MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 1, 1966

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕР

ТИБОР НОЙБРУНН (TIBOR NEUBRUNN), Братислава

Понятие абсолютной непрерывности функции множества, определенной на некотором измеримом пространстве, можно, как известно, сформулировать исключительно с помощью понятий теории множеств. Целью этой заметки является показать, что не только это понятие, но и доказательства утверждений, в которых абсолютная непрерывность играет важную роль, своим характером относятся полностью к теории множеств. Эта работа не характерирует класс всех теорем, доказательства которых можно провести таким способом. Приведенные здесь результаты являются обобщением и дополнением нескольких известных результатов.

Обобщение получается обычно за счет того, что не работается с понятием меры и с теоремой Радон-Никодима. В терминологии теории множеств здесь вводится и понятие τ-асимптотической абсолютной непрерывности, введенное первоначально для мер в [2]. Для изучения этого типа абсолютной непрерывности и его связи с абсолютной непрерывностью автору в качестве отправного пункта послужила работа [2].

1

Понятиями, относящимися к теории меры, мы будем пользоваться в том смысле, в каком они используются в [1]. Как правило, мы напомним еще определения понятий на тех местах, где они встречаются в первый раз. Сразу же скажем, что под измеримым пространством мы понимаем пару $(X, \mathscr{S})$, где X — абстрактное множество, $\mathscr{S}$ — некоторое σ — кольцо (т.е. непустая система, замкнутая относительно образования счетных сумм и разностей двух множеств) его подмножеств. Объединение множеств E, F, их пересечение и разность будем обозначать соответственно через $E \cup F$, $E \cap F$, $E - F$. Через E' будем обозначать множество $X - E$ (дополнение множества E), через $\emptyset$ — пустое множество, а через $\{x: \ldots\}$ — множество элементов, обладающих свойством, указанным за двоеточием.

1.1. Определение. *Пусть $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство, пусть $\mathscr{M} \subset \mathscr{S}$ — система, содержащая с каждой последовательностью $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежащих к ней множеств и сумму этой последовательности $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и с каждым множеством $E \in \mathscr{M}$ — и $E \cap F$, где $F \in \mathscr{S}$ — произвольное. Систему $\mathscr{M}$ будем называть системой нулевых множеств в измеримом пространстве $(X, \mathscr{S})$.*

1.2. Примечание. Если мы будем писать $(X, \mathscr{S}, \mathscr{M})$, то это будет обозначать измеримое пространство с системой $\mathscr{M}$ нулевых множеств.

1.3. Теорема. *Пусть $(X, \mathscr{S}, \mathscr{M})$ — измеримое пространство с системой $\mathscr{M}$ нулевых множеств. Пусть $\mathscr{S} - \mathscr{M}$ не содержит несчетное число попарно непересекающихся множеств. Пусть V — некоторое свойство измеримых множеств $E \in \mathscr{S}$ такое, что хотя бы одно множество $E \in \mathscr{S} -$ $- \mathscr{M}$ обладает этом свойством и счетная сумма непересекающихся множеств сохраняет это свойство. Тогда существует множество $M \in \mathscr{S} - \mathscr{M}$, являющееся максимальным множеством со свойством V в том смысле, что*

(1) $$E \in \mathscr{S},\ E \subset M',\ E \text{ обладает свойством } V \Rightarrow E \in \mathscr{M}.$$

Доказательство. Пусть Ω — первое несчетное порядковое число. Для каждого $\xi < \Omega$ построим последовательность $\{A_n^{\xi}\}_{n=1}^{\infty}$. Для порядкового числа 1 $\{A_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ строится следующим образом. В качестве A_1^1 возьмем множество из $\mathscr{S} - \mathscr{M}$, обладающее свойством V. Для $n \geqq 2$ пусть A_n^1 из $\mathscr{S} - \mathscr{M}$ обладает свойством V и пусть оно таково, что $A_i^1 \cap A_n^1 = \emptyset$ для $i < n$. Если такое множество для некоторого $n \geqq 2$ не существует, то объединение $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ является уже максимальным множеством. Пусть $1 < \xi < \Omega$ и пусть уже для всех $\eta < \xi$ построены $\{A_n^{\eta}\}_{n=1}^{\infty}$ так, что это непересекающиеся множества, принадлежащие к $\mathscr{S} - \mathscr{M}$. Образуем $A = \bigcup_{\eta<\xi} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\eta}$. Выберем A_1^{ξ} так, что $A_1^{\xi} \in \mathscr{S} - \mathscr{M}$, $A_1^{\xi} \cap A = \emptyset$, если такое множество существует. Если же оно не существует, то уже A является искомым максимальным множеством. A_n^{ξ} для $n \geqq 2$ определяем аналогично случаю $\xi = 1$. Если для некоторого n множество A_n^{ξ} уже не существует, то множество $A \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i^{\xi} = M$ является максимальным. Такой случай, что для некоторого ξ и n уже не существует A_n^{ξ}, должен действительно произойти. В противном случае мы построили бы несчетное число попарно непересекающихся измеримых множеств. Значит, существование множества M обеспечено.

1.4. Примечание. Если M_1 — другое такое максимальное множество со свойством V, то $M \dot{-} M_1 = (M - M_1) \cup (M_1 - M)$ либо не обладает свойством V, либо принадлежит к $\mathscr{M}$.

1.5. Следствие. *Пусть $(X, \mathscr{S}, \mathscr{M})$ — измеримое пространство с системой $\mathscr{M}$ нулевых множеств и пусть $\mathscr{S} - \mathscr{M}$ не содержит несчетное число попарно непересекающихся множеств. Пусть $\mathscr{M}^* \subset \mathscr{S}$ — произвольная нулевая система множеств, не являющаяся подсистемой $\mathscr{M}$. Тогда существует множество $M \in \mathscr{S} - \mathscr{M}$ такое, что $M \in \mathscr{M}^*$ и для всякого множества $E \subset M'$ для которого $E \in \mathscr{M}^*$, имеет место $E \in \mathscr{M}$.*

Доказательство. В качестве свойства V множества E достаточно взять свойство

(2) $$E \in \mathscr{S}, \quad E \in \mathscr{M}^*, \quad E \notin \mathscr{M}$$

и применить предыдулущую теорему.

1.6. Следствие. *Пусть $(X, \mathscr{S}, m)$ — пространство с вполне σ-конечной мерой. Пусть m^* — мера на $\mathscr{S}$ и пусть m не является абсолютно непрерывной относительно m^*. Тогда существует множество M такое, что $m^*(M) = 0$, $m(M) > 0$ и для каждого $E \in \mathscr{S}$, для которого $E \subset M$, $m^*(E) = 0$, имеет место $m(E) = 0$.*

Напомним сначала о понятиях, фигурирующих в 1. 6. Под пространством с мерой мы понимаем тройку $(X, \mathscr{S}, m)$, где $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство и m — мера на $\mathscr{S}$ (т.е. неотрицательная действительная функция, принимающая, быть может, и значение ∞ и такая, что $m(\emptyset) = 0$, $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ для произвольной последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ множеств, принадлежащих $\mathscr{S}$ и таких, что $E_i \cap E_k = \emptyset$ для $i \neq k$). Мера m называется абсолютно непрерывной относительно m^* (обозначаем это через $m \ll m^*$), если $m^*(E) = 0 \Rightarrow m(E) = 0$ для произвольного $E \in \mathscr{S}$. Мера m называется σ-конечной, если для каждого $E \in \mathscr{S}$ существует $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \in \mathscr{S}$ для $n = 1, 2, \ldots$ так, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $m(E_n) < \infty$.

К следствию 1.6 добавим уже только то, что если m — вполне σ—конечная мера, то в $\mathscr{S} - \mathscr{M}$ существует не более счетного числа попарно непересекающихся множеств, где $\mathscr{M} = \{E : m(E) = 0\}$. В качестве $\mathscr{M}^*$ здесь следует взять систему $\mathscr{M}^* = \{E : m^*(E) = 0\}$.

1.7. Примечание. σ-конечность меры m не является необходимым условием для того, чтобы система $\mathscr{S} - \mathscr{M}$ не содержала несчетное число непересекающихся множеств. Достаточно рассмотреть простой пример пространства с мерой, в котором X — одноточечное множество, и положить $\mathscr{S} = \{X, \emptyset\}$. В качестве меры m достаточно взять такую функцию m, что $m(X) = \infty$, $m(\emptyset) = 0$.

1.8. Примечание. Следствие 1.6 доказано в [2] для конечной меры m методом, использующим свойства меры.

2

С понятием абсолютной непрерывности связано понятие τ-асимптотической абсолютной непрерывности. Это понятие введено в [2] в связи с изучением инвариантных мер.

2.1. Определение. *Пусть $(X, \mathscr{S}, m)$ — пространство с мерой. Пусть $\tau(x)$ — измеримое несингулярное преобразование X в X (измеримое означает, что $E \in \mathscr{S} \Rightarrow \tau^{-1}(E) \in \mathscr{S}$, а несингулярное означает, что $m(E) = 0 \Rightarrow m[\tau^{-1}(E)] = 0$, где $\tau^{-1}(E) = \{x: \tau(x) \in E\}$. Мера m называется τ-асимптотически абсолютно непрерывной относительно некоторой меры m^*, определенной на $\mathscr{S}$, если для всякого множества $E \in \mathscr{S}$, для которого $m^*(E) = 0$, имеет место $\inf\limits_n m[\tau^{-n}(E)] = 0$.*

2.2. Примечание. Указанный вид абсолютной непрерывности будем обозначать через $m \ll_\tau m^*$. Если имеет место $m \ll_\tau m^*$, то говорят также, что m^* сильнее m.

Мы покажем, что понятие $m \ll_\tau m^*$ можно сформулировать для измеримых пространств с некоторой системой нулевых множеств и что эти понятия совпадают при переходе от пространства с мерой к соответствующему измеримому пространству с системой нулевых множеств.

2.3. Определение. *Пусть $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство и $\mathscr{M} \subset \mathscr{S}$, $\mathscr{M}^* \subset \mathscr{S}$ — две системы нулевых множеств. Пусть τ — измеримое и относительно $\mathscr{M}$ несингулярное (т.е. $E \in \mathscr{M} \Rightarrow \tau^{-1}(E) \in \mathscr{M}$) преобразование X в X. Мы будем писать $\mathscr{M} \ll_\tau \mathscr{M}^*$, если для произвольного $E \in \mathscr{M}^*$ справедливо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \mathscr{M}$.*

2.4. Теорема. *Пусть $(X, \mathscr{S}, m)$ — пространство с мерой, в котором не существует несчетное число попарно непересекающихся множеств с положительной мерой. Пусть m^* — мера, определенная на $\mathscr{S}$ и пусть τ — измеримое преобразование X в X, несингулярное относительно m и относительно m^*. Пусть $\mathscr{M} = \{E: m(E) = 0\}$, $\mathscr{M}^* = \{E: m^*(E) = 0\}$. В этих условиях имеет место $m \ll_\tau m^*$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{M} \ll_\tau \mathscr{M}^*$.*

Доказательство. Пусть $m \ll_\tau m^*$. Если $M \in \mathscr{M}^*$, значит, если $m^*(M) = 0$, то из неравенства

$$(1) \qquad m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E)\Big) \leqq m[\tau^{-n}(E)]$$

для $n = 1, 2, \ldots$ вытекает $m\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E)\Big) \leqq \inf m[\tau^{-n}(E)] = 0$, значит, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \mathscr{M}$.

Пусть $E \in \mathscr{M}^*$. Пусть $\mathscr{M} \ll_\tau \mathscr{M}^*$. Тогда либо имеет место $\mathscr{M}^* \subset \mathscr{M}$, но тогда из несингулярности вытекает $\tau^{-n}(E) \in \mathscr{M}$ для $n = 1, 2, \ldots$, значит, $\inf_n m[\tau^{-n}(E)] = 0$. Если $\mathscr{M}^* \not\subset \mathscr{M}$, то согласно 1.5 существует множество M такое, что $M \in \mathscr{M}^*$, $M \in \mathscr{M}$ и для каждого множества $F \subset M'$, $F \in \mathscr{M}^*$ имеет место $F \in \mathscr{M}$. Воспользуемся тем, что для $\tau^{-1}(M)$ имеет место

$$(2) \qquad \tau^{-1}(M) \subset M \cup Z_0,$$

где $Z_0 \in \mathscr{M}$.

В самом деле, достаточно положить $Z_0 = \tau^{-1}(M) - M$. Так как $Z_0 \subset \tau^{-1}(M)$, то из несингулярности τ относительно $\mathscr{M}$ получаем $Z_0 \in \mathscr{M}^*$. Так как одновременно $Z_0 \subset M'$, то должно иметь место $Z_0 \in \mathscr{M}$. Из соотношения (2) получаем $\tau^{-n}(M) \subset \tau^{-n+1}(M) \cup Z_n$ для $n = 1, 2, \ldots$, где $Z_n = \tau^{-n+1}(Z_0) \in \mathscr{M}$, что следует из несингулярности преобразования τ относительно $\mathscr{M}$. Так как $m(Z_n) = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$, то имеем $\tau^{-n}(M) \subset \tau^{-n+1}(M)$ для $n = 1, 2, \ldots$ за исключением множества, мера которого m равна нулю. Следовательно, имеет место

$$m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(M)\Big) = \lim_{n\to\infty} m[\tau^{-n}(M)] = \inf\nolimits_n m[\tau^{-n}(M)] = 0.$$

Так как $E = E \cap M \cup (E - M)$, то доказательство теоремы закончено.

Сразу же видно, что при несингулярном преобразовании τ относительно $\mathscr{M}$ из свойства $\mathscr{M} \ll \mathscr{M}^*$ (где $\mathscr{M} \ll \mathscr{M}^*$ означает $\mathscr{M}^* \subset \mathscr{M}$) вытекает справедливость $\mathscr{M} \ll_\tau \mathscr{M}^*$. В общем же случае из справедливости $\mathscr{M} \ll_\tau \mathscr{M}^*$ не вытекает справедливость $m \ll m^*$. (Пример для мер приведен в [2] и в доказательстве следующей теоремы мы также приведем пример такого рода.)

Приведем необходимое и достаточное условие для того, чтобы из условия $\mathscr{M} \ll_\tau \mathscr{M}^*$ вытекала справедливость $\mathscr{M} \ll \mathscr{M}^*$.

2.5. Теорема. *Пусть $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство. Пусть $\mathscr{M} \subset \mathscr{S}$ — система нулевых множеств и τ — измеримое несингулярное преобразование относительно $\mathscr{M}$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы для произвольной системы $\mathscr{M}^* \subset \mathscr{S}$ утверждения $\mathscr{M} \ll_\tau \mathscr{M}^*$ и $\mathscr{M} \ll \mathscr{M}^*$ были эквивалентными, является справедливость $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \notin \mathscr{M}$ для произвольного множества $E \in \mathscr{S}$ такого, что $E \notin \mathscr{M}$.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Пусть существует множество $E \notin \mathscr{M}$ и пусть $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \mathscr{M}$. Положим $\mathscr{M}^* = \{M \cup F : M \in \mathscr{M},\ F \subset E,\ F \in \mathscr{S}\}$. Очевидно, $\mathscr{M}^*$ — некоторая система нулевых множеств. Если $F \in \mathscr{M}$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(F) \in \mathscr{M}$, что вытекает из несингулярности. Если $F \subset E$, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(F) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \mathscr{M},$$

значит, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(F) \in \mathscr{M}$, и доказано, что $\mathscr{M} \ll_{\tau} \mathscr{M}^*$. Однако $\mathscr{M}^* \not\subset \mathscr{M}$, следовательно, не имеет места $\mathscr{M} \ll \mathscr{M}^*$.

2.6. Следствие. *Пусть $(X, \mathscr{S}, m)$ — пространство с вполне σ-конечной мерой. Пусть m^* — мера на $\mathscr{S}$ и пусть преобразование τ несингулярно относительно m и m^*, и пусть для каждого $E \in \mathscr{S}$, для которого $m(E) > 0$, будет также $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E)) > 0$. Тогда свойства $m \ll_{\tau} m^*$ и $m \ll m^*$ эквивалентны.*

В [2] приводится одно достаточное условие для эквивалентности соотношений $m \ll_{\tau} m^*$ и $m \ll m^*$. Приведем его полностью.

2.7. *Пусть τ — взаимно-однозначное несингулярное измеримое преобразование с измеримым обратным, тогда для всякой конечной меры m^*, инвариантной относительно τ, для которой $m \ll_{\tau} m^*$, справедливо также $m \ll m^*$.*

В работе [2] доказано также следующее утверждение о существовании инвариантной меры.

2.8. ([2], стр. 481, теорема 2). *Пусть $(X, \mathscr{S}, m)$ — пространство с мерой и пусть τ — измеримое несингулярное преобразование X в X. В этих условиях мера m^*, инвариантная относительно τ и такая, что $m^* \ll_{\tau} m$, $m^* \ll m$, существует тогда и только тогда, когда функции $m[\tau^{-n}(E)]$ равномерно абсолютно непрерывны относительно меры m.*

Из 2.7 и 2.8 вытекает следующее утверждение, первоначально доказанное в [5].

2.9. Теорема. *Пусть $(X, \mathscr{S}, m)$ — пространство с мерой, τ — несингулярное измеримое взаимно-однозначное преобразование X в X с измеримым обратным. В этих условиях мера m^*, инвариантная относительно преобразования τ и эквивалентная мере m существует тогда и только тогда, когда $m[\tau^{-n}(E)]$ равномерно абсолютно непрерывны относительно меры m.*

С помощью 2.6, которое мы здесь доказали, можно из теоремы 2.8 получить следующее утверждение, аналогичное 2.9.

2.10. Теорема. *Пусть $(X, \mathscr{S}, m)$ — пространство с конечной мерой. Пусть измеримое преобразование τ X в X удовлетворяет условиям, приведенным в 2.6. В этих условиях мера m^*, эквивалентная мере m и инвариантная на τ существует тогда и только тогда, когда $m[\tau^{-n}(E)]$ — равномерно абсолютно непрерывные функции.*

3

С понятием абсолютной непрерывности мер непосредственно связано понятие доминированности систем мер, имеющее применения в математической статистике. Приведем определение (см., напр., [3], стр. 231).

3.1. Определение. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ — две системы мер, определенных на $(X, \mathscr{S})$. Пусть для произвольного множества $E \in \mathscr{S}$ такого, что $m^*(E) = 0$ для каждого $m^* \in \mathfrak{M}^*$, справедливо $m(E) = 0$ для каждого $m \in \mathfrak{M}$. Тогда будем говорить, что система мер $\mathfrak{M}$ абсолютно непрерывна относительно системы мер $\mathfrak{M}^*$ ($\mathfrak{M} \ll \mathfrak{M}^*$). Если множество $\mathfrak{M}^*$ содержит только одну меру λ, то будем писать $\mathfrak{M} \ll \lambda$ и говорить, что система мер $\mathfrak{M}$ доминирована мерой λ. Если $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{M}^* \ll \mathfrak{M}$, то будем говорить, что системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ эквивалентны.*

При доказательстве теорем, относящихся к системам доминированных мер, в существенной мере используется то, что λ является вполне σ-конечной мерой и что можно применить теорему Радон-Никодима для каждого $m \in \mathfrak{M}$. Такого типа является например доказательство леммы 7 в работе [3], играющей в указанной работе существенную роль. Таким же способом можно было бы доказывать утверждения в работе [4]. Систематическим рассмотрением вопросов, связанных с доминированными системами мер, мы имеем в виду заниматься вне рамок этой работы. В настоящей заметке мы покажем, как можно без применения теоремы Радон-Никодима обобщить указанную лемму 7 из [3]. (Эта лемма утверждает, что если $\mathfrak{M} \ll \lambda$, где λ — вполне σ-конечная мера, то существует счетная система $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$, т.е. $\mathfrak{N} \ll \mathfrak{M}$ и одновременно $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{N}$).

Мы обобщим эту лемму в том смысле, что из ее доказательства исключим теорему Радон-Никодима, и докажем ее даже для τ-асимптотической доминированности, которую мы здесь введем.

3.2. Определение *Пусть $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ — классы (класс здесь обозначает систему систем) нулевых множеств пространства $(X, \mathscr{S})$. Пусть τ — измеримое преобразование X в X,* *несингулярное относительно всякой системы из $\mathfrak{M}$, а также из $\mathfrak{M}^*$. Систему $\mathfrak{M}$ назовем τ-асимптотически непрерывной относительно $\mathfrak{M}^*$ ($\mathfrak{M} \ll_\tau \mathfrak{M}^*$), если для каждого $E \in \bigcap \mathfrak{M}^*$ выполняется $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \bigcap \mathfrak{M}$. Если класс $\mathfrak{M}^*$ содержит единственную систему $\mathscr{L}$, то будем писать $\mathfrak{M} \ll_\tau \mathscr{L}$ и говорить, что класс $\mathfrak{M}$ доминирован системой $\mathscr{L}$.*

3.3. Теорема. *Пусть $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс систем нулевых множеств из $\mathscr{S}$ и пусть $\mathscr{L} \subset \mathscr{S}$ — система нулевых множеств такая, что $\mathfrak{M} \ll_\tau \mathscr{L}$ и $\mathscr{S} - \mathscr{L}$ не содержит несчетное число непересекающихся множеств. Пусть τ — несингулярное относительно всякого $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ преобразование, обладающее следующими свойствами:*

а) *Для каждого $E \in \mathscr{S}$, $E \notin \mathscr{L}$ выполняется $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \notin \mathscr{L}$.*

б) *Для каждого $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ и для каждой счетной системы $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ непересекающихся измеримых множеств, принадлежащих $\mathscr{M}$, справедливо*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_k) .$$

Тогда существует класс $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{N}$ — счетный и $\mathfrak{N} \equiv_\tau \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$. Пусть V — следующее свойство множества $E \in \mathscr{S}$:

(1)
$$E \in \mathscr{M} \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \notin \mathscr{L} .$$

Определим $Z_{\mathscr{M}}$ следующим образом: Если не существует множество $E \in \mathscr{S}$, удовлетворяющее (1), то положим $Z_{\mathscr{M}} = \emptyset$. Если хотя бы одно такое множество существует, то (согласно 1.3) существует максимальное множество с этим свойством и в этом случае пусть $Z_{\mathscr{M}}$ совпадает с этим максимальным множеством ($Z_{\mathscr{M}} = Z_{\mathscr{M}\mathscr{L}}$). Значит, имеет место

(2)
$$E \in \mathscr{S}, \quad E \subset Z'_{\mathscr{M}}, \quad E \in \mathscr{M} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \mathscr{L} .$$

Пусть V_1 означает следующее свойство множества $E \in \mathscr{S}$:

(3)
$$E = \bigcup_k E_k ,$$

где сумма на правой стороне счетна, а $E_k \in \mathscr{S}$ попарно не пересекаются и обладают тем свойством, что для каждого E_k существует $\mathscr{M}_k \in \mathfrak{M}$ такое, что $E_k \subset Z_{\mathscr{M}_k}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_k) \notin \mathscr{L}$. Если не существует множество с этим свойством, то докажем, что теорема справедлива. В качестве счетного

класса систем можно в этом случае взять, например, множество, состоящее из единственной произвольно выбранной системы $\mathscr{M}_1$. Нужно показать, что если $E \in \mathscr{M}_1$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \mathscr{M}$ для каждого $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$. Если взять произвольное множество $E \in \mathscr{M}_1$, то справедливо $E = E_1 \cup E_2$, где $E_1 = E \cap Z_{\mathscr{M}}$, $E_2 = E \cap Z'_{\mathscr{M}}$. Но имеет место $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_1) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_2)$. Так как $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_1) \in \mathscr{M}$ (учтем $E_1 \subset Z_{\mathscr{M}}$ и несингулярность τ), то достаточно показать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_2) \in \mathscr{M}$. Так как $E_2 \subset Z_{\mathscr{M}}$, то должно выполняться $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_2) \in \mathscr{L}$ (в противном случае множество со свойством V_1 существовало бы), а следовательно, также $E_2 \in \mathscr{L}$ (согласно а)), а из условия $\mathfrak{M} \ll_\tau \mathscr{L}$ вытекает $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E_2) \in \mathscr{M}$.

Значит, достаточно рассмотреть случай, когда множество E вида (3) существует. Свойство V_1 сохраняется при счетной сумме непересекающихся множеств, значит, согласно 1.3 существует максимальное множество со свойством V_1. Обозначим его через F. Значит, имеем $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, где $F_k \subset Z'_{\mathscr{M}_k}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(F_k) \notin \mathscr{L}$, $\mathscr{M}_k \in \mathfrak{M}$ для $k = 1, 2, \dots$. Положим $\mathfrak{N} = \{\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \dots\}$. Покажем, что $\mathfrak{M} \equiv_\tau \mathfrak{N}$. То, что $\mathfrak{N} \ll_\tau \mathfrak{M}$, очевидно из несингулярности τ относительно каждого $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$. Достаточно показать, что $\mathfrak{M} \ll_\tau \mathfrak{N}$. Пусть $E \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{M}_k$. Покажем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \in \bigcap \mathfrak{M}$. Пусть существует $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ такое, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) \notin \mathscr{M}$. Можно предполагать, что $E \subset Z'_{\mathscr{M}}$ (в самом деле, если некоторое множество $H \subset Z_{\mathscr{M}}$, то $H \in \mathscr{M}$, значит, из того, что τ несингулярно относительно $\mathscr{M}$, получаем $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(H) \in \mathscr{M}$). Далее имеет место $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E - F) \notin \mathscr{M}$. В самом деле, рассмотрим два случая, а именно, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E - F) \in \mathscr{L}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E - F) \notin \mathscr{L}$. В первом случае по условию теоремы $E - F \in \mathscr{L}$, а значит, из доминированности вытекает $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E - F) \in \mathscr{M}$. Второй же случай приводит к противоречию с максимальностью множества F.

Имеет место

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E - F) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap F_k\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}\Big(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\Big) \cup$$

$\cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E \cap F_k)$, откуда получаем $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E \cap F_k) \notin \mathscr{M}$. Значит, хотя бы для одного k справедливо $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E \cap F_k) \notin \mathscr{M}$.

Так как $E \cap F_k \subset Z_{\mathscr{M}_k}$ и $E \cap F_k \in \mathscr{M}_k$, то из 2), из a) и из доминированности $\mathfrak{M} \ll {}_\tau\mathscr{L}$ получаем $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(E \cap F_k) \in \mathscr{M}$, что является противоречием.

Следствием является лемма 7 из [3].

3.4. Следствие. *Пусть $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство, причем $X \in \mathscr{S}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — система мер на $\mathscr{S}$ и λ — σ-конечная мера на $\mathscr{S}$ такая, что $\mathfrak{M} \ll \lambda$. Тогда существует счетная система $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Достаточно принять во внимание, что условие $\mathfrak{M} \ll \lambda$ можно записать в виде $\mathfrak{M} \ll {}_\tau\lambda$, где λ — тождественное преобразование. Другие условия теоремы 3.3, очевидно, выполнены, если к данным мерам взять соответствующие системы множеств меры нуль.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halmos P. R., *Measure theory*, New York 1950.

[2] ~~Rechard O. W.~~, *Invariant measures for many-one transformations*, Duke Math. J. *23* (1956), 477—488.

[3] Halmos P. R., Savage L. J., *Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics*, Ann. Math. Statistics *20* (1949), 225—241.

[4] Дивеев Р. Х., *Некоторые свойства доминированных пространств*, Докл. АН УзССР *3* (1961), 3—6.

[5] Cotlar M., Ricabarra R. A., *Sobre un theorema de E. Hopf*, Rev. Unión mat. Argent. *14* (1949), 49—63.

Поступило 3. 12. 1964.

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského,
Bratislava