MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS

ROČNÍK 16 1966 ČÍSLO 1

KONJUGIERTE NETZE AXIALER UND AXIAL-RADIALER ART BEZÜGLICH EINER KONGRUENZ KANONISCHER GERADEN FESTEN INDEXES

VÁCLAV HAVEL, Brno

Ist ein Kurvennetz im Axialsystem bezüglich einer gegebenen Geradenkongruenz enthalten, die einer Fläche hinzugefügt wird, so nennen wir es bezüglich dieser Kongruenz von *axialer Art*. Liegt die eine Schar des Netzes im Axialsystem bezüglich der gegebenen Kongruenz und die andere im Radialsystem bezüglich der dual zugeordneten Kongruenz, so sprechen wir vom Netz *axial—radialer Art*, bezüglich der gegebenen Kongruenz.

R. N. Ščerbakov hat in [6], S. 80—82, die Allgemeinheit der Fläche in $\boldsymbol{P}_3$ untersucht, worauf sich ein konjugiertes Netz axialer, bzw. axial-radialer Art, bezüglich der Kongruenz der kanonischen Geraden festen Indexes, ([3], II, § 3, bzw. [5], §4) befindet. Seine Ergebnisse betreffen die Existenz einer solchen Fläche und wurden durch die Konstruktion eines kanonischen begleitenden Tetraeders des konjugierten Netzes auf der Fläche begründet.

Im weiteren werden wir die Existenzfrage von konjugierten Netzen axialer bzw. axial-radialer Art bezüglich der Kongruenz kanonischer Geraden festen Indexes für die Fläche vom Typ $\mathscr{P}^2_{0,3}$ ([8], S. 386—387) behandeln, indem wir unmittelbar die Fubinischen Koeffizienten und Krümmung β, γ, K verwenden. Wir benützen eine Analogie des Bompianischen Verfahrens aus seiner grundlegenden Arbeit [1]. Wir haben also das *spezielle* begleitende Tetraeder $A_0A_1A_2A_3$ der Fläche Π vom Typ $\mathscr{P}^2_{0,3}$, das von A. Švec in [8], S. 386—387 konstruiert wurde; dabei setzen wir voraus, dass

$$\beta\gamma \neq 0, \qquad h = 0. \tag{1$_1$}$$

Wir legen A_0A_3 in die kanonische Gerade festen Indexes λ, was durch

$$a^2_2 - a^1_1 = a, \qquad b^1_1 - b^2_2 = b \tag{2}$$

mit

$$(3_1)\qquad a = (\ln|\gamma|)_u - \lambda(\ln|\beta\gamma^2|)_u, \qquad b = (\ln|\beta|)_v - \lambda(\ln|\beta\gamma|^2|)_v$$

ausgedrückt wird.
Weiter setzen wir

$$(3^2)\qquad A = \frac{(\ln|\beta\gamma^2|)_u}{\gamma}, \quad B = \frac{(\ln|\beta^2\gamma|)_v}{\beta}, \quad K = \frac{(\ln|\beta\gamma|)_{uv}}{\beta\gamma}$$

und für $\lambda \neq -\frac{1}{2}$

$$(3_3)\qquad C = \frac{1-3\lambda}{1-2\lambda}K - \frac{4}{1-2\lambda}.$$

Ähnlich setzen wir

$$(3_2^*)\qquad A^* = -\frac{(\ln|\beta\gamma^2|)_u}{\beta}, \quad B^* = -\frac{(\ln|\beta^2\gamma|)_v}{\gamma}$$

und für $\lambda \neq 0$

$$(3_3^*)\qquad C^* = \frac{1-3\lambda}{\lambda}K + \frac{2}{\lambda}.$$

Das durch

$$(4)\qquad v' = \pm M(u, v)$$

bestimmte konjugierte Netz ist axial bezüglich der Kongruenz der Geraden A_0A_3 gerade dann, wenn

$$(5_1)\qquad \tfrac{1}{2}(M^2)_u = -aM^2 + \gamma M^4,$$

$$(5_2)\qquad \tfrac{1}{2}(M^2)_v = -\beta + bM^2;$$

vgl. [5], § 5, die Beziehungen (9) — (10).
Die Integrabilitätsbedingung für (5_{1-2}) lautet

$$(6_1)\qquad (1-2\lambda)BM^4 + ((1-3\lambda)K-4)M^2 + (1-2\lambda)A = 0$$

und ist gerade dann identisch in M^2 erfüllt, wenn

$$(7)\qquad \lambda = \tfrac{1}{2}, \qquad K = -8,$$

was ein bekanntes Resultat ist, das zum bekannten Schluss führt ([5], § 5, Satz 5).
Es gelte also im folgenden

$$(1_2)\qquad \lambda \neq \tfrac{1}{2}.$$

Die Gleichung (6_1) hat nun gemäss (3_3) eine einfachere Form

$$(6_2)\qquad BM^4 + CM^2 + A = 0.$$

Nun wenden wir das Lösbarkeitskriterium für (5_{1-2}) nach [4], Satz 1.1, S. 3—4 an. Nachdem wir die Ableitungen von (6_2) nach u, v durchführen, bekommen wir

$$(7_1)\qquad B_uM^4 + 4BM^4(\gamma M^2 - a) + C_uM^2 + 2CM^2(\gamma M^2 - a) + A_u = 0,$$

$$(7_2)\qquad B_vM^4 + 4BM^2(bM^2 - \beta) + C_vM^2 + 2C(bM^2 - \beta) + A_v = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz endlich vieler Lösungen von (5_{1-2}) lautet nun: die Beziehungen (7_{1-2}) sind identisch in u, v für die Lösung M^2 von (6_2) erfüllt.

Setzen wir also zuerst in (7_{1-2}) für M^4 den Ausdruck $-\frac{C}{B}M^2 - \frac{A}{B}$; so haben wir

$$-B_u\left(\frac{C}{B}M^2 + \frac{A}{B}\right) - 4\left(-C\gamma\left(\frac{C}{B}M^2 + \frac{A}{B}\right) + A\gamma M^2 - aCM^2 - aA\right) +$$
$$+ CM^2 + 2C\gamma\left(-\frac{C}{B}M^2 - \frac{A}{B}\right) - 2aCM^2 + A_u = 0,$$
$$-B_v\left(\frac{C}{B} + \frac{A}{B}\right) - 4b(CM^2 + A) - 4B\beta M^2 + C_vM^2 + 2C(bM^2 - \beta) + A_v = 0,$$

und nach Umformung

$$M^2\left(-\frac{CB_u}{B} + 2\frac{C^2\gamma}{B} - 4A\gamma + 2aC + C_u\right) - A(\ln|B|)_u + 2\frac{\gamma AC}{B} + 4aA +$$
$$+ A_n = 0,\; M^2\left(-\frac{CB_v}{B} - 2bC - 4B\beta + C_v\right) - A(\ln|B|)_v - 4bA - 2\beta C + A_u = 0,$$

woraus sich nach Einsetzen

$$M^2 = \frac{1}{2B}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}\right)$$

die folgenden Gleichungen ergeben:

$$(8_1)\qquad \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}}{2B^2}(-CB_u + 2C^2\gamma - 4AB\gamma + 2aBC + C_uB) =$$
$$= A(\ln|B|)_u - 2\gamma\frac{AC}{B} - 4aA - A_u = 0,$$

$$(8_2)\qquad \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}}{2B^2}(-CB_v - 2Cb - 4B\beta + C_v) = $$
$$= A(\ln|B|)_v + 4Ab + 2C\beta - A_v = 0.$$

Wir haben also folgendes Ergebnis erhalten.

Behauptung 1. *Auf der Fläche Π existieren endlich viele konjugierte Netze axialer Art bezüglich der Kongruenz der kanonischen Geraden festen Indexes $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ gerade dann, wenn die Beziehungen (8_{1-2}) erfüllt werden.*

Wir interessieren uns nun um den Fall, wo beide Gleichungen (7_{1-2}) sogar identisch in M^2 gelten. Aus dem Annullieren der Koeffizienten bei M^6, M^4, M^2, M^0 in (7_1) folgt schrittweise $B = 0$, $C = 0$, $A_u = 0$ und das Annullieren des Koeffizienten bei M^0 in (7_2) führt auf eine weitere Beziehung $A_v = 0$. Wir haben also zusammen

$$(8_3)\qquad A = \text{const}, \qquad B = C = 0.$$

Die Gleichheit $C = 0$ bedeutet, dass $(1 - 3\lambda)K = 4$, was nur bei $\lambda \neq \frac{1}{3}$ erfüllbar ist und zwar so, dass $K = \dfrac{4}{1-3\lambda}$. Wir formulieren das Resultat.

Behauptung 2. *Gelten für die Fläche Π die Beziehungen (8_3) für $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, so trägt sie endlich viele konjugierte Netze axialer Art bezüglich der Kongruenz kanonischer Geraden festen Indexes λ.*

Das durch (4) beschriebene konjugierte Netz ist axial-radialer Art bezüglich der Kongruenz der kanonischer Geraden festen Indexes λ gerade dann, wenn

$$(9_1)\qquad M_u = -\beta - aM,$$
$$(9_2)\qquad M_v = bM + \gamma M^2;$$

vgl. [5], § 6, Beziehungen (9) und (16).

Die Integrabilitätsbedingung für (9_{1-2}) lautet

$$(10_1)\qquad -\lambda A^* M^2 + (1 - 3\lambda)K + 2)M - \lambda B^* = 0$$

und ist identisch in M gerade dann erfüllt, wenn

$$(11)\qquad \lambda = 0, \qquad K = -2,$$

was wieder ein bekanntes Resultat ist das zum bekannten Schluss führt ([5], § 6, Satz 5).

Setzen wir also ferner voraus, dass

$$(1_2^*)\qquad \lambda \neq 0,$$

so dass wir (10_1) in eine einfachere Form bringen können:

$$(10_2)\qquad A^*M^2 + C^*M + B^* = 0.$$

Die Ableitungen von (10_2) nach u bzw. v bieten

$$(12_1)\qquad A_u^*M^2 - 2A^*M(aM + \beta) + C_u^*M - C^*(aM + \beta) + B_u^* = 0,$$
$$(12_2)\qquad A_v^*M^2 + 2A^*M(\gamma M^2 + bM) + C_v^*M - C^*(\gamma M^2 + bM) + B_v^* = 0$$

Setzen wir für M^2 den Ausdruck $-\dfrac{C^*}{A^*}M - \dfrac{B^*}{A^*}$ ins (12_{1-2}),

so bekommen wir

$$-(\ln|A^*|)_u C^*M - (\ln|A^*|)_u B^* + 2C^*aM + 2B^*a - 2A^*\beta M + C_u^*M -$$
$$-C^*aM - C^*\beta + B_u^* = 0,$$

$$-(\ln|A^*|)_v C^*M - (\ln|A^*|)_v B^* + 2A^*M\left(-\frac{C^*\gamma}{A^*}M - \frac{B^*\gamma}{A^*} + bM\right) +$$
$$+ C_v^*M - \frac{C^{*2}\gamma}{A^*}M - \frac{B^*C^*}{A^*} + C^*bM + B_v^* = 0.$$

Nach wiederholtem Einsetzen für M ergibt sich also

$$-(\ln|A^*|)_v C^*M - (\ln|A^*|)_v B^* + \frac{2C^{*2}\gamma}{A^*}M + \frac{2C^*B^*\gamma}{A^*} - 2B^*\gamma M -$$
$$-\frac{2C^*b}{A^*}M - \frac{2B^*b}{A^*} + C_v^*M - \frac{C^{*2}\gamma}{A^*} - \frac{B^*C^*}{A^*} + C^*bM + B_v^* = 0.$$

Daraus folgt

$$M\left(-(\ln|A^*|)_u C^* + C^*a - 2A^*\beta + C_u^*\right) = (\ln|A^*|)_u B^* - 2B^*a + C^*\beta,$$

$$M\left(-(\ln|A^*|)_v C^* + \frac{C^{*2}\gamma}{A^*} - 2B^*\gamma - \frac{2C^*b}{A^*} + C_v^* + C^*b\right) = (\ln|A^*|)_v B^* -$$
$$-\frac{2B^*C^*\gamma}{A^*} + \frac{2B^*b}{A^*} + \frac{B^*C^*}{A^*} - B_v^*.$$

Nach Einsetzen

$$M = \frac{1}{2A^*}\left(-C^* \pm \sqrt{C^{*2} - 4A^*B^*}\right)$$

ergibt sich endlich

$$(13_1)\qquad \frac{-C^* \pm \sqrt{C^{*2} - 4A^*B^*}}{2A^*}\left(-(\ln|A^*|)_u C^* + C^*a - 2A^*\beta + C_u^*\right) =$$
$$= (\ln|A^*|)_u B^* - 2B^*a + C^*\beta,$$

$$(13_2)\qquad \frac{-C^* \pm \sqrt{C^{*2} - 4A^*B^*}}{2A^*}(-A_v^*C^* + C^{*2}\gamma - 2A^*B^*\gamma - 2C^*b + A^*C_v^* + A^*C^*b) = (\ln|A^*|)_v A^*B^* - 2B^*C^*\gamma + 2B^*b + B^*C^* - B_v^*A^*.$$

Ähnlich wie bei der Behauptung 1 gelangen wir zu folgendem Ergebnis.

Behauptung 3. *Die Fläche Π trägt endlich viele konjugierte Netze axial-radialer Art bezüglich der Kongruenz kanonischer Geraden festen Indexes $\lambda \neq 0$ gerade dann, wenn die Beziehungen (13_{1-2}) erfüllt werden.*

Sind die Gleichungen (12_{1-2}) sogar identisch in M erfüllt, so folgt aus dem Annullieren der Koeffizienten bei M^3, M^2, M^1, M^0 in (12_2) schrittweise $A^* = 0$, $C^* = 0$, $B_v^* = 0$; der ähnliche Schluss für (12_1) führt noch zu $B_u^* = 0$

Zusammen genommen gelangen wir also zu

$$(13_3)\qquad A^* = C^* = 0, \qquad B^* = \text{const.}$$

Die Gleichheit $C^* = 0$ bedeutet, dass $(1 - 3\lambda)K + 2 = 0$, was nur bei $\lambda \neq \frac{1}{3}$ erfüllt werden kann, und zwar durch $K = \dfrac{2}{1 - 3\lambda}$. Unser Schluss ist also folgendermassen formulierbar.

Behauptung 4. *Gelten für die Fläche Π die Beziehungen (13_3) bei $\lambda \neq 0, \frac{1}{3}$, so hat sie endlich viele konjugierte Netze axial-radialer Art bezüglich der Kongruenz kanonischer Geraden festen Indexes λ.*

Schlussbemerkung. Es ist leider nicht gelungen, eine tiefere geometrische Erörterung der Beziehungen (8_{1-3}) bzw. (13_{1-3}) zu entdecken. Gewisse Verbesserungen des ursprünglichen Manuskripts hat Herr I. Kolář vorgeschlagen. Der Verfasser dankt ihm herzlich.

LITERATUR

[1] Bompiani E., *Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario*, Boll. Unione mat. ital. 3 (1924), 1—7.
[2] Brejcha J., *O axiálních a duálně axiálních systémech čar na ploše v S_3 obsahujících* konjugované sítě, Časop. pěstov. mat. *79* (1954), 252—260.
[3] Cenkl B., *L'équations de structure d'un espace à connexion projective*, Czech. Math. J. *14* (1964), 79—94.
[4] Eisenhart L. P., *Continuous groups of transformations*, Princeton 1933.
[5] Гавел В. В., Клапка И., *Сопряженные сети и осевые системы крывых на поверхности с проективной связностью*, Тр. Томского ун-та *181* (1965), 34—42.

[6] Щербаков Р. Н., *Репер линии на поверхности в проективно-дифференциальной геометрии*, Уч. зап. Бурят-монгольск. пед. ин-т *3* (1953), 41—91.
[7] Švec A., *K výkladu teorie prostorů s konexí*, Časop. pěstov. mat. *86* (1961), 425—432.
[8] Švec A., *Sur la géométrie différentielle d'un surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective*, Czech. Math. J. *11* (1961), 386—397.
[9] Kolář I., *Konjugované sítě axiálního a axiálně-radiálního typu vzhledem ke kongruenci kanonických přímek proměnného indexu*, Časop. pěstov. mat. *91* (1966,) 64—71.

Eingegangen am 6. 6. 1964.

Katedra matematiky a deskriptivní goemetrie stavební fakulty Vysokého učení technického, Brno