MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV. 16, 2, 1966

# ПРИМЕЧАНИЕ К СТРУКТУРАМ СТОУНА I

ТИБОР КАТРИНЯК (TIBOR KATRIŇÁK), Братислава

Г. Гретцер и Э. Т. Шмидт (G. Grätzer — E. T. Schmidt) доказали в работе [1] следующую теорему:

**Теорема** (ГШ). *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с псевдодополнениями. $L$ будет структурой Стоуна тогда и только тогда, когда объединение (относительно исчисления комплексов) двух различных минимальных простых идеалов структуры $L$ снова равно $L$.*

В § 2 покажем, что из теоремы (ГШ) нельзя пропустить предположение о псевдодополнительности структуры $L$. Это будет отрицательный ответ на вопрос поставленный в работе [1]. Далее при помощи минимальных простых идеалов мы будем характеризовать дистрибутивные структуры с псевдодополнениями и перефразируем теорему (ГШ). В § 3 определим дистрибутивные структуры с локальными псевдодополнениями и обобщенные структуры Стоуна. Далее покажем некоторые свойства этих структур. В § 4 доказываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы структура всех идеалов любой структуры была структурой Стоуна.

## § 1. Некоторые вспомогательные утверждения

Знаки $\cap$ ($\wedge$) и $\cup$ ($\vee$) будут обозначать операции пересечения и объединения конечного (произвольного) множества элементов из некоторой структуры. $\bigcap$ и $\bigcup$ будут обозначать теретико-множественное пересечение и объединение. Выражение *произведение идеалов* будет обозначать теоретико-множественное пересечение идеалов и это, как хорошо известно, равносильно структурному пересечению идеалов.

**Определение 1.** *Структура $L$ называется структурой с псевдодополнениями, если она имеет наименьший элемент $0$ и для всякого элемента $a \in L$ существует элемент $a^* \in L$ такой, что $a \cap x = 0$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant a^*$. Элемент $a^*$ называется псевдодополнением элемента $a$.*

Примечание 1. На протяжении всей настоящей работы мы будем заниматься только дистрибутивными структурами с псевдодополнениями.



Легко показать, что эти структуры имеют наибольший элемент $I = 0^*$ (смотри [4, стр. 210]).

**Определение 2.** *Дистрибутивная структура $L$ называется структурой Стоуна* (смотри [1]), *если она является структурой с псевдодополнениями и для всякого $a \in L$ имеет место $a^* \cup a^{**} = I$, где $I$ обозначает наибольший элемент структуры $L$.*

**Определение 3.** *Минимальным простым идеалом структуры $L$ является минимальный элемент частично упорядоченного множества всех непустых простых идеалов структуры $L$ упорядоченных относительно теоретико-множественного включения.*

**Лемма 1.** (Стоун). *Пусть $L$ — дистрибутивная структура, $J \neq \emptyset$* (1) *идеал и $D \neq \emptyset$ — дуальный идеал структуры $L$ и пересечение этих двух идеалов пустое множество. В системе идеалов содержащих $J$ и не пересекающихся с $D$ существует максимальный идеал и он является простым идеалом.*

Доказательство этого утверждения хорошо известно. Смотри например [4, стр. 225].

Примечание 2. На протяжении настоящей работы мы будем заниматься только непустыми идеалами и называть просто идеалами. Максимальный (дуальный максимальный) идеал структуры $L$ будет максимальным элементом в частично упорядоченном множестве всех идеалов (дуальных идеалов) структуры $L$, различных от $L$. Легко теперь показать, что в дистрибутивной структуре $L$, содержащей по крайней мере два элемента, $P$ является минимальным простым идеалом тогда и только тогда, когда $L - P$ (2) является дуальным максимальным идеалом.

**Лемма 2.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом и $P$ — простой идеал структуры $L$. Существует минимальный простой идеал $Q$, для которого имеет место $Q \subset P$.*

Доказательство следует из леммы 1 (смотри [1, лемма 2]).

**Лемма 3.** *Если в дистрибутивной структуре объединение и пересечение (относительно исчисления комплексов) идеалов $J_1$, $J_2$ является главным идеалом, то идеалы $J_1$, $J_2$ — главные.*

Доказательство смотри в [2, лемма II].

(1) $\emptyset$ обозначает пустое множество.
(2) $L - P$ обозначает разность множеств.

## § 2. Характеризация дистрибутивных структур с псевдодополнениями и структуры Стоуна

**Лемма 4.** *В дистрибутивной структуре с наименьшим элементом $0$ для всякого элемента $a \in L$ и $a > 0$ существует такой минимальный простой идеал $P$ структуры $L$, что $a \notin P$.*

Доказательство. Если положим $J = (0]$, $D = [a)$ (3), то из леммы 1 вытекает, что существует простой идеал $P'$ структуры $L$ не содержащий элемент $a$. Доказательство завершается, если взять минимальный простой идеал $P \subset P'$ (смотри лемму 2).

**Лемма 5.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $0$. Пусть $a \in L$, $a > 0$. Если $\mathscr{M}_a$ обозначает множество всех минимальных простых идеалов структуры $L$ не содержащих элемент $a$, то $(a]^* = \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)$.* (4)

Доказательство. Из леммы 4 следует, что $\mathscr{M}_a \neq \emptyset$. Если $P \in \mathscr{M}_a$, то $(a]^* \subset P$. Итак $(a]^* \subset \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)$. Пусть $c \in \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)$, $c \cap a > 0$. Из леммы 4 следует, что существует такой минимальный простой идеал $Q$ *для которого* $c \cap a \notin Q$. Из этого вытекает, что $Q \in \mathscr{M}_a$ и $c \in Q$, но это противоречит $c \notin Q$. Итак $(a]^* = \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)$.

**Следствие.** *Пусть $J \neq (0]$ — идеал дистрибутивной структуры $L$ с наименьшим элементом $0$. Если $\mathscr{M}_J$ — множество всех минимальных простых идеалов $P$ структуры $L$, для которых имеет место $P \not\supset J$, то $J^* = \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_J)$.*

Доказательство. Очевидно что $\mathscr{M}_J = \bigcup (\mathscr{M}_a;\ a \in J,\ a \neq 0)$. Из определения идеала $J^*$ и из леммы 5 вытекает, что $J^* = \bigwedge ((a]^*; a \in J, a \neq 0) = \bigwedge [\bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a);\ a \in J,\ a \neq 0] = \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_J)$.

**Теорема 1.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $0$. $L$ будет структурой с псевдодополнениями тогда и только тогда, когда для всякого $a \in L$ и $a > 0$ пересечение всех минимальных простых (простых) идеалов структуры $L$ не содержащих элемент $a$ является главным идеалом структуры $L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $L$ стуктура с псевдодополнениями, $a \in L$, $a > 0$. Очевидно, что $(a]^* = (a^*]$. Из леммы 5 вытекает, что $(a]^* = \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)$. Итак $(a^*] = \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)$. Из леммы 2 следует, что пересечение всех простых идеалов структуры $L$ не содержащих элемент $a$ является тоже $(a^*]$.

Достаточность. Пусть $(a]^* = \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a) = (d]$, $d \in L$. Очевидно,

(3) Для $b \in L$, $(b] = \{x \in L;\ x \leqslant b\}$. Аналогично, $[b) = \{x \in L;\ x \geqslant b\}$.

(4) Если $J$ — идеал структуры $L$, то $J^*$ будет обозначать псевдодополнение идеала $J$ в структуре всех идеалов структуры $L$. Очевидно, что $J^* = \{z \in L;\ x \cap z = 0$ для всех $x \in J\}$.



что пересечение всех простых идеалов $L$ не содержащих элемент $a$ является также $(d]$. Если $a \cap b = 0$, то $b \in (a]^*$ и $b \leqslant d$. Так как $(d] = (a]^*$, то $a \cap d = 0$ и $a^* = d$.

**Определение 4.** *Структура $L$, в которой для всяких двух элементов $a$, $b \in L$ существует элемент $a_* b \in L$ такой, что $a \cap x \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant a_* b$, называется структурой с относительными псевдодополнениями.*

**Теорема 2.** *Структура $L$ является структурой с относительными псевдодополнениями тогда и только, когда*

(1) *$L$ является дистрибутивной структурой с наибольшим элементом и*

(2) *для всяких двух элементов $a$, $b \in L$ и $a \not\leqslant b$, пересечение всех простых идеалов структуры $L$ не содержащих элемент $a$, но содержащих элемент $b$, является главным идеалом.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $L$ — структура с относительными псевдодополнениями. Если $a$, $b \in L$, $a \leqslant b$, то $a_* b$ является наибольшим элементом структуры $L$. Из [4, следствие теоремы 15, стр. 210] вытекает, что $L$ является дистрибутивной структурой. Пусть теперь $a$, $b \in L$, $a \not\leqslant b$. Пусть $\mathscr{P}_{ab}$ обозначает множество всех простых идеалов структуры $L$ содержащих елемент $b$, но не содержащих элемент $a$. Если взять $J = (b]$, $D = [a)$, то из леммы 1 вытекает, что $\mathscr{P}_{ab} \neq \emptyset$. Если $P \in \mathscr{P}_{ab}$ и $a \cap x \leqslant b$ $(x \in L)$, то $x \in P$. Итак $(a_* b] \subset \bigwedge (P;\ P \in \mathscr{P}_{ab}) = K$. Пусть существует $c' \in K$ такое, что $c' \notin (a_* b]$. Из последнего следует,что существует элемент $c \in K$ такой, что $c > a_* b$ и $c \cap a \not\leqslant b$. Из леммы 1 вытекает, что существует простой идеал $P$ структуры $L$ такой, что $b \in P$ и $a \cap c \notin P$. Из этого следует, что элементы $a, c \notin P$ и $P \in \mathscr{P}_{ab}$. Последнее утверждение влечет за собой $c \in P$ и мы получили противоречие. Итак, имеет иесто (2).

Достаточность. Покажем, что для всяких двух элементов $a$, $b \in L$ существует $a_* b$. Если $a \leqslant b$, то $a_* b = I$ ($I$ наибольший элемент структуры $L$). Пусть $a \not\leqslant b$. Из (2) следует, что $\bigwedge (P;\ P \in \mathscr{P}_{ab}) = (d]$ и $d \in L$. Покажем, что $d = a_* b$. Если $a \cap x \leqslant b$, $x \in L$, то для всякого $P \in \mathscr{P}_{ab}$, $x \in P$. Итак, $x \leqslant d$. Покажем еще, что $a \cap d \leqslant b$. Пусть $a \cap d \not\leqslant b$. Из леммы 1 следует, что существует такой простой идеал $P$ структуры $L$, для которого имеет место $b \in P$ и $a \cap d \notin P$. Из последнего вытекает, что $a, d \notin P$ и $P \in \mathscr{P}_{ab}$. Но с другой стороны $d \in P$ и мы получили противоречие. Итак, из (1), (2) следует, что $L$ является структурой с относительными псевдодополнениями.

Теперь уже возможна характеризация структур Стоуна при помощи минимальных простых идеалов структуры $L$.

**Теорема 3.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наибольшим и наименьшим элементами. $L$ будет структурой Стоуна тогда и только тогда, когда выполнены следующе условия:*

а) (ГШ) *обьединение (относительно исчисления комплексов) всяких двух различных минимальных простых идеалов структуры $L$ равно $L$,*

б) *для всякого $a \in L$ и $a > 0$ ($0$ является наименьшим элементом $L$) пересечение всех минимальных простых идеалов структуры $L$ не содержащих элемент $a$ является главным идеалом.*

*Условия* а) *и* б) *взаимно независимы.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из теоремы (ГШ) и теоремы 1. Из теоремы 1 вытекает, что условие б) эквивалентно с условием

б') *$L$ является структурой с псевдодополнениями.*

Пусть $L$ обозначает множество всех открытых множеств всех вещественных чисел. (Если $x$, $y$, $z$ — вещественые числа и $x \leqslant y$, то $(x, y) = \{z; x < z < y\}$ обозначает открытый интервал). Легко показать, что $L$ является — относительно теоретико-множественного включения — дистрибутивной структурой с псевдодополнениями. Если взять $(0,1) \in L$, то $x^* = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$. Очевидно, что $x^{**} = x$ и $x^* \cup x^{**} \neq L$. $L$ не является структурой Стоуна и из теоремы (ГШ) следует, что условие а) для $L$ не выполнено. В примечании 3 покажем, что из условия а) и дистрибутивности не вытекает условие б).

Примечание 3. В работе [1] поставлен вопрос, нельзя ли из теоремы (ГШ) пропустить предположение о псевдодополнительности структуры $L$. Покажем, что существует дистрибутивная структура $L$ с наименьшим и наибольшим элементами, которая не является структурой Стоуна, хотя объединение любых различных минимальных простых идеалов структуры $L$ является $L$. Это утверждение отвечает отрицательно на упомянутый вопрос в работе [1].

Везьмем $[0,1] = I$ (множество всех вещественных чисел $x$, для которых $0 \leqslant x \leqslant 1$). Очевидно, что $I$ является отделимым (хаусдорфовым) компактным подпространством пространства всех вещественных чисел. Пусть $L$ означает систему всех замкнутых подмножеств $I$. Относительно множественного объединения и пересечения $L$ является дистрибутивной структурой с наибольшим элементом $I$ и наименьшим элементом $\emptyset$. Пусть $D$ является максимальным дуальным идеалом $L$. Так как $[0,1]$ является компактным пространством, то пересечение всех множеств принадлежащих $D$ не будет пустым. Пусть $d \in [0,1]$ из этого пересечения. Очевидно, что $\{d\}$ тоже является замкнутым множеством пространства $[0,1]$. Система $M_d$ всех замкнутых подмножеств пространства $[0,1]$, содержащих $\{d\}$, является максимальным дуальным идеалом $L$, а это влечет за собой, что



$D = M_d$. Из последнего вытекает, что каждый минимальный простой идеал структуры $L$ будет множество $N_d = L - M_d$, где $d \in [0,1]$. Пусть $c, d \in [0,1]$ и $c < d$. Этим числам отвечают идеалы $N_c$, $N_d$. Очевидно, что существуют такие числа $r_1, r_2 \in [0,1]$ и $c < r_1 < r_2 < d$. Легко показать, что $[0,r_2] \in N_d$, $[r_1, 1] \in N_c$ и $[0, r_2] \cup [r_1, 1] = I$. Тем для $L$ доказано условие (ГШ). Но $L$ не является структурой с псевдодополнениями. Для этого достаточно взять $[0, r] \in L$ и $0 < r < 1$. К этому множеству, как легко показать, не существует псевдодополнение в структуре $L$.

## § 3. Обощенные структуры Стоуна

Из примечания 3 следует, что класс всех структур Стоуна отличается от класса всех дистрибутивных структур с наименьшим элементом выполняющим условие (ГШ). В настоящем параграфе изучим один из классов дистрибутивных структур выполняющих условие (ГШ).

**Определение 5.** *Структура $L$ с наименьшим элементом $0$ называется структурой с локальными псевдодополнениями, если для всякого $a \in L$ подструктура $[0, a]$ является структурой с псевдодополнениями.*

**Определение 6.** *Дистрибутивная структура $L$ с наименьшим элементом $0$ называется обобщенной структурой Стоуна, если для всякого $a \in L$ подструктура $[0, a]$ является структурой Стоуна.*

**Лемма 6.** *Всякая дистрибутивная структура с псевдодополнениями является структурой с локальными псевдодополнениями. Структура Стоуна является обобщенной структурой Стоуна.*

Доказательство. Пусть $L$ — дистрибутивная структура с псевдодополнениями, $a, d \in L$ и $a \leqslant d$. Очевидно, что $a^* \cap d \in [0, d]$. Если $x \in [0, d]$ и $a \cap x = 0$, то $x \leqslant a^* \cap d$ и наоборот. Итак $a^* \cap d$ является псевдодополнением элемента $a$ в $[0, d]$. Пусть теперь $L$ — структура Стоуна. Из доказанного следует, что $L$ является структурой с локальными псевдодополнениями. Для элемента $a \in [0, d]$ элемент $a^* \cap d$ является псевдодополнением в $[0, d]$. Если $x \in [0, d]$ и $(a^* \cap d) \cap x = 0$, то $x \leqslant a^{**} \cap d$ и наоборот. Итак $a^{**} \cap d$ является псевдодополнением элемента $a^* \cap d$ в $[0, d]$. Очевидно, что $(a^* \cap d) \cup (a^{**} \cap d) = (a^* \cup a^{**}) \cap d = I \cap d = d$ и $L$ обощенная структура Стоуна.

**Лемма 7.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $0$. $L$ будет структурой с локальными псевдодополнениями тогда и только тогда, когда для всяких двух элементов $a, d \in L$, выполняющих неравенство $0 < a \leqslant d$, пересечение идеала $(d]$ с всеми минимальными прос-*

*тыми идеалами структуры $L$, не содержащими элемент $a \in L$, является главным идеалом.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $L$ — дистрибутивная структура с локальными псевдодополнениями, $a$, $d \in L$ и $0 < a \leqslant d$. Пусть $a^+ \in [0, d]$ — псевдодополнение элемента $a$ в $[0, d]$. Очевидно, что $(a^+] = (a]^* \cap (d]$. Из леммы 5 следует, что $(a^+] = (\bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)) \cap (d]$.

Достаточность. Из леммы 5 снова вытекает, что $(a]^* \cap (d] = (\bigwedge (P;\ P \in \mathscr{M}_a)) \cap (d]$ является псевдодополнением элемента $a$ в подструктуре $[0, d]$.

Примечание 4. Теперь на примере покажем, что существуют обобщенные структуры Стоуна (структуры с локальными псевдодополнениями), которые не являются структурами Стоуна (структурами с псевдодополнениями). Пусть $L$ обозначает систему всех конечных подмножеств множества всех натуральных чисел, упорядоченную относительно теоретико-множественного включения. Очевидно, что $L$ являтся дистрибутивной структурой с наименьшим элементом $\emptyset$ и без наибольшего элемента. Легко показать, что $L$ не будет структурой с псевдодополнениями и подавно не будет структурой Стоуна. Для всякого $A \in L$, $[\emptyset, A]$ является булевой алгеброй. Итак, $L$ будет обобщенной структурой Стоуна.

**Лемма 8.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $0$. $L$ является обобщенной структурой Стоуна тогда и только тогда, когда для всякого $x \in L$ будет $(x]^* \cup (x]^{**} = L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x$, $d \in L$ и $x \leqslant d$. Пусть $x^+$ и $x^{++}$ являются псевдодополнением элементов $x$ и $x^+$ в подструктуре $[0, d]$. Из предположения следует, что $d = x^+ \cup x^{++}$. Из этого вытекает, что $(d] = (x^+] \cup (x^{++}] = ((x]^* \cap (d]) \cup ((x]^{**} \cap (d]) = ((x]^* \cup (x]^{**}) \cap \cap (d]$. Для всех элементов $y \in L$ будет $d = y \cup x \geqslant y$ и $(x]^* \cup (x]^{**} \supset \supset (d] \supset (y]$. Из последнего вытекает, что $(x]^* \cup (x]^{**} = L$.

Достаточность. Пусть $x$, $d \in L$, $x \leqslant d$ и $(x]^* \cup (x]^{**} = L$. Известно, что структура всех идеалов дистрибутивной структуры является дистрибутивной структурой. $((x]^* \cup (x]^{**}) \cap (d] = ((x]^* \cap (d]) \cup ((x]^{**} \cap (d]) = = (d]$. Одновременно имеет место равенство $((x]^* \cap (d]) \cap ((x]^{**} \cap (d]) = (0]$. Из леммы 3 вытекает, что идеалы $(x]^* \cap (d]$, $(x]^{**} \cap (d]$ будут гвавными идеалами. Легко теперь показать, что $L$ является обобщенной структурой Стоуна.

**Теорема 4.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $0$. $L$ является обобщенной структурой Стоуна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) *условие* (ГШ) (смотри теорему 3) *и*

б) *для всяких двух элементов $a$, $d \in L$, выполняющих неравенство $0 <$*



*$< a \leqslant d$, пересечение идеала $(d]$ с всеми минимальными простыми идеалами структуры $L$, не содержащими элемент $a$, является главным идеалом.*

*Условия* а), б) *взаимно независимы.*

Сначала докажем следующую лемму.

**Лемма 9.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $0$. Если для $L$ имеет место условие* (ГШ), *то для каждого $a \in L$ подструктура $[0, a]$ выполняет условие* (ГШ).

Доказательство. Пусть $P$ — минимальный простой идеал подструктуры $[0, a]$ $(a \in L)$. Теперь покажем, что существует минимальный простой идеал $P'$ структуры $L$ такой, что $P' \cap [0, a] = P$. Пусть $D$ обозначает дуальный идеал структуры $L$, порожденный множеством $[0, a] - P$. Очевидно, что $D \cap [0, a] = [0, a] - P$. $P$ является идеалом структуры $L$ и $P \cap D = \emptyset$. Из леммы 1 следует, что в дуальной структуре $\check{L}$, соответствующей структуре $L$, существует дуальный максимальный идеал $M$ такой, что $M \supset D$ и $M \cap P = \emptyset$. Очевидно, что $M$ — дуальный простой идеал структуры $L$. Тогда $Q = L - M$ будет простым идеалом $L$. Очевидно, что $Q \cap [0, a] = P$. Из леммы 2 следует, что для идеала $Q$ существует минимальный простой идеал $Q'$ структуры $L$ и $Q' \subset Q$. Очевидно, что $Q' \cap [0, a] \subset P$. $0 \in Q' \cap [0, a]$, итак $Q' \cap [0, a] \neq \emptyset$ Идеал $Q' \cap [0, a]$ является простым идеалом подструктуры $[0, a]$. Из последнего вытекает, что $P = Q' \cap [0, a]$. Пусть $P_1$, $P_2$ — различные минимальные простые идеалы подструктуры $[0, a]$. Из доказанного следует, что существуют такие минимальные простые идеалы $Q_1$, $Q_2$ структуры $L$ и $Q_1 \cap [0, a] = = P_1$, $Q_2 \cap [0, a] = P_2$. Очевидно, что $Q_1 \neq Q_2$. Из условия (ГШ) следует, что $Q_1 \cup Q_2 = L$ и тогда $P_1 \cup P_2 = (Q_1 \cap [0, a]) \cup (Q_2 \cap [0, a]) = (Q_1 \cup \cup Q_2) \cap [0, a] = L \cap [0, a] = [0, a]$.

Доказательство теоремы 4. Достаточность. Из леммы 7 и условия б) нашей теоремы вытекает, что $L$ является структурой с локальными псевдодополнениями. Из леммы 9, условия а) и теоремы (ГШ) вытекает, что $L$ является обобщенной структурой Стоуна.

Необходимость. Пусть $P_1$, $P_2$ — различные минимальные простые идеалы $L$ и $P_1 \cup P_2 \neq L$. Тогда существует элемент $c \in L$ такой, что $c \notin P_1 \cup P_2$. Множества $L - P_1$, $L - P_2$ будут дуальными максимальными идеалами структуры $L$. Пусть $a \in P_2 - P_1$. Из этого вытекает, что дуальный идеал, порожденный идеалом $L - P_2$ и элементом $a$, будет равен $L$. Итак, существует элемент $b \in L - P_2$ такой, что $a \cap b = 0$. Если $b \in L - P_1$, то $a, b \in L - P_1$ и $0 \in L - P_1$. Это противоречит утверждению, что $L - P_1$ является дуальным максимальным идеалом. Итак, $b \in P_1 - P_2$. Если $d = a \cup b \cup c$, то $a, b, c \in [0, d]$. Пусть $a^+, b^+$ обозначают псевдодополнения элементов $a$, $b$ в подструктуре $[0, d]$. Так как $a \cap b = 0$, то $a^+ \geqslant b$, $b^+ \geqslant a$.

Из $a^+ \geqslant b$ и $b \in P_1 - P_2$ вытекает, что $a^+ \notin P_2$. Если $a^+ \in L - P_1$, то $a \cap a^+ = 0 \in L - P_1$ и мы получили противоречие. Итак, $a^+ \in P_1 - P_2$. Аналогично доказывается, что $a^{++} \in P_2 - P_1$. Из предположения нашей теоремы следует, что $a^+ \cup a^{++} = d$. Из последнего вытекает, что $d \in P_1 \cup P_2$ и подавно $c \in P_1 \cup P_2$. Но это противоречит нашему предположению. Итак, для $L$ имеет место условие а). Из леммы 7 вытекает условие б). Последнее утверждение нашей теоремы вытекает из леммы 6 и последнего утверждения теоремы 3.

## § 4. Структуры идеалов Стоуна

В настоящем параграфе $\mathscr{L}$ будет обозначать структуру всех идеалов структуры $L$. Будем искать условия, при которых $\mathscr{L}$ будет обобщенной структурой Стоуна. Так как $\mathscr{L}$ имеет наибольший элемент, то $\mathscr{L}$ будет обобщенной структурой Стоуна тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}$ будет структурой Стоуна.

**Лемма 10.** *Если $\mathscr{L}$ — структура Стоуна, то $L$ — обобщенная структура Стоуна.*

Доказательство. Из предположения следует, что для всякого $x \in L$ будет $(x]^* \cup (x]^{**} = L$. Известно, что отображение $x \to (x]$ $L$ в $\mathscr{L}$ является изоморфизмом. Так как $\mathscr{L}$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом, то $L$ — тоже дистрибутивная структура с наименьшим элементом. Из леммы 8 следует, что $L$ будет обобщенной структурой Стоуна.

**Лемма 11.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура и $\mathscr{P}$ — простой идеал структуры $\mathscr{L}$. Пусть $Q_{\mathscr{P}}$ обозначает множественное объединение всех идеалов принадлежащих $\mathscr{P}$. Далее пусть $Q$ — простой идеал структуры $L$ и $\mathscr{P}_Q$ — подмножество структуры $L$, состоящее из всех идеалов $J \subset Q$. Тогда $Q_{\mathscr{P}}$ является простым идеалом структуры $L$ и $\mathscr{P}_Q$ простым идеалом структуры $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Очевидно, что $Q_{\mathscr{P}}$ идеал структуры $L$. Если $a, b \notin Q_{\mathscr{P}}$, то $(a], (b] \notin \mathscr{P}$. Из этого следует, что $(a] \cap (b] = (a \cap b] \notin \mathscr{P}$, а это влечет за собой тот факт, что $a \cap b \notin Q_{\mathscr{P}}$. Итак $Q_{\mathscr{P}}$ является простым идеалом. Пусть теперь $Q$ — простой идеал структуры $L$. Легко показать, что $\mathscr{P}_Q$ — идеал структуры $\mathscr{L}$. Если $J_1$, $J_2 \notin \mathscr{P}_Q$, то существуют такие $a \in J_1$, $b \in J_2$, что $a, b \notin Q$. Очевидно, что $a \cap b \notin Q$. Так как $a \cap b \in J_1 \cap J_2$, то $J_1 \cap J_2 \notin \mathscr{P}_Q$. Итак $\mathscr{P}_Q$ — простой идеал.

**Лемма 12.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с псевдодополнениями и $\mathscr{P}$ минимальный простой идеал структуры $\mathscr{L}$. Тогда $Q_{\mathscr{P}}$ — минимальный простой идеал структуры $L$.*

Доказательство. Будем предполагать, что $L$ имеет по крайней мере два элемента. Для одноэлементной структуры наще утверждение



верно. Из леммы 11 вытекает, что $Q_{\mathscr{P}}$ простой идеал $L$ и $L - Q_{\mathscr{P}}$ дуальный идеал $L$. Из леммы 2 следует, что существует минимальный простой идеал $M_{\mathscr{P}} \subset Q_{\mathscr{P}}$. Тогда $L - M_{\mathscr{P}}$ — дуальный максимальный идеал $L$. Пусть $M_{\mathscr{P}} \neq Q_{\mathscr{P}}$. Из этого вытекает, что существует $a \in Q_{\mathscr{P}}$ и $a \notin M_{\mathscr{P}}$. Очевидно, что $(a] \in \mathscr{P}$. Так как $\mathscr{P}$ — минимальный простой идеал $\mathscr{L}$, то $\mathscr{L} - \mathscr{P}$ — максимальный дуальный идеал $\mathscr{L}$. Следовательно, существует $J \in \mathscr{L} - \mathscr{P}$ такой, что $J \cap (a] = (0]$. Из этого вытекает, что $J \subset (a^*]$. Очевидно, что $(a^*] \in \mathscr{L} - \mathscr{P}$. Следовательно, $a^* \in L - Q_{\mathscr{P}}$. Из этого уже вытекает, что элементы $a$, $a^*$, $a \cap a^* = 0 \in L - M_{\mathscr{P}}$. Но это противоречит предположению, что $L - M_{\mathscr{P}}$ — максимальный дуальный идеал $L$.

**Теорема 5.** *Пусть $L$ — структура с наибольшим элементом $I$. $\mathscr{L}$ является структурой Стоуна тогда и только тогда, когда*

а) *$L$ — структура Стоуна,*

б) *различным минимальным простым идеалам $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ структуры $\mathscr{L}$ соответствуют различные идеалы $Q_{\mathscr{P}}$ и $Q_{\mathscr{P}'}$ структуры $L$.*

Доказательство. Необходимость. Условие а) следует из леммы 10. Пусть $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ — различные минимальные простые идеалы $\mathscr{L}$. Легко показать, что $\mathscr{P} \neq \mathscr{L} \neq \mathscr{P}'$. Из леммы 12 следует, что $Q_{\mathscr{P}}$ и $Q_{\mathscr{P}}'$ являются минималными простыми идеалами $L$. Так как $I \notin Q_{\mathscr{P}}$, $I \notin Q_{\mathscr{P}'}$, то $Q_{\mathscr{P}} \neq \neq L \neq Q_{\mathscr{P}'}$. Из теоремы (ГШ) следует, что $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}' = \mathscr{L}$. Из последнего видно, что существуют $J \in \mathscr{P}$ и $J' \in \mathscr{P}'$ такие, что $J \cup J' = (I]$. Наконец, существуют $a \in J$ и $b \in J'$ такие, что $a \cup b = I$. Очевидно, что $J \subset Q_{\mathscr{P}}$ и $J' \subset Q_{\mathscr{P}'}$. Из этого вытекает, что $Q_{\mathscr{P}} \cup Q_{\mathscr{P}'} = L$. Если бы $Q_{\mathscr{P}} = Q_{\mathscr{P}'}$, то $Q_{\mathscr{P}} = L = Q_{\mathscr{P}'}$ а это противоречит тому факту, что $Q_{\mathscr{P}} \neq L \neq Q_{\mathscr{P}'}$. Итак $Q_{\mathscr{P}} \neq Q_{\mathscr{P}'}$.

Достаточность. Пусть $L$ — структура Стоуна, для которой справедливо условие б). Из леммы 12 и теоремы (ГШ) следует, что $Q_{\mathscr{P}} \cup Q_{\mathscr{P}'} = L$. Существуют элементы $a \in Q_{\mathscr{P}}$ и $b \in Q_{\mathscr{P}'}$ такие, что $a \cup b = I$. Следовательно, существуют идеалы $J \in \mathscr{P}$ и $J' \in \mathscr{P}'$ такие, что $a \in J$ и $b \in J'$. Очевидно, что $J \cup J' = (I]$ и $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}' = \mathscr{L}$. Известно, что $\mathscr{L}$ — структура с псевдодополнениями. Из теоремы (ГШ) следует, что $\mathscr{L}$ — структура Стоуна.

Теперь будут приведены другие эквивалентные условия с условиями теоремы 5. Прежде всего некоторые вспомогательные утверждения.

**Лемма 13.** (Гливенко). *В любой дистрибутивной структуре с псевдодополнениями $L$ соответстие $a \to a^{**}$ представляет собой операцию замыкания в $L$ и структурный гомоморфизм $L$ на булеву алгебру замкнутых элементов. Кроме того, $a^{**} = b^{**}$ тогда и только тогда, когда $a \cap d = b \cap d$ для некоторого плотного $d$, удовлетворящему условию $d^{**} = I$.*

*Если $L$ — полная структура, то булева алгебра замкнутых элементов тоже полная структура.* [5]

Доказательство смотри [4, страница 211].

**Лемма 14.** *В дистрибутивной структуре $L$ с псевдодополнениями следующие условия эквиваленты:*

*(I)* $a^* \cup a^{**} = I$ *для всех* $a \in L$;

*(II)* $a^* \cup b^* = (a \cap b)^*$ *для всех* $a, b \in L$;

*(III) булева алгебра замкнутых элементов является подструктурой структуры $L$.*

Доказательство находится в [3, теорема 3].

**Лемма 15.** *Пусть $L$ — структура Стоуна. $\mathscr{L}$ является струкшурой Стоуна тогда и только тогда, когда для всякого $J \in \mathscr{L}$, $J^*$ будет главным идеалом.*

Доказательство. Необходимость. Из предположения следует, что $J^{**} \cup J^* = (I]$; $J^{**} \cap J^* = (0]$. Из леммы 2 вытекает, что $J^*$ — главный идеал.

Достаточность. Пусть $J^* = (a]$. Очевидно, что $J^{**} = (a^*]$. Известно что $J^{***} = J^*$. Из этого вытекает, что $J^{***} = (a^{**}] = (a]$. Итак $a = a^{**}$. Следовательно, что $J^* \cup J^{**} = (I]$.

**Теорема 6.** *Пусть $L$ — структура с наибольшим элементом $I$. $\mathscr{L}$ является структурой Стоуна тогда и только тогда, когда*

(1) *$L$ — структура Стоуна,*

(2) *булева алгебра $B$ всех замкнутых элементов является полной структурой* $(B = \{x \in L;\ x = x^{**}\})$,

(3) *если $T$ — множество индексов и $t \to a_t$ отображение $T$ в $B$, то* $\wedge_B(a_t;\ t \in T) = \wedge_L(a_t;\ t \in T)$ [6] [7].

Прежде всего вспомогательное утверждение.

**Лемма 16.** *Если $L$ — полная структура Стоуна, то условия (1)—(3) из теоремы 6 верны для $L$.*

Доказательство. Условие (1) для $L$ справедливо. Условие (2) вытекает из леммы 13. Условие (3) докажем при помощи известного утверждения (смотри [4, стр. 83, упр. 5]): Пусть $a \to \bar{a}$ операция замыкания в структуре $S$. Пусть $A$ — множество индексов, $\alpha \to b_\alpha$ отображение $A$ в $S$. Цусть для всякого $\alpha \in A$, $\bar{b}_\alpha = b_\alpha$. Если $b = \wedge_S(b_\alpha;\ \alpha \in A)$, то $\bar{b} = b$. Из леммы

[5] О. Фринк [3, стр. 511] заметил, что формулировка этой теоремы в [4] неточна. Булева алгебра замкнутых элементов полна тогда, когда структура тоже полна.

[6] $\wedge_B$ обозначает операцию $\wedge$ относительно подструктуры $B$.

[7] В [5] будет показано, что (3) следует из (1) и (2).



13 следует, что $\alpha \to \alpha^{**}$ является операцией замыкания на $L$. Из предположения вытекает, что $a = \wedge_L(a_t;\ t \in T)$, для $a_t \in B$. Так как $a_t^{**} = a_t$, то $a^{**} = a$. Итак, $a \in B$. Следовательно, что $a = \wedge_B(a_t;\ t \in T)$.

Доказательство теоремы 6. Необходимость. Из леммы 10 вытекает условие (1). Теперь покажем, что изоморфное отображение $x \to (x]$ $L$ в $\mathscr{L}$ отображает множество $B$ на множество $\mathscr{B}$ всех замкнутых элементов структуры $\mathscr{L}$. Если $x \in B$, то $x = x^{**}$ и очевидно $(x]^* = (x^*]$, $(x]^{**} = (x^{**}]$, $(x] = (x]^{**}$. Итак, $(x] \in \mathscr{B}$. Если $J \in \mathscr{B}$, то $J = J^{**}$ и из леммы 15 следует, что $J^* = (a]$. Тогда $J^{**} = (a^*]$. Очевидно $J \cup J^* = (I]$ и $J \cap J^* = (0]$. Из последнего следует, что $a \cup a^* = I$, $a \cap a^* = 0$. Итак, $a, a^* \in B$. Очевидно, что $\mathscr{B} \subset L'$ и $L'$ обозначает множество всех главных идеалов структуры $L$. Известно, что структура $\mathscr{L}$ всех идеалов структуры $L$ является польной структурой. Из леммы 16 следует, что условия (2) и (3) верны для булевой алгебры $\mathscr{B}$ из $\mathscr{L}$. Из изоморфизма $B$ с $\mathscr{B}$ следует, что условие (2) справедливо для $B$. Если $t \to (a_t]$ отображение $T$ в $B$, то $\wedge_{\mathscr{B}}((a_t];\ t \in T) = \wedge_{\mathscr{L}}((a_t];\ t \in T) = \wedge_{L'}((a_t];\ t \in T)$. Из изоморфизма $L$ с $L'$ вытекает верность условия (3) для $L$.

Достаточность. Докажем, что для всякого $J \in \mathscr{L}$, $J^*$ будет главным идеалом. Пусть $b = \wedge_B(a^*;\ a \in J)$. Из (2) и (3) следует, что $b \in B$. Легко доказать, что $J^* = \{z \in L;\ z \leqslant x^* \text{ для всех } x \in J\}$. Из последнего видно, что $J^* = (b]$. Теперь уже из леммы 15 следует, что $\mathscr{L}$ — структура Стоуна.

**Следствие 1.** *Пусть $L$ — булева алгебра. $\mathscr{L}$ — структура Стоуна тогда и только тогда, если $L$ полна.*

Доказательство вытекает из теоремы 6. Это утверждение тоже является следствием одной теоремы из [3, теорема 4].

**Следствие 2.** *Если $L$ — полная структура Стоуна, то $\mathscr{L}$ будет структурой Стоуна.*

Доказательство вытекает из леммы 16 и теоремы 6.

Примечание 5. Из того, что $L$ и $\mathscr{L}$ — структуры Стоуна, не вытекает еще полнота структуры $L$. Это показывает следующий пример. Пусть $L'$ — неполная дистрибутивная структура с наибольшим и наименьшим элементами. Теперь прибавим структуре $L'$ новый элемент $0$ и на множестве $L = L' \cup \{0\}$ построим структуру следующим образом: Элемент $0$ будет меньше всех элементов из $L'$ и отношение $\geqslant$ сохраняет свое значение внутри $L'$. Легко показать, что $L$ не будет полной структурой Стоуна. Множество $B$ всех замкнутых элементов состоит из вдух элементов, из наибольшего и наименьшего. $L$ выполняет (1)—(3) из теоремы 6. Итак, $L$ структура Стоуна.

Если обозначим $\mathscr{L}_0 = L$, $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}, \ldots$ и так далее, для всякого натурального $n$, то $\mathscr{L}_{n+1}$ обозначает структуру всех идеалов структуры $\mathscr{L}_n$. На основании следствия 2 и теоремы 6 получим

**Следствие 3.** *Пусть $L$ выполняет условия* (1)—(3) *из теоремы* 6. *Тогда для каждого натурального $n$ $L_n$ будет структурой Стоуна.*

Пусть теперь $L$ — обобщенная структура Стоуна. Для $x \in L$ $B_x$ будет обозначать множество всех замкнутых элементов подструктуры Стоуна $[0, x]$. Пусть $B$ обозначает множество всех таких элементов $y \in L$, что $y \in B_x$ для всех $x \geqslant y$ $(x \in L)$. Покажем, что $B$ — подструктура $L$ с относительными дополнениями. Очевидно, что $0 \in B$. Пусть $a, b \in B$. Легко показать, что $a \cup b \in B$. Пусть $x \geqslant a \cap b$. Тогда для каждого $z \in L$, где $z \geqslant x \cup a \cup b$, $[0, z]$ является структурой Стоуна и $a \cap b \in B_z$. Если для $y \in [0, z]$ $y^*$ значит псевдодополнение элемента $y$ относительно $[0, z]$, то $(a \cap b)^{**} = a \cap b$. Из доказательства леммы 6 следует, что $(a \cap b)^* \cap \cap x$, $a \cap b = (a \cap b) \cap x = (a \cap b)^{**} \cap x$ будут псевдодополнения элементов $a \cap b$, $(a \cap b)^* \cap x$ относительно $[0, x]$. Итак, $a \cap b \in B$. Если $a, b, c \in B$ и $a \leqslant c \leqslant b$, то для всякого $x \geqslant b$ $(x \in L)$, существует $d \in B_x$ такой, что $c \cap d = a$, $c \cup d = b$. Из дистрибутивности $L$ следует, что элемент $d$ однозначно определен и принадлежит $B$. Из последнего вытекает

**Лемма 17.** *Если $\mathscr{L}$ — структура Стоуна, то*

(а) *$L$ — обобщенная структура Стоуна,*

(б) *$B$ является — относительно операции $\cap$ — полной подструктурой $L$ с относительными дополнениями и $0 \in B$,*

(в) *если $T$ — множество индексов и $t \to a_t$ отображение $T$ в $B$, то $\bigwedge_B (a_t;\ t \in T) = \bigwedge_L (a_t;\ t \in T)$.*

Доказательство. (а) вытекает из леммы 10. Мы уже доказали, что $B$ — подструктура с относительными дополнениями и $0 \in B$. Очевидно что для $t_0 \in T$ $\bigwedge (a_t;\ t \in T) = \bigwedge (a_t; a_t \leqslant a_{t_0},\ t \in T)$. Из предположения и леммы 6 следует, что $[(0], (a_{t_0}]]$ структура Стоуна. Итак, из теоремы 6 вытекает, что $[0, a_{t_0}]$ — структура Стоуна и $\bigwedge_B (a_t;\ a_t \leqslant a_{t_0},\ t \in T) = \bigwedge_L (a_t;\ a_t \leqslant a_{t_0},\ t \in T)$.

**Лемма 18.** *В дистрибутивной структуре с псевдодополнениями для всяких двух элементов $a$, $x$ справедливо: $(x \cap a)^* \cap a = x^* \cap a$.*

Доказательство. Пусть $L$ — дистрибутивная структура с псевдодополнениями. Из леммы 13 следует, что множество всех замкнутых элементов структуры $L$ образует булеву алгебру относительно операций $\vee$, $\cap$, где $x \vee y = (x \cup y)^{**}$ (смотри [4, стр. 210, 211]). Пусть $a, x \in L$. Очевидно, что $[(x \cap a)^* \cap a]^{**} \geqslant (x \cap a)^* \cap a$ и $(x \cap a)^* = x^* \vee a^*$. $[(x \cap a)^* \cap a]^{**} = [(x^* \vee a^*)^* \vee a^*]^* = [(x^{**} \cap a^{**}) \vee a^*]^* =$



$= [(x^{**} \vee a^*) \cap (a^{**} \vee a^*)]^* = [(x^{**} \vee a^*) \cap I]^* = (x^{**} \vee a^*)^* = x^* \cap a^{**}$. Из последнего следует, что $[(x \cap a)^* \cap a]^{**} \cap a = x^* \cap a \geqslant (x \cap a)^* \cap a$. Легко показать, что имеет место и $(x \cap a)^* \cap a \geqslant x^* \cap a$. Итак, $(x \cap a)^* \cap a = x^* \cap a$.

**Лемма 19.** *Пусть структура $L$ выполняет условия* (а)—(в) *из леммы 17. Если $\bigvee_L ((a];\ a \in B) = L$, то $\mathscr{L}$ структура Стоуна.*

Доказательство. Пусть $J \in \mathscr{L}$. Докажем, что $J^* \cup J^{**} = L$. Если $a \in B$, то из теоремы 6 вытекает, что структура $[(0], (a]]$ всех идеалов структуры $[0, a]$ будет структурой Стоуна. Очевидно, что $[(0], (a]] \subset \mathscr{L}$. Из лемм 6 и 18 следует, что $J^* \cap (a]$, $J^{**} \cap (a]$ псевдодополнения идеалов $J \cap (a]$, $J^* \cap (a]$ относительно $[(0], (a]]$. Итак, из леммы 17 получим $(J^* \cap (a]) \cup \cup (J^{**} \cap (a]) = (a]$. Известно, что $\mathscr{L}$ — полная структура с относительными псевдодополнениями. Из [4, теорема 15, стр. 210] вытекает, что $L = \bigvee ((a];\ a \in B) = \bigvee (J^* \cap (a];\ a \in B) \cup \bigvee (J^{**} \cap (a];\ a \in B) = (J^* \cap \bigvee ((a]; a \in B) \cup (J^{**} \cap \bigvee ((a]; a \in B) = J^* \cup J^{**}$.

**Теорема 7.** *$\mathscr{L}$ будет структурой Стоуна тогда и только тогда, когда $L$ — обобщенная структура Стоуна и для всякого $x \in L$ подструктуры $B_x$ ($B_x$ обозначает множество всех замкнутых элементов подструктуры $[0, x]$) выполняют условия* (2), (3) *из теоремы.6.*

Доказательство. Необходимое условие вытекает из лемм 6, 10 и теоремы 6. Достаточное условие вытекает из теоремы 6 и из того факта, что для всякого $x \in L$, $[(0), (x)]$ — подструктура Стоуна структуры $\mathscr{L}$. Пусть $J \in \mathscr{L}$. Из лемм 6 и 18 следует, что $(J^* \cap (x]) \cup (J^{**} \cap (x]) = (x]$. Из [4, теорема 15, стр. 210] вытекает, что $L \subset \bigvee ((x];\ x \in L) = (J^* \cap \bigvee ((x];\ x \in L) \cup (J^{**} \cap \bigvee ((x];\ x \in L) = J^* \cup J^{**}$.

Из теоремы 7 вытекает

**Следствие.** *Пусть $L$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $0$ и с относительными дополнениями. $\mathscr{L}$ будет структурой Стоуна тогда и только тогда, когда $L$ — полная структура относительно операции $\cap$.*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Grätzer G., Schmidt E. T., *On a problem of M. H. Stone*, Acta math. Acad. Scient. hung. *8* (1957), 455—460.

[2] Grätzer G., Schmidt E. T., *On ideal theory for lattices*, Acta Scient. math. *19* (1958), 82—92.

[3] Frink O., *Pseudo-complements in semi-lattices*, Duke Math. J. *29* (1962), 505—514.

[4] Birkhoff G., *Lattice theory*, New York 1948 (Теория структур, Москва 1952).

[5] Катриняк Т., *Полуструктуры с псевдодополнениями*, Mat.-fyz. časop. (подготовляется к печати).

Поступило 23. 1. 1965.

*Katedra algebry a teórie čísel*
*Prírodovedeckej fakulty*
*Univerzity Komenského,*
*Bratislava*