MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 1, 1966

ÜBER DIE RELATION „ZWISCHEN" IN VERBÄNDEN

HILDA DRAŠKOVIČOVÁ, Bratislava

Es sei (M, ϱ) ein metrischer Raum, und es seien $x, a, b, c \in M$. Setzen wir $[x; a, b, c] = \varrho(x, a) + \varrho(x, b) + \varrho(x, c)$. Es sei ferner $V(a, b, c)$ die Menge derjenigen Elemente $x \in M$, in denen die Funktion $f(x) = [x; a, b, c]$ das Minimum annimmt. S. P. Avann [1] hat gezeigt, daß metrische Räume, bei denen für jede drei Elemente a, b, c die Menge $V(a, b, c)$ genau ein Element enthält, eine natürliche Verallgemeinerung von distributiven Verbänden darstellen. In dieser Note wird eine Verbandstheoretische Charakterisierung der Menge $V(a, b, c)$ für den Fall der metrischen Verbände angegeben. Dies ermöglicht eine der Menge $V(a, b, c)$ analogische Menge in beliebigen Verbänden zu erklären (wir bezeichnen sie mit $B(a, b, c)$). Wir wollen eine einfache Charakterisierung der modularen und distributiven Verbände mit Hilfe der Menge $B(a, b, c)$ und eine Charakterisierung modularer und distributiver Verbände mit Nullelement durch gewisse ternäre Operationen anführen.

1. Bezeichnungen

In einem metrischen Raum (M, ϱ) wird die Relation $\varrho(a, b) + \varrho(b, c) = \varrho(a, c)$ mit abc bezeichnet. In einem metrischen Verband ist abc mit der Relation

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) = b = (a \cup b) \cap (b \cup c) \tag{1}$$

äquivalent (siehe [3]). Wir werden abc auch in dem Fall schreiben, wenn in einem beliebigen Verband die Relation (1) erfüllt ist. Setzen wir ferner $B(a, b) = \{x | axb\}$, $B(a, b, c) = B(a, b) \,.\, B(b, c) \,.\, B(c, a)$. (¹) Ähnlich wird in einem metrischen Raum die Menge aller Elemente x, für die axb, bxc und cxa gilt, mit $B^*(a, b, c)$ bezeichnet. In einem metrischen Verband gilt $B(a, b, c) = B^*(a, b, c)$.

(¹) Mit . bezeichnen wir den mengentheoretischen Durchschnitt.

2. Eigenschaften der Menge $B(a, b, c)$

Satz 1. *Ist in einem metrischen Raum $B^*(a, b, c) \neq \emptyset$, so gilt $B^*(a, b, c) = V(a, b, c)$.*

Beweis. Die Relation $B^*(a, b, c) \subset V(a, b, c)$ folgt aus [1, Lemma 1]. Es sei nun $x \in V(a, b, c)$. Gälte axb nicht, so würde $\varrho(a, x) + \varrho(x, b) > \varrho(a, b)$, $\varrho(x, b) + \varrho(x, c) \geqslant \varrho(b, c)$, $\varrho(x, c) + \varrho(a, x) \geqslant \varrho(c, a)$ und hiermit

$$[x; a, b, c] > \tfrac{1}{2}[\varrho(a, b) + \varrho(b, c) + \varrho(c, a)]. \tag{2}$$

Es sei $s \in B^*(a, b, c)$. Nach [1, Lemma 1] gilt $[s; a, b, c] = \frac{1}{2}[\varrho(a, b) + \varrho(b, c) + \varrho(c, a)]$, was zum Widerspruch mit (2) führt. Es gilt daher axb und ähnlich beweist man bxc, cxa, so daß $B^*(a, b, c) = V(a, b, c)$ gilt.

Satz 2. *Ein Verband S ist genau dann modular, wenn $B(a, b, c) \neq \emptyset$ für jede $a, b, c \in S$.*

Beweis. Es sei S modular und $s = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)$. Es gilt $(a \cup s) \cap (s \cup b) = \{a \cup [(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)]\} \cap \{b \cup [(a \cup b) \cap$ $\cap (b \cup c) \cap (c \cup a)]\} = [(a \cup b) \cap (c \cup a) \cap (a \cup b \cup c)] \cap [(a \cup b) \cap (b \cup$ $\cup c) \cap (a \cup b \cup c)] = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = s$, $(a \cap s) \cup (b \cap s) =$ $= [a \cap (b \cup c)] \cup [b \cap (c \cup a)] = \{[a \cap (b \cup c)] \cup b\} \cap (c \cup a) = (a \cup b) \cap$ $\cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = s$, also $s \in B(a, b)$. Ähnlich beweist man $s \in B(a, c)$, $s \in B(b, c)$, so daß $s \in B(a, b, c)$. Ist der Verband nicht modular, so enthält er einen nichtmodularen Teilverband, der aus Elementen a, b, c, u, v besteht mit $u < a < c < v$, $u < b < v$. Wir behaupten, daß $B(a, b, c) = \emptyset$. In der Tat, für ein Element $x \in B(a, b, c)$ müßte $a = a \cap c \leqslant (a \cup x) \cap (x \cup c) =$ $= x = (a \cap x) \cup (x \cap c) \leqslant a \cup c = c$ gelten. Daraus folgt $c = v \cap c = (b \cup$ $\cup x) \cap (x \cup c) = x = (b \cap x) \cup (x \cap a) = u \cup a = a$ — ein Widerspruch.

Satz 3. *In einem metrischen Verband gilt $V(a, b, c) = B(a, b, c)$ für beliebige Elemente a, b, c.*

Beweis. Der Satz folgt aus den Sätzen 1 und 2.

Satz 4. *Ein Verband S ist genau dann distributiv, wenn für jede $a, b, c \in S$ die Menge $B(a, b, c)$ genau ein Element enthält.*

Beweis. Nach [2, Kap. IX, Lemma 2] gilt in einem distributiven Verband $B(a, b, c) = \{(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)\}$. Es sei nun S nicht distributiv. Wäre S nicht modular, so wäre nach dem Satz 2 $B(a, b, c) = \emptyset$ für gewisse Elemente $a, b, c \in S$. Ist S modular, so enthält er einen nichtdistributiven Teilverband mit fünf Elementen u, v, a_1, a_2, a_3; $u < a_i < v$ $(i = 1, 2, 3)$. Dann gilt $u, v \in B(a_1, a_2, a_3)$, so daß in einem nichtdistributiven Verband Elemente a, b, c existieren, für die die Menge $B(a, b, c)$ nicht einelementig ist.

Korollar (vgl [1]). *Ein metrischer Verband S ist genau dann distributiv, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:* (V) *Zu je drei Elementen $b, c, d \in S$ gibt es ein Element $s \in S$, so daß für jedes $x \in S$, $x \neq s$, gilt:* $[s; b, c, d] < [x; b, c, d]$.(²)

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Sätzen 4 und 1.

3. Charakterisierung der distributiven Verbände durch eine ternäre Operation

Definition [1]. *Eine Menge I mit einer ternären Operation (a, b, c) heiße ein ternärer distributiver Halbverband (kurz TDH), wenn in diesem System die folgenden drei Identitäten erfüllt werden:*

(T1) $(a, a, b) = a$

(T2) (a, b, c) *bleibt bei jeder Permutation der Elemente a, b, c unverändert*

(T3) $(a, (b, c, d), e) = ((a, b, e), c, (a, d, e))$.

M. Sholander hat bewiesen [6, Theorem (5. 2)]:

Ein distributiver Verband kann als TDH S charakterisiert werden, der der folgenden Bedingung (O) genügt.

(O) *S enthält Folgen $u_1, u_2, \ldots$ und $v_1, v_2, \ldots$, so daß es zu jedem $a \in S$ eine Ordnungszahl $n(a)$ mit der Eigenschaft $(u_i, a, v_j) = a$ für jede $i, j \geqslant n(a)$ gibt. Dabei hat die ternäre Operation des entsprechenden TDH in dem betrachteten Verband die folgende Bedeutung:*

$$(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a).$$

Anmerkung. Die hier zitierte Formulierung der Bedingung (O) in [6] ist unkorrekt. Die Bedingung (O) wird in jedem Verband trivial erfüllt: Es genügt die Folgen $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ beliebig zu wählen und zu jedem Element a des betrachteten Verbandes die Ordungszahl $n(a)$ so zu wählen, daß $n(a)$ größer ist als alle Indexe der Folgen $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. Offenbar soll die Bedingung (O) wie folgt lauten:

(O′) *Es gibt in dem betrachteten TDH solche (transfiniten) Folgen $(u_n : n \in A)$, $(v_n : n \in A)$, daß zu jedem Element a dieses TDH eine Ordnungszahl $n(a) \in A$ existiert, so daß $(u_i, a, v_j) = a$ für jede $i, j \in A$, $i, j \geqslant n(a)$.*

Die Behauptung von Sholander ist in einer Richtung unrichtig: Die Bedin-

(²) In der Formulierung der Eigenschaft (V) in [1] wird noch die Eindeutigkeit von s ausdrücklich verlangt. Es ist jedoch klar, daß aus der oben angegebenen Formulierung die Eindeutigkeit von s folgt.

gung (O′) muß nicht in jedem distributiven Verband erfüllt werden, wie das folgende Beispiel zeigt.(3)

Beispiel. Es sei S der Verband aller endlichen Teilmengen des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$ (einschließlich der leeren Menge) in bezug auf die Operationen des mengentheoretischen Durchschnittes und der mengentheoretischen Vereinigung. Angenommen, es existieren in S (transfinite) Folgen $(u_n : n \in A)$, $(v_n : n \in A)$ mit der angegebenen Eigenschaft. Nach der Voraussetzung gibt es zu jedem $a \in S$ einen Index $n(a) \in A$, so daß $a = (u_i, a, v_i) \leqslant u_i \cup v_i = w_i$ für $i \geqslant n(a)$. Betrachten wir die Elemente $a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\right\} \in S$, $n = 1, 2, \ldots$. Für $i \geqslant n(a_j) = n_j$ gilt $a_j \leqslant w_i$. Wäre die Menge N der Indexe n_j (j durchläuft die Menge der natürlichen Zahlen) nicht mit A konfinal, so existierte ein Index $m \in A$, so daß $n_j \leqslant m$ für alle natürliche Zahlen j. Dann gälte $a_j \leqslant w_m$ für jede natürliche Zahl j im Widerspruch zur Endlichkeit der Menge w_m. Somit ist die Menge N mit A konfinal. Die mengentheoretische Summe s aller Mengen w_{n_j}, $n_j \in N$, ist eine abzählbare Menge. Dann existiert zu jeder Zahl $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ ein Index $n(\alpha) \in N$, so daß $\{\alpha\} \leqslant w_{n(\alpha)}$, hiermit $\alpha \in s$, was ein Widerspruch ist.

Doch können distributive Verbände mit Nullelement durch folgendes Axiom charakterisiert werden:

(T4) *Es gibt ein Element $o \in I$ und zu je zwei Elementen a, $b \in I$ existiert ein Element $u \in I$, so daß $(o, a, u) = a$, $(o, b, u) = b$.*

Es gilt der folgende

Satz 5. *Es sei I ein TDH, der das Axiom (T4) erfüllt. Dann können in I die Operationen $\cup$ und $\cap$ so erklärt werden, daß $(I, \cap, \cup)$ ein distributiver Verband mit Nullelement ist worin $(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$. Umgekehrt, jeder distributive Verband mit Nullelement ist in bezug auf die Operation $(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$ ein TDH und genügt der Bedingung* (T4).

Beweis. Für $a, b \in I$ erklären wir $a \cap b = (a, o, b)$. Es sei u ein beliebiges Element aus (T4). Setzen wir $a \cup b = (a, u, b)$. Wir wollen zeigen, daß $a \cup b$ von der Wahl von u nicht abhängt.

Es seien u_1, u_2 Elemente mit $(o, a, u_i) = a$, $(o, b, u_i) = b$ für $i = 1, 2$. a) Zuerst betrachten wir den Spezialfall, wenn $(o, u_1, u_2) = u_1$ gilt. Mit Hilfe von (T2) und (T3) ergibt sich dann $(a, u_2, b) = ((o, a, u_1), u_2, (o, b, u_1)) = (o, (a, u_2, b), u_1) = (o, (a, b, u_2), u_1) = ((o, a, u_1), b, (o, u_1, u_2)) = (a, b, u_1) = (a, u_1, b)$. b) u_1, u_2 seien nun beliebig. Nach (T4) gibt es ein Element u mit $(o, u_i, u) = u_i$ $(i = 1, 2)$. Mit Hilfe von (T1) und (T3) ergibt sich $(o, a, u) = (o, (o, a, u_i), u) = ((o, o, u), a, (o, u_i, u)) = (o, a, u_i) = a$ $(i = 1, 2)$. Ähnlich bekommt man $(o, b, u) = b$. Nach a) gilt $(a, u_1, b) = (a, u, b) = (a, u_2, b)$.

Nun wollen wir zeigen, daß für beliebige Elemente $a, b, c \in I$ die Verbandsidentitäten und die Distributivität erfüllt sind. Zuerst gibt es ein Element $i \in I$ mit $(o, a, i) = a$, $(o, b, i) = b$, $(o, c, i) = c$. Es gibt nämlich zu den Elementen a, b nach (T4) ein Element $u \in I$, so daß $(o, a, u) = a$, $(o, b, u) = b$. Zu den Elementen c, u gibt es ein $i \in I$ mit $(o, u, i) = u$, $(o, c, i) = c$. Dann gilt $(o, a, i) = (o, (o, a, u), i) = ((o, o, i), a, (o, u, i)) = (o, a, u) = a$. Analog ergibt sich $(o, b, i) = b$. Die Menge $\{x \mid (o, x, i) = x\}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 4 in [2, Kap. IV] und bildet somit einen distributiven Verband in bezug auf die Operationen $x \cap y = (x, o, y)$, $x \cup y = (x, i, y)$. Hieraus folgt, daß für die Elemente a, b, c die Verbandsidentitäten und das distributive Gesetz erfüllt sind, sowie auch die Relation $(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$.

Die Behauptung, daß ein distributiver Verband mit Nullelement ein TDH ist und (T4) erfüllt, ist klar.

(3) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn M. Kolibiar, der mit seinen Ratschlägen zur Besserung dieser Arbeit beigetragen hat.

5. Charakterisierung der modularen Verbände durch eine ternäre Operation

J. Hashimoto hat den folgenden Satz bewiesen [4, Th. 2]:

Es sei A ein algebraisches System mit einer ternären Operation $(a\ b\ c)$ und mit den Elementen O, I, so daß folgende Identitäten gelten:

(1) $(OaI) = a$

(2) $(baa) = a$

(3) $((ade)b(cde)) = (a(bed)(ced))$.

Erklärt man nun

$$a \cup b = (aIb), \qquad a \cap b = (aOb), \tag{4}$$

so ist $(A, \cap, \cup)$ ein modularer Verband mit dem kleinsten und dem größten Element, worin

(5) $(abc) = ((b \cup c) \cap a) \cup (b \cap c) = (b \cup c) \cap (a \cup (b \cap c))$

gilt. Umgekehrt erfüllt die Operation (5) in einem modularen Verband mit dem kleinsten und dem größten Element die Identitäten (1) bis (4).

Im Beweis dieses Satzes zeigte J. Hashimoto, daß aus (2) und (3) folgt:

(6) $(aba) = a = (aab)$

(7) $(ade) = (aed)$

(8) $((adc)bc) = (a(bcd)c) = (a(bdc)c)$.

Definition. *Eine Menge N mit einer ternären Operation (abc), die die Identitäten* (2) *und* (3) *erfüllt, heiße ein ternärer modularer Halbverband (kurz TMH).*

Die modularen Verbände mit Nullelement können wie folgt charakterisiert werden:

Satz 6. *Es sei N ein TMH, der das folgende Axiom erfüllt:*

(9) *Es gibt ein Element $o \in N$ und zu je zwei Elementen $a, b \in N$ existiert ein Element $u \in N$, so daß $(oau) = a$, $(obu) = b$.*

Dann können in N operationen $\cap$ und $\cup$ erklärt werden, so daß $(N, \cap, \cup)$ ein modularer Verband mit Nullelement o ist und (5) *gilt. Umgekehrt bildet ein modularer Verband mit Nullelement o in bezug auf die Operation* (5) *einen TMH mit der Eigenschaft* (9).

Beweis. Wir wollen zuerst einige Identitäten für TMH nachweisen. Sei u ein zu den Elementen $a, b \in N$ nach (9) angehöriges Element. Mit Hilfe von (6), (9); (3), (7); (2), (9) ergibt sich

(10) $(uoa) = ((uau)o(oau)) = (u(oau)(oau)) = (oau) = a$

und ähnlich $(uob) = b$. Durch Einsetzen $e = a$ in (3) ergibt sich unter Berücksichtigung von (7) und (6).

(11) $(a(cda)b) = (ab(cda)) = ((ada)b(cda)) = (a(bad)(cad)) = (a(cda)(bda))$.

Ferner gilt

(12) $(aob) = (o(aob)(aob)) = (o((uao)bo)(aob))$	nach (2); (10), (1)
$= (o(u(boa)o)((aao)bo))$	nach (8), (6), (7)
$= (o(uo(boa))(ao(boa)))$	nach (7), (8)
$= (o(a(boa)o)(u(boa)o))$	nach (7)
$= (o(a(boa)o)u)$	nach (11)
$= (o(abo)u)$	nach (8), (6)
$= (o(uob)(aob))$	nach (11), (7)
$= (ob(aob))$	nach (10)
$= (o(aob)b)$	nach (7)
$= ((oob)ab) = (oab)$	nach (8), (6).

Aus (12) und (7) folgt

(13) $(aob) = (boa)$.

Erklären wir nun $a \cap b = (aob)$, $a \cup b = (aub)$. Wir wollen zeigen, daß $a \cup b$ von der Wahl des Elementes u nicht abhängt. Betrachten wir Elemente u_1, u_2 mit

(14) $(oau_i) = a$, $(obu_i) = b$ für $i = 1, 2$.

a) Es sei zunächst $(ou_1u_2) = u_1$. Da $(ou_2u_2) = u_2$, folgt nach (12) und (7)

(15) $(u_2ou_1) = (ou_1u_2)$.

Durch sukzessive Anwendung von (14), (12); (3), (7); (15,) (12) und (14) ergibt sich

$(au_2b) = ((aou_1)u_2(bou_1)) = (a(u_2ou_1)(bou_1)) = (a(ou_1u_2)b) = (au_1b)$.

b) u_1, u_2 seien nun beliebig. Nach (9) gibt es ein Element u mit $(ou_iu) = u_i$, $i = 1, 2$. Durch sukzessive Anwendung von (14), (12); (7); (11), (7); (12), (7), (14); (7), (14) ergibt sich $(oau) = (o(aou_i)u) = (o(au_io)u) = (o(uou_i)(aou_i)) = (o(ou_iu)a) = (ou_ia) = (oau_i) = a$ und ähnlich $(obu) = b$. Mit a) ergibt sich nun $(au_1b) = (aub) = (au_2b)$.

Schließlich wollen wir zeigen, daß für beliebige Elemente $x, y, z \in N$ die Verbandsidentitäten und das modulare Gesetz erfüllt sind. Zuerst gibt es ein Element $i \in N$ mit $(oxi) = x$, $(oyi) = y$, $(ozi) = z$. In der Tat: Zu den Elementen x, y gibt es nach (9) ein Element u mit $(oxu) = x$, $(oyu) = y$. Ferner gibt es zu den Elementen u, z ein Element i mit $(oui) = u$, $(ozi) = z$. Es gilt nun $(oxi) = (o(xuo)i) = (o(iuo)(xuo)) = (o(oui)(xou)) = (oux) = (oxu) = x$ (wir haben der Reihe nach (9), (12), (7); (11), (7); (12); (7); (9) angewendet). Ähnlich ergibt sich $(oyi) = y$. Die Menge $\{t|(oti) = t\}$ erfüllt nun die Voraussetzungen des Satzes von Hashimoto und bildet daher einen modularen Verband, in dem (5) gilt. Hiermit sind für x, y, z die Verbandsidentitäten, das modulare Gesetz, sowie die Relation (5) erfüllt.

Es ist klar, daß umgekehrt in einem modularen Verband mit Nullelement o die Operation (5) den Bedingungen (2), (3) und (9) genügt. Damit ist der Beweis beendet.

6. Bemerkungen

In der Arbeit [5] werden Systeme mit einer ternären Relation untersucht. Es sei S eine Menge mit einer ternären Relation $[abc]$. Für $a, b \in S$ bezeichnen wir mit $M(a, b)$ die kleinste Teilmenge X von S mit folgenden Eigenschaften:

(1) $a, b \in X$

(2) aus $x, y \in X$ und $[xuy]$ folgt $u \in X$.

(Offenbar gibt es eine solche Menge.) In der Arbeit [5] ist eine Charakterisierung der Verbände durch eine, gewisse Eigenschaften besitzende, ternäre Relation angegeben. Einige dieser Eigenschaften sind in TDH für die Relation $(a, x, b) = x$ erfüllt. Es sind dies die folgenden Eigenschaften:

(B) *für beliebige $a, b, c \in S$ gilt $M(a, b) \,.\, M(b, c) \,.\, M(c, a) \neq \emptyset$*

(C) $[acb]$ gilt genau dann, wenn $M(a, c) \,.\, M(b, c) = \{c\}$.

Es gilt nämlich der

Satz 7. *Es sei S ein* TDH. *Für $a, x, b \in S$* setzen wir $[axb]$ *genau wenn* $(a, x, b) = x$. *Dann genügt diese ternäre Relation den Bedingungen* (B) *und* (C).

Beweis. Die Eigenschaft (B) folgt aus der folgenden Behauptung, die unmittelbar aus [6, (2.8)] folgt:

(3) *Zu jeden drei Elementen a, b, c gibt es ein Element $x = (a, b, c)$, so daß $[axb]$, $[bxc]$, $[cxa]$.*

Die Eigenschaft (C) wollen wir mit Hilfe von (3) bewiesen. Es sei $M(a, c) \,.\, M(c, b) = \{c\}$. Nach (3) ist $(a, b, c) \in M(a, c) \,.\, M(c, b)$, also $(a, b, c) = c$. Es sei nun $(a, c, b) = c$. Da $(a, c, c) = (c, c, b) = c$, ist $c \in M(a, c) \,.\, M(c, b)$. Es sei nun $s \in M(a, c) \,.\, M(c, b)$. Da $(a, s, c) = s = (c, s, b)$, gilt $s = (a, s, c) = (a, (c, s, b), c) = ((a, c, c), s, (a, b, c)) = (c, s, c) = c$. Hieraus folgt $M(a, c) \,.\, M(c, b) = \{c\}$.

LITERATUR

[1] Avann S. P., *Metric ternary distributive semilattices*, Proc. Amer. Math. Soc. *12* (1961), 407—414.
[2] Birkhoff G., *Lattice Theory*, New York 1948.
[3] Glivenko V., *Géométrie des systèmes de choses normées*, Amer. J. Math. *58* (1936), 799—828.
[4] Hashimoto J., *A ternary operation in lattices*, Math. Japon. *2* (1951), 49—53.
[5] Kolibiar M., *Charakterisierung der Verbände durch die Relation „zwischen"*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. *4* (1958), 89—100.
[6] Sholander M., *Medians and betweenness*, Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 801—807.

Eingegangen am 29. 10. 1964.

Katedra numerickej matematiky a matematickej štatistiky
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského,
Bratislava