривать более общие пространства. Определим пространство $\Omega(T, S_t;\ t \in T)$ (далее только $\Omega(T)$): Пусть $\emptyset \neq T \subset \langle 1, \infty)$ и пусть $+\infty$ — точка накопления множества T. Для всякого $t \in T$ пусть $S_t \subset E_1 = (-\infty, +\infty)$, причем каждое из множеств S_t имеет по крайней мере два элемента. Тогда определяем $\Omega(T) = \mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} S_t$. Значит, $\Omega(T)$ является множеством вещественных функций определенных на T, причем для значения функции f в точке t выполнено $f(t) \in S_t$. Определим на этом множестве метрику:

$$\varrho(f, g) = 0, \text{ если } f = g,$$
$$\varrho(f, g) = 1/\inf \{t \in T | f(t) \neq g(t)\}, \text{ если } f \neq g.$$

Потому что в дальнейшем мы часто будем сталкиваться с понятием открытого шара $K(f, \varepsilon)$ в $\Omega(T)$, рассмотрим подробнее его структуру. Если $g \in K(f, \varepsilon)$, $g \neq f$, то $\varrho(f, g) = 1/\inf\{t \in T | f(t) \neq g(t)\} < \varepsilon$, т. е. $1/\varepsilon < \inf\{t \in T | f(t) \neq g(t)\}$. Следовательно, существует $\delta > 0$ так, что $f(t) = g(t)$ для $t \in T \cap \langle 1, 1/\varepsilon + \delta)$. И наоборот, если $f(t) = g(t)$ для $t \in T \cap \langle 1, 1/\varepsilon + \delta)$, $\delta > 0$, то $g \in K(f, \varepsilon)$.

Множество $\mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} S_t$ с метрикой ϱ является метрическим пространством $\Omega(T)$. Обозначим его топологию через $\mathscr{L}$. На множестве $\mathop{\mathsf{X}}_{t \in T} S_t$ можем определить и другую топологию, топологию топологического произведения $\prod_{t \in T} S_t$ пространств S_t с эвклидовыми метриками. Эту топологию обозначим через $\mathscr{S}$.

В дальнейшем будем рассматривать взаимное отношение топологий $\mathscr{S}$ и $\mathscr{L}$. Укажем одно важное свойство, которым обладают открытые множества в $\prod_{t\in T} S_t$. Если обозначим через π_t проекцию $\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T} S_t$ в S_t, то для открытого множества G в $\prod_{t\in T} S_t$ справедливо $\pi_t(G) = G_t$, причем G_t является открытым множеством в S_t и $G_t \neq S_t$ только для конечного числа индексов t (см. [2], стр. 90).

Теорема 1. *Пусть множество $\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T} S_t$ имеет указанное значение. Пусть $\mathscr{S}$ и $\mathscr{L}$ — введеные топологии на $\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T} S_t$. Тогда $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathscr{S}$ и пусть G является елементом базиса $\mathscr{S}$ (опеределение базиса см. [2], стр. 90). Выберем произвольно $f \in G$. Покажем, что существует открытый шар $K(f, \varepsilon)$ в смысле метрики ϱ так, что $K(f, \varepsilon) \subset G$. Потому что G открыто, то для всех $t \in T$ за исключением, быть может, конечного числа индексов $t_1, \ldots, t_t$, $\pi_t(G) = S_t$. Обозначим через $t_0 = \max\{t_1, \ldots, t_k\}$, значит, для $t > t_0$ справедлиго $\pi_t(G) = S_t$. Выберем $\varepsilon = 1/t_0$. Тогда если $g \in K(f, \varepsilon)$, $g \neq f$, то $1/\varepsilon < \inf\{t | f(t) \neq g(t)\}$, значит $g \in G$, $K(f, \varepsilon) \subset G$. Мы показали, что для всякого $f \in G$ существует $\varepsilon = \varepsilon_G > 0$ так, что $K(f, \varepsilon) \subset G$. Следовательно, $G = \bigcup_{f\in G} K(f, \varepsilon) \in \mathscr{L}$.

Теорема 2. *Отношение $\mathscr{S} = \mathscr{L}$ верно тогда и только тогда, когда выполнены одновременно два условия:*

а) для каждого $Q > 1$ множество $M = T \cap \langle 1, Q\rangle$ является конечным

б) для каждого $t \in T$ множество S_t изолировано (т. е. для всякого $x \in S_t$ существует открытый интервал $0_x \subset E_1$ так, что $S_t \cap 0_x = \{x\}$).

Доказательство. Потому что по теореме 1 всегда имеет место включение $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}$, достаточно показать, что указанные условия а) и б) выполнены тогда и только тогда, когда $\mathscr{L} \subset \mathscr{S}$.

Покажем, что условие а) необходимо для справедливости включения $\mathscr{L} \subset \mathscr{S}$. Проведем доказательство от противного. Пусть существует $Q_0 > 1$ так, что множество $M = T \cap \langle 1, Q_0\rangle$ является бесконечным. Выберем произвольно $f \in \Omega(T)$. Пусть $\varepsilon = 1/Q_0$ и пусть $G = K(f, \varepsilon) \in \mathscr{L}$. Тогда вследствие строения открытых множеств в смысле топологии $\mathscr{S}$ $(\pi_t(G) = G_t$, причем $G_t \neq S_t$ только для конечного числа индексов t), очевидно, $G \notin \mathscr{S}$.

Покажем, что условие б) необходимо для справедливости включения $\mathscr{L} \subset \mathscr{S}$. Проведем доказательство от противного. Пусть существует $t_0 \in T$ так, что S_{t_0} имеет точку накопления x, $x \in S_{t_0}$. Пусть $f(t_0) = x$ и $f(t) \in S_t$ для $t \neq t_0$. Пусть $G = K(f, \varepsilon)$, $\varepsilon = 1/t_0$. Покажем, что G не принадлежит $\mathscr{S}$. Если $G \in \mathscr{S}$, то $\pi_{t_0}(G) = G_{t_0} = \{x\}$ должно быть открытым множеством в S_{t_0} а это невозможно в силу выбора элемента x.

Покажем, что условия а) и б) достаточны для справедливости включения $\mathscr{L} \subset \mathscr{S}$. Если $G \in \mathscr{L}$, то для всякого $f \in G$ существует ε, $0 < \varepsilon < 1$

так, что $K(f, \varepsilon) \subset G$. Покажем, что тогда существует $H \in \mathscr{S}$ так, что $f \in H$, причем $H \subset K(f, \varepsilon)$, т. е. $H \subset G$.

Пусть $G \in \mathscr{L}$, $f \in G$, $K(f, \varepsilon) \subset G$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Выберем $Q > 1/\varepsilon$. Из условия а) вытекает, что множество $M = T \cap \langle 1, Q\rangle$ конечно. Из условия б) вытекает, что для всякого $t \in T$ множество S_t, как топологическое пространство, — пространство с дискретной топологией (всякое множество $X \subset S_t$ открыто). Поэтому множество H определенное так, что $H = \mathop{\mathsf{X}}_{t\in T} H_t$, где

$$H_t = \{f(t)\} \text{ для } t \in M,$$

$$H_t = S_t \quad \text{для } t \in T - M,$$

открыто в смысле топологии $\mathscr{S}$, причем, очевидно, $H \subset K(f, \varepsilon)$.

Значит, для всякого $f \in G \in \mathscr{L}$ существует множество $H_f \in \mathscr{S}$ так, что $H_f \subset G$. Поэтому $G = \bigcup_{f\in G} H_f \in \mathscr{S}$.

Примечание 1. В связи с теоремой 2 возникает вопрос, независимы ли условия а) и б). Условие а) касается только множества T и условие б) только множеств S_t $(t \in T)$. Из доказательства необходимости этих условий вытекает, что они независимы. Это вытекает из того, что при доказательстве условия а) мы не пользовались свойствами множеств S_t и при доказательстве условия б) мы не пользовались свойствами множества T.

Рассмотрим топологическую размерность пространства $\Omega(T)$, (dim $\Omega(T)$). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть пространство $\Omega(T)$ имеет указанное значение. Тогда* dim $\Omega(T) = 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать (см. [7], стр. 198), что для всякого $f \in \Omega(T)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ $K(f, \varepsilon) = \overline{K(f, \varepsilon)}$ ($\overline{M}$ — замыкание множества M).

Выберем $f \in \Omega(T)$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $g \in \overline{K(f, \varepsilon)}$. Тогда существует последовательность $\{f_n\}_1^\infty$, $f_n \in K(f, \varepsilon)$, $f_n \neq g$ так, что $f_n \to g$. Значит, существует $n_0 > 0$ так, что $\varrho(f_{n_0}, g) < \varepsilon$. Из этого вытекает, что существует $\delta_1 > 0$ так, что $f_{n_0}(t) = g(t)$ для $t \in \langle 1, 1/\varepsilon + \delta_1) \cap T$. Потому что $f_{n_0} \in K(f, \varepsilon)$, то существует $\delta_2 > 0$ так, что $f(t) = f_{n_0}(t)$ для $t \in \langle 1, 1/\varepsilon + \delta_2) \cap T$. Следовательно, для $t \in \langle 1, 1/\varepsilon + \delta) \cap T$ $(\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\})$ имеет место $f(t) = g(t)$, значит, $g \in K(f, \varepsilon)$. Мы доказали, что имеет место $\overline{K(f, \varepsilon)} \subset K(f, \varepsilon)$. Из того, что включение $M \subset \overline{M}$ справедливо для всякого множества M, вытекает $\overline{K(f, \varepsilon)} = K(f, \varepsilon)$.

В дальнейщем мы будем более детально рассматривать свойства пространства $\Omega(T)$.

Теорема 4. *Пусть* $T \subset \langle 1, \infty)$, *пусть* $S_t \subset E_1$ $(t \in T)$. *Утверждение: Пространство* $\Omega(T, S_t;\ t \in T)$ *является полным.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}_1^\infty, f_n \in \Omega(T)$ является фундаментальной. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует самое малое $n_0(\varepsilon) > 0$ так, что для $m,\ n \geqslant n_0(\varepsilon)$ $\varrho(f_m, f_n) < \varepsilon$, следовательно, если $f_m \neq f_n$, то $\inf\{t \in T | f_m(t) \neq f_n(t)\} > 1/\varepsilon$. Построим функцию $f(t)$ $(t \in T)$: Для всякого $t_0 \in T$ построим $\varepsilon = 1/t_0$ и к этому $\varepsilon > 0$ построим введеное $n_0(\varepsilon)$. Пусть значение функции f в точке t_0 определяется отношением $f(t_0) = f_{n_0(\varepsilon)}(t_0)$. Очевидно, $f \in \Omega(T)$. Так как для $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ имеет место $f_n(t) = f(t)$ $(t \in \langle 1, t_0\rangle \cap T)$, то функция f является предельной функцией последовательности $\{f_n\}_1^\infty$ в смысле метрики ϱ.

Пусть $a \in E_1^* = E_1 \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Пусть Ω_a $(\Omega_a \subset \Omega(T))$ является множеством всех тех $f \in \Omega(T)$, для которых существует последовательность $\{t_n\}_1^\infty, t_n \in T, t_n \to \infty$ так, что $f(t_n) \to a$.

Теорема 5. *Пусть* $a_j \in E_1^*$ $(j = 1, 2, \ldots)$. *Пусть* $\Omega_{a_j} \neq \emptyset$ $(j = 1,2,\ldots)$ *Тогда множество* $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$ *является остаточным в* $\Omega(T)$.

К доказательству этой теоремы нам нужны три следующие леммы.

Лемма 1. *Множество* $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$ *является непустым.*

Доказательство леммы 1. По предположению для каждого $j = 1, 2, \ldots$ существует функция f_j и последовательность $\tau_j = \{t_{jn}\}_{n=1}^\infty$, $t_{jn} \in T$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_{jn} = +\infty$ так, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_j(t_{jn}) = a_j$. Построим последовательность $\{\sigma_m\}_1^\infty$ конечных последовательностей σ_m: Последовательность σ_m имеет m элементов $x_{m1}, \ldots, x_{mm}$, причем x_{mj} является элементом последовательности τ_j и если $j < k$, то $x_{mj} < x_{mk}$. Далее, если $m < n$, то пусть каждый элемент последовательности σ_m менше произвольного элемента последовательности σ_n. Очевидно, такую последовательность на основе предположения возможно построить. Дальше, пусть ξ обозначает возрастающую последовательность элементов множества $X = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{x_{mj}\} \subset T$ $(\subset E_1)$. Когда из последовательности ξ выберем все элементы, происходящее из последовательности τ_j $(j = 1, 2, \ldots)$, то получим частичную последовательность $\tau_j' = \{y_{jn}\}_{n=1}^\infty$ последовательности τ_j, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f_j(y_{jn}) = a_j$. Определим функцию $g \in \Omega(T)$ так, чтобы $g(t) = f_j(t)$, если $t \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{y_{jn}\} \subset X$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и для $t \in T - X$ выберем $g(t) \in S_t$ произвольно. Очевидно, $g \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$.

Лемма 2. *Пусть* $a \in E_1^*$. *Тогда множество* Ω_a — *множество типа* G_δ *в* $\Omega(T)$.

Доказательство леммы 2. Пусть $a \in E_1$. Определим для $k = 1, 2, \ldots$ множество

$$A_k = \{f \in \Omega(T) | \sum_{t > k} |f(t) - a| < 1/k\}.$$

Покажем, что A_k открыто. Достаточно показать, что для всякого $f_0 \in A_k$ существует $\delta > 0$, $\delta = \delta(f_0, k)$ так, что $K(f_0, \delta) \subset A_k$. Пусть $f_0 \in A_k$. Тогда существует $t > k$ так, что $|f_0(t) - a| < 1/k$. Положили $\delta = 1/t$. Если $\varrho(f, f_0) < \delta$, то $f(t) = f_0(t)$, значит $f \in A_k$.

Так как $\Omega_a = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то Ω_a является множеством типа G_δ в $\Omega(T)$.

Лемма доказывается аналогично для $a = +\infty$ и $a = -\infty$. Если, например, $a = +\infty$, то выберем $A_k = \{f \in \Omega(T) | \sum\limits_{t>k} f(t) > k\}$.

Лемма 3. *Множество* $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$ *является плотным в* $\Omega(T)$.

Доказательство леммы 3. Пусть $f_0 \in \Omega(T)$, пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $g \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$, существование которого вытекает из леммы 1. Построим f:

$$f(t) = f_0(t) \text{ для } t < 2/\varepsilon,$$
$$f(t) = g(t) \text{ для } t \geqslant 2/\varepsilon.$$

Легко можно показать, что $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$ и притом $\varrho(f, f_0) = 1/\inf\{t | f(t) \neq f_0(t)\} \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Доказательство теоремы 5. Потому что из леммы 2 вытекает, что Ω_{a_j} $(j = 1, 2, \ldots)$ — типа G_δ в $\Omega(T)$, то и множество $C = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$ — типа G_δ в $\Omega(T)$, значит, $D = \Omega(T) - C$ — типа F_σ в $\Omega(T)$. Поэтому $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_k = \overline{F}_k$. Согласно лемме 3 $C = \Omega(T) - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (\Omega(T) - F_k)$ является плотным подмножеством в $\Omega(T)$, значит, $\Omega(T) - F_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ является тоже плотным подмножеством в $\Omega(T)$. Потому что $\Omega(T) - \overline{F}_k = \Omega(T) - F_k$, то F_k нигде не плотно в $\Omega(T)$ и $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ является множеством первой категории в $\Omega(T)$.

Следствие 1. *Пусть* $a_j \in E_1^*$ $(j = 1, 2, \ldots)$. *Пусть* $\Omega_{a_j} \neq \emptyset$ $(j = 1, 2, \ldots)$. *Тогда множество* $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$ *является множеством второй категории в* Ω (T).

Это следствие знакомой теоремы Бэра о полных пространствах.

Примечание 2. Легко можно видеть, что малым изменением доказательства леммы 1 возможно теорему 5 доказать и тогда, если предположение $\Omega_{a_j} \neq \emptyset$ $(j = 1, 2, \ldots)$ будет заменено предположением $\Omega_{a_j} \neq \emptyset$ $(j = 1, \ldots, r)$ (r — натуральное число). Утверждение теоремы тогда будет касаться множества $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_{a_j}$.

Примечание 3. В теореме мы пользовались предположением $\Omega_a \neq \emptyset$. Это предположение мы могли бы заменить определенными предположениями о множествах T и S_t. Например, для того, чтобы $\Omega_a \neq \emptyset$, достаточно, чтобы для множества $T_a = \{t \in T \mid a \in \bar{S}_t\}$ точка $+\infty$ была точкой накопления.

Из теоремы 5 на основе заметки 2 вытекает следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть $\Omega_{+\infty} \neq \emptyset \neq \Omega_{-\infty}$. Тогда для всех $f \in \Omega(T)$ за исключением множества первой категории справедливо*

$$\liminf_{t\to\infty} f(t) = -\infty, \quad \limsup_{t\to\infty} f(t) = +\infty.$$

В дальнейшем будем рассматривать пространство $\Omega(T)$ при специальном выборе множеств T и S_t $(t \in T)$. Пусть $a = \{a_n\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, причем $a_n \neq 0$ $(n = 1,2,\ldots)$. Пусть $T = P = \{1,2,\ldots\}$ и пусть для множеств S_n выполнены следующие условия:

(1) а) если $x \in S_n$, то $xa_n \in S_n$, $xa_n^{-1} \in S_n$ $(n = 1,2,\ldots)$
б) если $x, y \in S_n$, то $x - y \in S_n$ $(n = 1,2,\ldots)$
в) множество S_1 имеет по крайней мере два элемента
г) $S_n \subset S_{n+1}$ $(n = 1,2,\ldots)$

Из а)—г) вытекает, что всякое из множеств S_n $(n = 1,2,\ldots)$ — нетривиальная подгруппа аддитивной группы действительных чисел. Пространство $\Omega(P)$ является пространством определенных действительных последовательностей $f = \{f_n\}_1^\infty$ $(f_n = f(n))$ с метрикой Бэра.

Следующая теорема дает с топологической точки зрения качественную характеризацию множества рядов, последовательности частичных сумм которых колеблются.

Теорема 6. *Пусть $a = \{a_n\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, причем $a_n \neq 0$ $(n = 1,2,\ldots)$. Тогда для всех элементов $f \in \Omega(P)$ за исключением элементов множества первой категории имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = +\infty.$$

Доказательство. Пусть $a = \{a_n\}_1^\infty$ последовательность с указанным значением. Определим на $\Omega(P)$ отображение φ следующим образом:

Последовательности $f = \{f_n\}_1^\infty \in \Omega(P)$ в отображении φ соответствует последовательность частичных сумм ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, т. е.

$$\varphi(f) = h = \{h_n\}_1^\infty \quad \left(h_n = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right). \tag{2}$$

Из отношений (1) (из свойств а), б) и г)) вытекает, что $h \in \Omega(P)$.

Легко можно видеть, что отображение φ является изометричным отображением $\Omega(P)$ на $\Omega(P)$. Если n — первый индекс, в котором отличаются последовательности $f = \{f_n\}_1^\infty$ и $g = \{g_n\}_1^\infty$, то n тоже первый индекс, в котором отличаются последовательности $\varphi(f)$ и $\varphi(g)$. Если последовательности f и g совпадают, то совпадают и последовательности $\varphi(f)$ и $\varphi(g)$ (см. (2)). Значит, $\varrho(\varphi(f), \varphi(g)) = \varrho(f, g)$. Далее, если $h = \{h_n\}_1^\infty \in \Omega(P)$, то определим последовательность $f = \{f_n\}_1^\infty$ так, что

$$f_1 = h_1/a_1, \; f_n = (h_n - h_{n-1})/a_n \quad (n = 2,3,\ldots), \tag{3}$$

тогда из (1) (из свойства), б) и г)) и из (3) вытекает, что $f \in \Omega(P)$. Очевидно, $\varphi(f) = h$.

Пусть

$$A = \{g \in \Omega(P) \mid \limsup_{n\to\infty} g_n = +\infty\},$$

$$B = \{g \in \Omega(P) \mid \liminf_{n\to\infty} g_n = -\infty\}.$$

Покажем, что $A \neq \emptyset$. Так как S_1 — нетривиальная подгруппа аддитивной группы действительных чисел существует последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n \in S_1$ так, что $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Из $S_n \subset S_{n+1}$ вытекает $x_n \in S_n$ $(n = 1,2,\ldots)$. Поэтому $x = \{x_n\}_1^\infty \in \Omega(P)$, причем $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Значит, $A \neq \emptyset$. Аналогично можно доказать $B \neq \emptyset$.

На основании следствия 2 (применением к пространству $\Omega(P)$) множество $M = A \cap B$ является остаточным в $\Omega(P)$, значит, множество $Q = \Omega(P) - M$ является множеством первой категории в $\Omega(P)$. Потому что определенное изометрическое отображение φ является гомеоморфизмом, то φ^{-1} также является гомеоморфизмом. Множество первой категории является топологическим инвариантом (см. [1], стр. 60), поэтому $\varphi^{-1}(Q)$ является множеством первой категории. Значит, множество $\varphi^{-1}(M) = \Omega(P) - \varphi^{-1}(Q)$ является остаточным в $\Omega(P)$. Но множество $\varphi^{-1}(M)$ — это множество всех тех $f \in \Omega(P)$, для которых справедливо

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = +\infty.$$

Применим теорему 6 к пространству всех действительных последовательностей $\Omega(P,\ E_1;\ n \in P)$ (полагаем $S_n = E_1$ $(n \in P)$).Мы получаем теорему, аналогичную теореме 2,1 статьи [3].

Теорема 7. *Пусть $a = \{a_n\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, причем $a_n \neq 0$ $(n = 1,2,\ldots)$. Тогда для всех элементов $f \in \Omega(P, E_1;$ $n \in P)$ за исключением множества первой категории справедливо*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = +\infty.$$

Пусть $a = \{a_i\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, $a_i \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots)$. Пусть R_n — конечные подмножества E_1, содержащие по крайней мере два элемента. Построим пространство $\Omega(P, R_n;\ n \in P)$ (далее $\Omega_R(P)$) и определим при помощи последовательности $a = \{a_i\}_1^\infty$ и множеств R_n $(n = 1,2\ldots)$ множества $S_n \subset E_1$ следующим образом:

$$S_n = \{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i \mid f_i \in R_i \quad (i = 1,\ldots,n)\} \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{4}$$

Построим пространство $\Omega(P,\ S_n;\ n \in P)$ (далее $\Omega_S(P)$). Множества S_n $(n = 1,2,\ldots)$, очевидно, конечны.

Теорема 8. *Пусть $a = \{a_i\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, пусть $a_i \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots)$. Пусть $\Omega_R(P)$ и $\Omega_S(P)$ имеют указанное значение. Тогда множество*

$$U = \{h = \{h_n\}_1^\infty \in \Omega_S(P) \mid \sum_{f \in \Omega_R(P)} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = h_n\ (n = 1,2,\ldots)\} \tag{5}$$

является замкнутым и нигде не плотным в $\Omega_S(P)$.

В доказательстве теоремы 8 будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть r_n — число элементов множества R_n и пусть s_n число элементов множества S_n $(n = 1,2,\ldots)$. Тогда $r_n < s_n$ $(n = 2,3,\ldots)$.*

Доказательство леммы 4. Очевидно, что каждое из множеств S_n $(n = 1,2,\ldots)$ содержает по крайней мере два элемента. Выберем $n \in P$, $n > 1$. Пусть $a_n > 0$. Пусть $f_{n1} < f_{n2} < \ldots < f_{nr_n}$ — все элементы множества R_n. Из отношения (4) вытекает, что все элементы множества S_n можем получить как всевозможные суммы типа $s + a_n f_{ni}$, где $s \in S_{n-1}$ и $i = 1,\ldots,r_n$. Из множества S_{n-1} можем выбрать два элемента s^* и s^{**} так, что $s^* < s^{**}$. Множество S_n содержит, очевидно, в качестве подмножества множество $\{s^* + a_n f_{n1}\} \cup \{s^{**} + a_n f_{ni} \mid i = 1,\ldots,r_n\}$ с $r_n + 1$ элементами. Значит, $s_n \geqslant r_n + 1 > r_n$. Аналогично мы доказали бы лемму в случае $a_n < 0$.

Доказательство теоремы 8. Сначала покажем, что множество U замкнуто в $\Omega_S(P)$. Пусть $h^m = \{h_n^m\}_{n=1}^\infty \in U$, $h_n^m = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i^m$ $(m = 1,2,\ldots)$ и пусть $h^m \to h$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует (самое малое) $m_0(\varepsilon)$так, что для $m \geqslant m_0(\varepsilon)$ выполнено $\varrho(h^m, h) < \varepsilon$, значит, существует $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что для $n < 1/\varepsilon + \delta$, $m \geqslant m_0(\varepsilon)$ выполнено $h_n = h_n^m$. Индукцией построим последовательность $f = \{f_k\}_1^\infty$:

а) для $k = 1$ выберем $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$ и для него построим введеное $m_0(\varepsilon_1)$. Тогда $h_1 = h_1^{m_0(\varepsilon_1)} = a_1 f_1^{m_0(\varepsilon_1)}$. Полагаем $f_1 = f_1^{m_0(\varepsilon_1)} = h_1/a_1$.

б) пусть определены $f_1,\ldots,f_{k-1}$ $(k > 1)$. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_k = 1/k$ и для него построим введеное $m_0(\varepsilon_k)$. Тогда $h_k = h_k^{m_0(\varepsilon_k)} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i^{m_0(\varepsilon_k)}$. Очевидно, $f_i^{m_0(\varepsilon_k)} = f_i$ $(i = 1,\ldots,k-1)$. Полагаем $f_k = f_k^{m_0(\varepsilon_k)} = (h_k - h_{k-1})/a_k$.

О последовательности f построенной этим образом легко можно показать, что $f \in \Omega_R(P)$ и $h_k = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i$ $(k = 1,2,\ldots)$, значит, $h \in U$, $U = \overline{U}$.

Достаточно еще показать, что множество $\Omega_S(P) - U$ плотно в $\Omega_S(P)$. Выберем произвольно $K(h, \varepsilon) \subset \Omega_S(P)$, $\varepsilon > 0$. Возможно уже предполагать, что $h \in U$. Пусть $p > \max\{1/\varepsilon, 1\}$, $p \in P$. Определим $g = \{g_n\}_1^\infty \in \Omega_S(P)$ следующим образом: $g_n = h_n$ для $n < p$, для $n > p$ выберем $g_n \in S_n$ произвольно. Значение g_p выберем так, чтобы $g = \{g_n\}_1^\infty \notin U$. Покажем, что такой выбор является возможным. Так как $h = \{h_n\}_1^\infty \in U$, то существует $f = \{f_n\}_1^\infty \in \Omega_R(P)$ так, что $h_n = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$ $(n = 1,2,\ldots)$. Для $n < p$ полагаем $g_n = h_n$. Элемент g может быть элементом множества U только тогда, когда $g_p = \sum_{i=1}^{p-1} a_i f_i + a_p z$, где $z \in R_p$, значит, если число g_p принадлежит множеству $\{\sum_{i=1}^{p-1} a_i f_i + a_p z \mid z \in R_p\} \subset S_p$ состоящему из r_p элементов. На основе леммы 4 $s_p > r_p$, значит, можно выбрать $g_p \in S_p - \{\sum_{i=1}^{p-1} a_i f_i + a_p z \mid z \in R_p\}$. Для выбранного таким образом элемента g, очевидно, выполняется $g \in \Omega_S(P) - U$, $\varrho(h, g) < \varepsilon$.

Рассмотрим теперь пространства $\Omega_R(P)$ и $\Omega_S(P)$ при специальном выборе последовательности $a = \{a_i\}_1^\infty$ и множеств R_n $(n = 1,2,\ldots)$. Последовательность $a = \{a_i\}_1^\infty$ выберем так, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 0$ и положим $R_n = \{-1, +1\}$ $(n = 1,2,\ldots)$. Следовательно, будем рассматривать пространства $\Omega_R(P)$ и $\Omega_S(P)$, где $S_n = \{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \mid \varepsilon_i = \pm 1\ (i = 1,\ldots,n)\}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Если для пространства $\Omega_S(P)$ построим множества $\Omega_{+\infty}$ и $\Omega_{-\infty}$ (очевидно, непустые), то о множестве $H = \Omega_{+\infty} \cap \Omega_{-\infty}$ на основе следствия 2 знаем, что оно является остаточным в $\Omega_S(P)$. Поэтому для множества N всех тех элементов $h = \{h_n\}_1^\infty$ $(h_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i)$ из $\Omega_S(P)$, для которых не выполнено

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = +\infty. \tag{6}$$

имеет место включение $N \subset \Omega_S(P) - H$, значит, оно является множеством первой категории в $\Omega_S(P)$.

В работах [5] и [6] для данного расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $a_n > 0$ рассматривается пространство X всех рядов типа $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i = +1$ или $\varepsilon_i = -1$ $(i = 1,2,\ldots)$ с метрикой Бэра (если $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i \in X$, $x' = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i' a_i \in X$, то $\sigma(x, x') = 0$, если $\varepsilon_i = \varepsilon_i'$ $(i = 1,2,\ldots)$ и $\sigma(x, x') = 1/l$, если l является первым индексом, для которого $\varepsilon_l \neq \varepsilon_l'$).

В работах [5] и [6] показано:

Для всех $x \in X$ за исключением множества X_3 первой категории имеет место

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = +\infty$$

(см. [6], теорема 5).

В частном случае имеет место: Если X_1 является множеством всех тех $x \in X$, которые имеют сумму (собственную или несобственную), то X_1 является множеством первой категории в X (см. [5], теорема 2).

Теорема 9. *Пусть $a = \{a_i\}_1^\infty$ — последовательность положительных действительных чисел, пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Пусть пространства $\Omega_R(P)$, $\Omega_S(P)$ и (U, ϱ) (см. (5)) имеют указанное значение. Тогда множество N элементов $h = \{h_n\}_1^\infty \in U$ $(h_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i)$, для которых не имеет места (6), является множеством первой категории в $U \subset \Omega_S(P)$ и нигде не плотно в $\Omega_S(P)$.*

Доказательство. Пусть φ является отображением пространства (X, σ) на подпространство (U, ϱ) пространства $\Omega_S(P)$, в котором элементу $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i \in X$ соответствует элемент $h = \{h_n\}_1^\infty$ $(h_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i)$. Возможно

показать, аналогично как в доказательстве теоремы 6, что φ является изометрическим отображением. В отображении φ множеству X_3 (см. [6], теорема 5) соответствует множество N. Так как изометрическое отображение является гомеоморфным и множество первой категории является топологическим инвариантом, то на основании теоремы 5 статьи [6] $\varphi(X_3) = N$ является множеством первой категории в U.

На основании теоремы 8 применением ее к случаю рассматриваемых пространств $\Omega_R(P)$ и $\Omega_S(P)$ получим, что множество U является нигде не плотным в $\Omega_S(P)$. Так как $N \subset U$, то множество N тоже нигде не плотно в $\Omega_S(P)$.

Примечание 4. В изометрическом отображении φ, введеном в доказательстве теоремы 9, множеству X_1 (см. [5], теорема 2) соответствует множество V тех последовательностей, для которых существует предел $\lim_{n\to\infty} h_n$. Аналогично как в доказательстве теоремы 9 мы бы на основании теоремы 2 статьи [5] могли показать, что множество $\varphi(X_1) = V$ является множеством первой категории в U и на основании теоремы 8 нигде не плотно в $\Omega_S(P)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Čech E., *Bodové množiny I*, Praha 1936.
[2] Kelley J. L., *General Topology*, New York 1955.
[3] Легень А., Шалат Т., *О некоторых применениях метода категорий в теории пространств последовательностей*, Mat.-fyz. časop. *14* (1964), 217—231.
[4] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste I*, Warszawa 1958.
[5] Šalát T., *Poznámky k Riemannovej vete o divergentných radoch*, Mat.-fyz. časop. *5* (1955), 94—100.
[6] Šalát T., *O istých priestoroch radov s bairovskou metrikou*, Mat.-fyz. časop. *7* (1957), 193—206.
[7] Kuratowski K., *Wstep do teorii mnogosci i topologii*, Warszawa 1962.

Поступило 15. 2. 1965.

*Katedra algebry a teórie čísel
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava*