MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV. 16, 1, 1966

К ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ МЕР II

ИГОРЬ КЛУВАНЕК (IGOR KLUVÁNEK), Кошице

Не давно были опубликованы (см. [1, 2]) некоторые теоремы о возможности расширения меры со значениями в линейном локально выпуклом пространстве X из кольца множеств на порожденное им δ-кольцо. Значения такого расширения берутся иногда из пространства X^{**} (второе сопряженное пространство к пространству X) и это расширение является σ-аддитивным только в слабой* топологии пространства X^{**} (порожденной пространством X^*). В этой статье мы обратим внимание на некоторые условия для того, чтобы значения расширенной меры принадлежали пространству X и, в следствии того, чтобы эта мера была σ-аддитивной в исходной топологии пространства X.

Используем понятия и обозначения общей теории меры из [3]. В теории векторной меры продолжаем пользоваться обозначениями из [4].

Пусть X — линейное топологическое локально выпуклое пространство и X^* (топологическое) сопряженное пространство к X, т. е. пространство непрерывных линейных форм на X.

Напомним, что функция μ на кольце $\mathbf{R}$ множеств со значениями в X называется (сильной) векторной мерой (на $\mathbf{R}$ со значениями в X), если она σ-аддитивна относительно сходимости в X. Функция μ, определенная на кольце $\mathbf{R}$, со значениями в X называется слабой мерой, если для всякого $x^* \in X^*$, функция $x^* \circ \mu$ (т. е. $x^* \circ \mu(E) = x^*(\mu(E))$ для всех $E \in \mathbf{R}$) σ-аддитивна.

Пусть теперь $\mathbf{R}$ — некоторое кольцо множеств и пусть $\mathbf{T}$ — порожденное им δ-кольцо (кольцо замкнутое относительно счетных пересечений) и $\mathbf{S}$ — порожденное им σ-кольцо.

Пусть μ — слабая мера на $\mathbf{R}$ со значениями в X.

Теорема. A. *Любое из следующих условий* (i), (ii), (iii) — *необходимо и достаточно для существования векторной меры* $\bar{\mu}$ *на* $\mathbf{T}$ *со значениями из* X, *для которой* $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ *для* $E \in \mathbf{R}$.

(i) *Если* $\{E_n\}$ — *невозрастающая последовательность множеств из* $\mathbf{R}$, *то последовательность* $\{\mu(E_n)\}$ *слабо сходится к некоторому элементу пространства* X.

(ii) *Если* $\{E_n\}$ — *неубывающая последовательность множеств из* $\mathbf{R}$ *и если имеется* $F \in \mathbf{R}$ *такое, что* $E_n \subset F$, $n = 1, 2, \ldots$, *то последовательность* $\{\mu(E_n)\}$ *слабо сходится в* X.

(iii) *Если* $\{E_n\}$ — *последовательность непересекающихся множеств из* $\mathbf{R}$, *для которой имеется* $F \in \mathbf{R}$ *такое, что* $E_n \subset F$ *для* $n = 1, 2, \ldots$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ *слабо сходится в* X.

B. *Каждое из следующих условий* (iv), (v) — *необходимо и достаточно для того, чтобы на* $\mathbf{S}$ *существовала векторная мера* $\bar{\mu}$ *со значениями из* X *такая, что* $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ *для* $E \in \mathbf{R}$.

(iv) *Для всякой неубывающей последовательности* $\{E_n\}$ *множеств из* $\mathbf{R}$, *последовательность* $\{\mu(E_n)\}$ *слабо сходится в* X.

(v) *Для всякой последовательности* $\{E_n\}$ *непересекающихся множеств из* $\mathbf{R}$, *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ *слабо сходится в* X.

Не трудно убедиться в том, что приведенные условия (i), (ii), (iii) равносильны и что условия (iv) и (v) тоже равносильны.

Обозначим через $\mathbf{R}_\sigma$, $\mathbf{R}'_\sigma$, $\mathbf{R}_\delta$ систему всех множеств E выражаемых в форме $E = \lim_n E_n$, где $\{E_n\}$ некоторая последовательность множеств из $\mathbf{R}$, которая не убывает, или не убывает и имеется $F \in R$ такое, что $E_n \subset F$, или не возрастает соответственно.

Обратим внимание на то, что условие (i) является необходимым для существования векторной меры $\bar{\mu}$. Точнее говоря, оно необходимо даже для того, чтобы на $\mathbf{R}_\delta$ существовала функция, которая представляла бы расширение μ и, одновременно, частичную функцию некоторой векторной меры $\bar{\mu}$ на $\mathbf{T}$. Аналогичная ситуация имеет место для условий (ii) и (iii) относительно системы $\mathbf{R}'_\sigma$ и для условий (iv) и (v) относительно $\mathbf{R}_\sigma$.

Теорема утверждает, что если нам удастся расширить слабую меру μ на систему $\mathbf{R}_\delta$ или $\mathbf{R}'_\sigma$, то уже можем расширить ее на целое δ-кольцо $\mathbf{T}$. Аналогично, если возможно расширить μ на $\mathbf{R}_\sigma$, то возможно ее расширить на целое $\mathbf{S}$. Эти расширения будут тогда не только слабыми, но тоже сильными векторными мерами.

Лемма 1. *В условиях* (i), (ii), (iii), (iv), (v) *можно заменить слабую сходимость сходимостью относительно исходной топологии пространства* X *и если любое из них выполнено, то* μ *является сильной векторной мерой.*

Доказательство. На основании равносильности условий (i), (ii), (iii) и условий (iv), (v) можем считать, что имеет место (iii), или (v). Очевидно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, где $\{E_n\}$ последовательность множеств из условия (iii) или (v), слабо совершенно сходится (по подпоследовательностям). -В силу леммы Орлича-Петтиса для локально выпуклых пространств (см. [4]. Теорема 1.1 ([1])) этот ряд сходится в исходной топологии пространства X. Из этого очевидно вытекают все утверждения леммы.

Лемма 2. *Если X — пространство Банаха, то теорема справедлива.*

Доказательство. А. Необходимость условий мы уже установили. Теперь докажем, что условия (i), (ii), (iii) достаточны для существования векторной меры $\bar{\mu}$ на $\mathbf{T}$ созначениями в X, совпадающей с μ на $\mathbf{R}$. На основании леммы 1 будем пользоваться этими условиями в усиленной форме, а именно, в этих условиях будем предполагать сходимость относительно нормы пространства X.

I. Имеем $\sup\{\|\mu(G)\| : G \subset E, G \in \mathbf{R}\} < \infty$ для всех $E \in \mathbf{R}$.

Предположим, что это не верно. Пусть E_1 — такое множество, что $\sup\{\|\mu(G)\| : G \subset E_1, G \in \mathbf{R}\} = \infty$. Предположим, что уже построено множество E_n, $n = 2, 3, \ldots$, для которого $\|\mu(E_n)\| \geqq n$ и $\sup\{\|\mu(G)\| : G \subset E_n, G \in \mathbf{R}\} = \infty$. Потом существует $F \subset E_n$ такое, что $\|\mu(F)\| \geqq n + 1 + \|\mu(E_n)\|$. Обозначим E_{n+1} то из множеств F, $E_n - F$, для которого $\sup\{\|\mu(G)\| : G \subset E_{n+1}, G \in \mathbf{R}\} = \infty$. Вследствие неравенства $\|\mu(E_n - F)\| \geqq \|\mu(F)\| - \|\mu(E_n)\|$ имеем $\|\mu(E_{n+1})\| \geqq n + 1$. По индукции построена невозрастающая последовательность $\{E_n\}$ множеств из $\mathbf{R}$ такая, что $\|\mu(E_n)\| \geqq n$ для $n = 2, 3, \ldots$ Так как не существует предел $\lim_n \mu(E_n)$, условие (i) не имеет место.

II. По I, числовая мера $x^*{\circ}\mu$ имеет для всех $x^* \in X^*$ конечную вариацию на $\mathbf{R}$. По известным теоремам теории меры можно ее однозначно расширить на все δ-кольцо $\mathbf{T}$, даже на некоторое δ-кольцо более широкое чем $\mathbf{T}$, на котором она станет полной обобщенной мерой (ее область определения содержит подмножества всякого множества вариации нуль). Обозначим это расширение через $\overline{x^*{\circ}\mu}$ и значение вариации меры $\overline{x^*{\circ}\mu}$ на множестве E через $v(\overline{x^*{\circ}\mu}, E)$.

Положим $\lambda(E) = \sup v(\overline{x^*{\circ}\mu}, E)$ для $E \in \mathbf{T}$, где верхняя грань берется для всех $x^* \in X^*$, для которых $\|x^*\| \leqq 1$.

Имеем $\|\mu(E)\| \leqq \lambda(E) \leqq 4 \sup\{\|\mu(G)\| : G \subset E, E \in \mathbf{R}\}$ для $E \in \mathbf{R}$.

Далее, если $E_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \mathbf{T}$, $n = 0, 1, \ldots$, то $\lambda(E_0) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$.

Если $\{E_n\}$ невозрастающая последовательность множеств из $\mathbf{R}$ и $\lim_n E_n = \emptyset$, то $\lim_n \lambda(E_n) = 0$.

Докажем последнее утверждение. Множества $F_n = E_n - E_{n+1}$ не пересекаются и $E_n = \sum_{i=n}^{\infty} F_i$. В силу условия (iii), ряд $\sum_{i=n}^{\infty} \mu(G_i)$ сходится для любых множеств $G_i \subset F_i$, $G_i \in \mathbf{R}$. Из этого вытекает (см. напр. [5], Лемма 1.1), что $\sup\{\|\sum_{i=n}^{\infty} \mu(G_i)\| : G_i \subset F_i, G_i \in \mathbf{R}\} \to 0$ для $n \to \infty$. Но не трудно установить, что $\{\mu(G) : G \subset E_n, G \in \mathbf{R}\} = \{\sum_{i=n}^{\infty} \mu(G_i) : G_i \subset F_i, G_i \in \mathbf{R}, i = n, n+1, \ldots\}$ а тогда $\lambda(E_n) \leqq 4 \sup\{\|\mu(G)\| : G \subset E_n, G \in \mathbf{R}\} \to 0$.

III. Пусть $\{E_n\}$ — монотонная последовательность множеств из $\mathbf{R}$, пусть имеется $F \in \mathbf{R}$ такое, что $E_n \subset F$ для $n = 1, 2, \ldots$ и пусть $E = \lim_n E_n$. Положим $\mu_1(E) = \lim_n \mu(E_n)$. По (i), соотв. (ii) $\mu_1(E)$ определено для всех $E \in \mathbf{R}'_\sigma \cup \mathbf{R}_\delta$. Значение $\mu_1(E)$ зависит только от множества E а не от последовательности $\{E_n\}$ потому, что $x^*(\mu_1(E)) = \lim_n x^*(\mu(E_n)) = \overline{x^*{\circ}\mu}(E)$ и $\overline{x^*{\circ}\mu}(E)$ определено множеством E однозначно.

Легко видеть, что $\|\mu_1(E)\| \leqq \lambda(E) \leqq 4 \sup\{\|\mu_1(G)\| : G \subset E, G \in \mathbf{R}'_\sigma\} = 4 \sup\{\|\mu(G)\| : G \subset E, G \in \mathbf{R}\}$ для $E \in \mathbf{R}'_\sigma$.

IV. Если $E \in \mathbf{R}'_\sigma$ и $E = \lim_n E_n$ для некоторой неубывающей последовательности $\{E_n\}$ множеств из $\mathbf{R}$, то для $\|x^*\| \leqq 1$ имеем $v(\overline{x^*{\circ}\mu}, E) = \sup_n v(\overline{x^*{\circ}\mu}, E_n) \leqq \sup_n \sup_{\|x^*\| \leqq 1} v(\overline{x^*{\circ}\mu}, E_n) = \sup_n \lambda(E_n)$, откуда $\lambda(E) \leqq \sup_n \lambda(E_n)$. Обратное неравенство очевидно. Тем самым мы имеем $\lambda(E) = \lim_n \lambda(E_n) = \sup_n \lambda(E_n)$.

Из сказанного следует, что для $E \in \mathbf{R}'_\sigma$ и для $\varepsilon > 0$ существует $F \in \mathbf{R}$ такое, что $F \subset E$ и $\lambda(E - F) < \varepsilon$ и, вследствие этого, тоже $|\lambda(E) - \lambda(F)| < \varepsilon$ и $\|\mu_1(E) - \mu(F)\| < \varepsilon$.

V. Если $\{E_n\}$ — невозрастающая последовательность множеств из $\mathbf{R}'_\sigma$ и если $\lim_n E_n = \emptyset$, то $\lim_n \lambda(E_n) = 0$.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и для каждого n найдем $F_n \in \mathbf{R}$ так, чтобы $F_n \subset E_n$ и $\lambda(E_n - F_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Положим $G_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. Множества G_n принадлежат $\mathbf{R}$, образуют невозрастающую последовательность и $\lim_n G_n = \emptyset$. По II $\lim_n \lambda(G_n) = 0$. Далее $|\lambda(E_n) - \lambda(G_n)| \leqq \lambda(E_n - G_n) \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i - F_i) < \varepsilon$. Следует, $\lim \sup_n \lambda(E_n) \leqq \varepsilon$. Из-за произвольности $\varepsilon > 0$, имеем $\lim_n \lambda(E_n) = 0$.

VI. Если $\{E_n\}$ — невозрастающая последовательность множеств из $\mathbf{R}'_\sigma$ и $\lim_n E_n \subset E \in \mathbf{R}'_\sigma$, то $\lim_n \lambda(E_n) \leqq \lambda(E)$.

Действительно, имеем $E = \lim_n F_n$ для некоторой неубывающей последовательности $\{F_n\}$ множеств из $\mathbf{R}$. Положим $G_n = E_n - F_n$. Очевидно, $\{G_n\}$ — невозрастающая последовательность множеств из $\mathbf{R}'_\sigma$ и $\lim_n G_n = \emptyset$. По V $\lim_n \lambda(G_n) = 0$. Так как $E_n \cup G_n \subset F_n$, или $\lambda(E_n) \leqq \lambda(G_n) + \lambda(F_n)$, по IV заключаем, что $\lambda(E) = \lim_n \lambda(F_n) \geqq \lim_n \lambda(E_n)$.

VII. Определим $\mathbf{T}_1$ как систему всех множеств E таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $A \in \mathbf{R}_\delta$ и $B \in \mathbf{R}'_\sigma$ такие, что $A \subset E \subset B$ и $\lambda(B - A) < \varepsilon$.

Очевидно, $\mathbf{R} \subset \mathbf{T}_1$. Не трудно также доказать, что $\mathbf{T}_1$ — кольцо. Докажем, что $\mathbf{T}_1$ — δ-кольцо.

Пусть $\{E_n\}$ — неубывающая последовательность множеств из $\mathbf{T}_1$ и пусть

([1]) Лемма Орлича-Петтиса для локально выпуклых пространств равносильна теореме 1 из [1]. Эта теорема доказана другим путем, чем теорема 1.1 из [4] и, по-видимому, независимо от статьи [4].

$F \in \mathbf{R}$ множество такое, что $E_n \subset F$ для $n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ принадлежит $\mathbf{T}_1$. Выберем $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть $A_n \in \mathbf{R}_\delta$ и $B_n' \in \mathbf{R}_\sigma'$, $A_n \subset E_n \subset B_n'$ и $\lambda(B_n' - A_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Если $B_n = F \cap B_n'$, то также будет $B_n \in \mathbf{R}_\sigma'$, $E_n \subset B_n$ и $\lambda(B_n - A_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Если $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то $B \in \mathbf{R}_\sigma'$. Далее, имеем $B_n - A_n \in \mathbf{R}_\sigma'$ и $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n - A_n) \in \mathbf{R}_\sigma'$ и $\lambda(D) < \varepsilon$. Если обозначим $C_n = B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то будет $C_n \in \mathbf{R}_\sigma'$ и $\lim_n C_n \subset D$. По VI имеем $\lim_n \lambda(C_n) \leqq \lambda(D) < \varepsilon$. Найдется m такое, что $\lambda(C_m) < \varepsilon$. Положим $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Будет $A \in \mathbf{R}_\delta$, $A \subset E \subset B$ и $\lambda(B - A) < \varepsilon$. Значит, $E \in \mathbf{T}_1$.

Из доказанного вытекает, что $\mathbf{T}_1$ — δ-кольцо содержащее $\mathbf{R}$. Следовательно, $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_1$.

VIII. Для $E \in \mathbf{T}_1$ построим множества $A_n \in \mathbf{R}_\delta$ и $B_n \in \mathbf{R}_\sigma'$ так, чтобы $A_n \subset E \subset B_n$ и $\lambda(B_n - A_n) < n^{-1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ Из полноты пространства X вытекает, что существует точно один элемент $\bar{\mu}(E) \in X$, принадлежащий замыканиям всех множеств $\{\mu_1(G) : A_n \subset G \subset B_n,\ G \in \mathbf{R}_\sigma'\}$.

Но по определению $\bar{\mu}(E)$ и по известным свойствам числовых мер, мы имеем $x^*(\bar{\mu}(E)) = \overline{x^* \circ \mu}(E)$ для всех $x^* \in X^*$. Это одновременно показывает, что $\bar{\mu}(E)$ однозначно определяется множеством E (не зависит от частичного выбора множеств A_n, B_n) и что $\bar{\mu}$ слабая мера на $\mathbf{T}_1$. Так как $\mathbf{T}_1$ — δ-кольцо, из леммы Орлича-Петтиса вытекает, что она, в самом деле, является сильной векторной мерой.

Тем самым доказана часть A теоремы в случае, когда X — пространство Банаха.

B. Эта часть леммы доказывается почти буквально как часть A, только в пунктах III и VII не приходится говорить о множестве $F \in \mathbf{R}$ из-за более простой формулировки условий (iv) и (v) в сравнении с условиями (ii) и (iii).

Тем доказательство леммы завершено.

Систему множеств $\mathbf{M}$ называем $\mathbf{R}$-монотонной, если она содержит предел каждой монотонной последовательности $\{E_n\}$ множеств из $\mathbf{M}$, к которой существует $F \in \mathbf{R}$ такое, что $E_n \subset F$ для $n = 1, 2, \ldots$

Подобным образом как теорема 2, § 6 из [3] доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Если $\mathbf{R}$ — кольцо, $\mathbf{T}$ — порожденное им δ-кольцо и $\mathbf{M}$ — минимальная $\mathbf{R}$-монотонная система, содержащая $\mathbf{R}$, то $\mathbf{T} = \mathbf{M}$.*

Доказательство теоремы можно теперь провести точно так же, как доказательство теоремы 4.2 из [4]. Но в этом доказательстве вместо теоремы 4.1 из [4] используем лемму 2 и, в части A, вместо теоремы 2, § 6 из [3] применим лемму 3.

Из приведенной теоремы легко вывести следующие следствия.

Следствие 1. *Если для каждого $E \in \mathbf{R}$, множество $\{\mu(G) : G \subset E,\ G \in \mathbf{R}\}$ относимельно слабо секвенциально компактно в X, то слабую меру μ всегда можно расширить на некторную меру определенную на δ-кольце со значениями принадлежащими X.*

Следствие 2. *Если множество $\{\mu(E) : E \in \mathbf{R}\}$ относительно слабо секвенциально компактно в X, то μ можно расширить на векторную меру определенную на σ-кольце во значениями в X.*

Следствие 3. *Если для всех $x^* \in X^*$ числовая мера $x^* \circ \mu$ имеет конечную вариацию и X — пространство слабо секвенциально полно, то слабую меру μ можно расширить на δ-кольцо и значения этого расширения будут принадлежать X.*

Следствие 4. *Если вариация каждой меры $x^* \circ \mu$, $x^* \in X^*$, ограничена на $\mathbf{R}$ и X — пространство слабо секвенциально полно, то μ можно расширить на векторную меру на σ-кольце со значениями в X.*

Следствие 5. *Если для всех $x^* \in X^*$ мера $x^* \circ \mu$ имеет конечную вариацию, далее, если множество $\{\mu(E) : E \in \mathbf{R}\}$ ограничено в X и X слабо секвенциально полное, то μ можно расширить на σ-кольцо не выходя из X.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Métivier M., *Sur les mesures à valeurs vectorielles et les limites projectives de telles mesures*, C. R. Acad. Sci. *256* (1963), 2993—2995.

[2] Găină S., *Extension of vector measures*, Rev. math. pures et appl. *8* (1963), 151—155.

[3] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950. (Халмош П., *Теория меры*, Москва 1955.)

[4] Клуванек И., *К теории векторных мер*, Mat.-fyz. časop. *11* (1961), 173—191.

[5] Kluvánek I., *Intégrale vectorielle de Daniell*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 146—161.

Поступило 26. 2. 1965.

Katedra matematiky
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika,
Košice