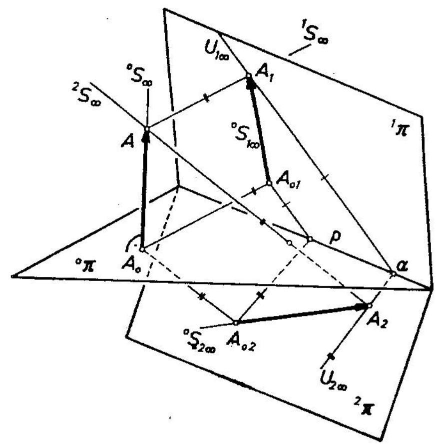
MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 1, 1966

SDRUŽENÉ ROVNOBĚŽNÉ PRŮMĚTY

LADISLAV DRS, Praha

V rozšířeném euklidovském prostoru E_3 vyšetřujme promítání ${}^i\mathscr{P}$ o průmětně ${}^i\pi$ a nevlastním středu ${}^iS$, $i = 0, 1, 2$.
Předpokládejme, že

1. promítání ${}^0\mathscr{P}$ je kolmé,
2. roviny ${}^0\pi$, ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ mají společnou přímku p,
3. body ${}^0S$, ${}^1S$, ${}^2S$ neleží na téže přímce (obr. 1).



Obr. 1.

Je-li $U \subset E_3$, pak pro stručnost položme ${}^i\mathscr{P}(U) = U_i$, $i = 0, 1, 2$, a podobně ${}^i\mathscr{P}(U_0) = U_{0i}$, $i = 1, 2$. Pár U_{0i}, U_i je i-tý rovnoběžný průmět útvaru U, $i = 1, 2$.

Pro body $A, B, \ldots \notin {}^0\pi$ procházejí přímky $A_{0i}A_i$, $B_{0i}B_i$, … nevlastním bodem ${}^0S_i$, tj. $A_{0i}\,A_i \parallel B_{0i}\,B_i \parallel \ldots$, $i = 2.\ 1$, Pro $A, B, \ldots \notin {}^1S^2S$ položme $({}^1S^2SA) \cap {}^0\pi = u^A$, $({}^1S^2SB) \cap {}^0\pi = u^B$, … Uzlové přímky u_i^A, u_i^B, … bodů A, B, … procházejí nevlastním bodem $U_i = {}^i\pi \cap {}^1S^2S$, tj. $u_i^A \parallel u_i^B$ …,

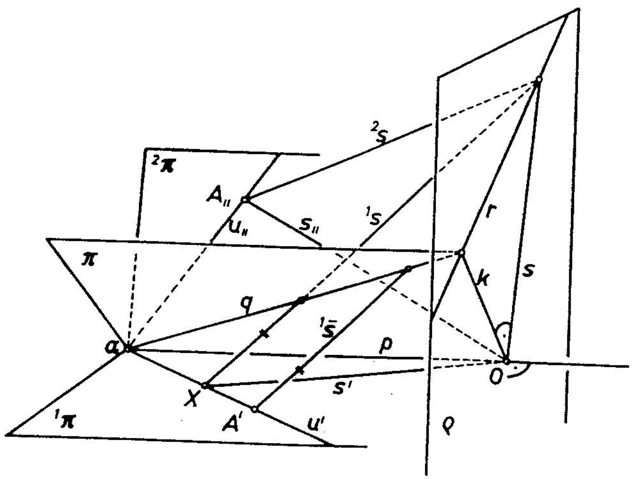
$i = 1, 2$. Páry $u_1^A, u_2^A; u_1^B, u_2^B; \ldots$ se protínají na přímce p v jejím průsečíku $\alpha, \beta, \ldots$ s rovinou $({}^1S{}^2SA)$, $({}^1S{}^2SB)$, ...

Průmětny ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ otočme do společné roviny ν, $p \subset \nu$. Otočením rovnoběžných průmětů U_{01}, U_1; U_{02}, U_2 do roviny ν získáme sdružené rovnoběžné průměty U_{01}^*, U_1^*; U_{02}^*, U_2^* útvaru U. Protože je zřejmě $u_1^{A*} \parallel u_1^{B*} \parallel \ldots; u_2^{A*} \parallel u_2^{B*} \parallel \ldots$ a protože se sdružené rovnoběžné průměty $A_{01}^* B_{01}^*$, $A_{02}^* B_{02}^*$, ... přímek $A_0 B_0, \ldots$ roviny ${}^0\pi$ protínají na přímce p, je též $A_{01}^* A_{02}^* \parallel B_{01}^* B_{02}^* \ldots$, tj. útvary U_{01}^*, U_{02}^* jsou perspektivně afinní. Osou afinity je přímka p. Přímky $A_{0i}^* A_i^*$, $B_{0i}^* B_i^*$, ... procházejí nevlastním bodem ${}^0S_i^*$, $i = 1, 2$, body ${}^0S_1^*$, ${}^0S_2^*$ si ovšem v této afinitě nekorespondují, neboť ${}^0S \notin {}^0\pi$.

Věta. *Budiž v rovině ν dána perspektivní afinita osou p a párem sdružených vlastních bodů A', A'', dále budiž dán pár nevlastních afinně sdružených bodů U', U'', pár nevlastních nesdružených bodů S', S'' a úhel $\omega \neq 0°, 180°$.*

Pak existuje trojice rovnoběžných promítání ${}^0\mathscr{P}$, ${}^1\mathscr{P}$, ${}^2\mathscr{P}$ o průmětnách ${}^0\pi = pA$, ${}^1\pi = \nu$, ${}^2\pi$ ($p \subset {}^2\pi$, $\sphericalangle\, {}^1\pi\, {}^2\pi = \omega$) a středech ${}^0S$ na kolmici k ${}^0\pi$, ${}^1S$, ${}^2S$ neležících na téže přímce tak, že platí: $A_1^* = A'$, $A_2^* = A''$, $U_1^* = U'$, $U_2^* = U''$, ${}^0S_1^* = S'$, ${}^0S_2^* = S''$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti budiž pár S', S'' určen přímkami $s' \not\ni A'$, $s'' \ni A''$ takovými, že $s' \cap s'' = 0 \in p$. Označme $u' = A'U'$, $u'' = A''U''$. Abychom splnili podmínky věty, položme $\nu = {}^1\pi$, $p \subset {}^2\pi$, $\sphericalangle\, {}^1\pi\ {}^2\pi = \omega$. Útvary označené $''$ otočme kolem přímky p do roviny ${}^2\pi$ a označme je $_{\prime\prime}$ (obr. 2). Existují-li body ${}^1S$, ${}^2S$ leží na nevlastní přímce roviny $\sigma = u'u_{\prime\prime}$. Ve svazku s osou p zvolme libovolně rovinu π, kolmici k ní bodem O označme s a její nevlastní bod S. Nevlastní body přímek ${}^1s = \sigma \cap (ss')$, ${}^2s = \sigma \cap (ss_{\prime\prime})$ označme



Obr. 2.

$'S$, $''S$; $'S \notin {}^1\pi$, $''S \notin {}^2\pi$. Průmět bodu S ze středu $'S$ resp. $''S$ do roviny ${}^1\pi$ resp. ${}^2\pi$ je bod S' resp. S''. Dále označme: $q = \pi \cap \sigma$, $A' \in {}^1\bar{s} \parallel {}^1s$, $O \in k \perp (sp)$, $\varrho = (sk)$, $r = \sigma \cap \varrho$, $X = s' \cap u'$. Hledejme ve svazku s osou p rovinu $\pi = {}^0\pi$ tak, aby splňovala podmínky věty. Především je nutno z úvah vyloučit rovinu $\pi \perp r$. Pro tuto rovinu je $s \parallel r \parallel {}^1s \parallel {}^2s$. Nevlastní body hledaných promítání ${}^1\mathscr{P}$, ${}^2\mathscr{P}$ je možno volit pouze na přímkách ${}^1s$, ${}^2s$, tj. $'S = {}^1S = {}^2S = {}''S$. Pro ně by však nebyl splněn požadavek věty, aby body ${}^0S$, ${}^1S$, ${}^2S$ neležely na téže přímce. Sledujme přímky ${}^1s$, ${}^1\bar{s}$, ${}^2s$, s, k, q měníme-li ve svazku s osou p rovinu π:

Přímky ${}^1s$, ... tvoří svazek v rovině σ se středem X, posunuté přímky ${}^1\bar{s}$, ... tvoří v rovině σ svazek se středem A' a tedy

(1) $$X({}^1s, \ldots) \barwedge A'({}^1\bar{s}, \ldots).$$

Přímky ${}^2s$, ... tvoří svazek v rovině σ se středem $A_{\prime\prime}$. Svazky X (${}^1s$, ...), $A''({}^2s, \ldots)$ jsou perspektivní, přímky ${}^1s$, ${}^2s$; ... se protínají na přímce r,

(2) $$X({}^1s, \ldots) \barwedge A_{\prime\prime}({}^2s, \ldots).$$

Svazky X (${}^1s$, ...) v rovině σ a $O(s, \ldots)$ v rovině ϱ jsou perspektivní, přímky s, ${}^1s$; ... se protínají na přímce r,

(3) $$X({}^1s, \ldots) \barwedge O(s, \ldots).$$

Svazky $O(k, \ldots)$, $O(s, \ldots)$ jsou v rovině ϱ navzájem o 90° otočeny,

(4) $$O(k, \ldots) \barwedge O(s, \ldots).$$

Svazky $\alpha(q, \ldots)$ v rovině σ a $O(k, \ldots)$ jsou perspektivní, přímky q, k; ... se protínají na přímce r,

(5) $$\alpha(q, \ldots) \barwedge O(k, \ldots).$$

Ze vztahů (1) — (5) plyne

(6) $$\alpha(q, \ldots) \barwedge A'({}^1\bar{s}, \ldots),$$

(7) $$\alpha(q, \ldots) \barwedge A_{\prime\prime}({}^2s, \ldots).$$

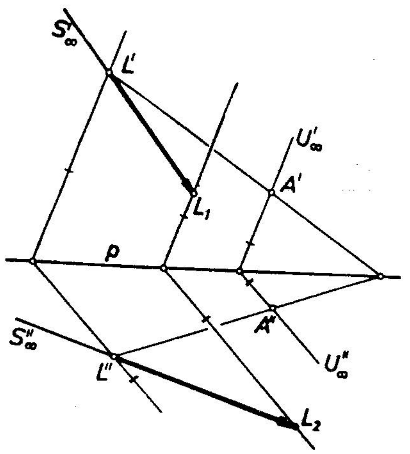
Svazky (6) určují v rovině σ kuželosečku. Je množinou takových bodů $\bar{A}$, jejichž průmět z bodu $'S$ do roviny ${}^1\pi$ je bod A' a které současně určují rovinu $\pi = \bar{A}p$ kolmou k přímce s s průmětem s' resp. $s_{\prime\prime}$ z bodu $'S$ do roviny ${}^1\pi$ resp. z bodu $''S$ do roviny ${}^2\pi$.

Podobně je kuželosečka určená svazky (7) množinou bodů $\bar{A}$, které se z bodu $''S$ promítají do roviny ${}^2\pi$ do bodu $A_{\prime\prime}$ a které současně určují rovinu $\pi = \bar{A}p$ kolmou k přímce s s průmětem s' resp. $s_{\prime\prime}$ z bodu $'S$ do roviny ${}^1\pi$ resp. z bodu $''S$ do roviny ${}^2\pi$.

Kuželosečky (6), (7) mají kromě společného bodu α ještě jeden nebo tři reálné společné body. Žádný z nich neleží na přímce $XA'' = {}^1s = {}^2s$. Bodem kuželosečky (6) je v tomto případě průsečík přímky q s přímkou ${}^1\bar{s} \parallel {}^1s$, bodem kuželosečky (7) je průsečík $XA_{''} \cap q$. Oba průsečíky jsou však různé, neboť $X \neq A'$, ${}^1\bar{s} \neq {}^1s$ (přímky s', s'' nejsou afinně sdružené).

Budiž $A \neq \alpha$ společný bod kuželoseček (6), (7) a označme dále ${}^0\pi = Ap$, ${}^1s = AA'$, její nevlastní bod ${}^1S$, $AA_{''} = {}^2s$, její nevlastní bod ${}^2S$ a nevlastní bod kolmice k ${}^0\pi$ — ${}^0S$. Tím jsou určena promítání ${}^0\mathscr{P}({}^0\pi, {}^0S)$, ${}^1\mathscr{P}({}^1\pi, {}^1S)$, ${}^2\mathscr{P}({}^2\pi, {}^2S)$, která mají všechny větou požadované vlastnosti: bod ${}^0S$ neleží na přímce ${}^1S{}^2S$, ${}^1\mathscr{P}(A) = A_1 = A'$, ${}^2\mathscr{P}(A) = A_2 = A_{''}$, $({}^1s{}^2s) \cap {}^1\pi = u_1 = u'$, $({}^1s{}^2s) \cap {}^2\pi = u_2 = u_{''}$, ${}^1\mathscr{P}({}^0S) = {}^0S_1 = S'$, ${}^2\mathscr{P}({}^0S) = {}^0S_2 \doteq S_{''}$. Tím je věta dokázána.

Zvolme podle této věty přímku p a body S', S'', U', U'', A', A'' a dále zvolme pár vlastních bodů L', L_1 na přímce bodem S'. Pár bodů L'', L_2 sestrojme touto konstrukcí (obr. 3):



Obr. 3.

1. bod L'' jako afinně sdružený s bodem L' v afinitě s osou p a párem A', A'';

2. bod L_2 jako průsečík přímky $L''S''$ s přímkou $u^{L''}$ afinně sdruženou s přímkou $u^{L'} = U'L_1$.

Podle dokázané věty lze páry L', L_1; L'', L_2 pokládat za sdružené průměty L^*_{01}, L^*_1; L^*_{02}, L^*_2 bodu L při promítání ${}^i\mathscr{P}$, $i = 0, 1, 2$, které lze určit podle důkazu této věty. Tato konstrukce je tedy tzv. „překreslovací metoda" [1], [2], [3] pro vpředu definovaná rovnoběžná promítání.

LITERATURA

[1] Hohenberg F., *Umzeichnen von Perspektiven*, Elem. Math. *10* (1955), 57—61.

[2] Drs L., *Umzeichnen von Perspektiven bei ungleichgeneigten Bildebenen*, Elem. Math. *15* (1960).

[3] Drs L., *Konjugierte Perspektiven*, Časop. pěstov. mat. *90* (1965), 43—59.

Došlo 22. 1. 1965.

Katedra deskriptivní geometrie strojní fakulty Českého vysokého učení technického, Praha

СОПРЯЖЕННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Ладислав Дрс

Резюме

Из данной параллельной проекции U_{01}, U_1 фигуры U можно построить U_{02}, U_2 по конструкции данной в этой работе. U_{02}, U_2 дают новую параллельную проекцию фигуры U. В доказательстве теоремы определяются тоже оба параллельных проектирования.