MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 1, 1966

ZOVŠEOBECNENIE HERMESOVHO VZORCA

ROBERT KARPE, Brno

Netto [1] na str. 136 uvádza kombinatorický vzťah (22), pochádzajúci od Hermesa. V tomto článku odvodíme všeobecnejšiu formulu, a to priamou metódou — bez použitia rekurentných vzorcov.

Uvažujme o skupine prvkov:

$$A_1C_1A_2C_2 \ldots A_{k-1}C_{k-1}A_k. \tag{1}$$

Do tejto $(2k-1)$-miestnej variácie chceme teraz začleniť r prvkov B tak, aby každá čiastočná skupina prvkov B nasledovala vždy hneď po niektorom prvku A. (Čiastočných skupín prvkov B môže byť maximálne min (r, k), minimálne jedna.)

Napríklad:

$$A_1BBC_1A_2BBBC_2A_3C_3A_4BC_4A_5C_5A_6 \ldots A_kBB. \tag{2}$$

Položme si úlohu: zistiť koľkými spôsobmi možno takto začleniť všetkých r prvkov B.

Aby sme úlohu vyriešili, opatríme prvky B každej čiastočnej skupiny vždy tým istým indexom, aký je u prvku A, ktorý ju bezprostredne predchádza; teda u uvedenej variácie:

$$A_1B_1B_1C_1A_2B_2B_2B_2C_2A_3C_3A_4B_4C_4A_5C_5A_6 \ldots A_kB_kB_k. \tag{3}$$

Ak skúmame u každej takejto variácie len indexy prvkov B, dostaneme tieto kombinácie r-tej triedy z k prvkov s opakovaním:

$$\begin{array}{c} 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1 \\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ k,\ k,\ \ldots,\ k,\ k \end{array}$$

Bude ich zrejme $\binom{k+r-1}{r}$.

Uvažujme teraz o súbore všetkých variácií, ktoré vzniknú opísaným spôsobom z (1):

Vykonáme substitúciu v každej variácii:

1. Za každý prvok A_i dosadíme a prvkov x.
2. Za každý prvok B_i dosadíme b prvkov x.
3. Za každý prvok C_i dosadíme jeden prvok y.

Takto dostaneme skupiny o $(ka + rb + k - 1)$ prvkoch, ktoré obsahujú vždy k skupín vytvorených z prvkov x, navzájom oddelených jedným prvkom y.

Počet členov súvislých skupín zložených z prvkov x je daný vždy niektorým z $r + 1$ prvých členov aritmetickej postupnosti:

$$A(a, b) = a,\ a + b,\ a + 2b,\ \ldots \tag{4}$$

Teraz začleníme do každej variácie $(ka + rb + k)$ jednotiek, tak aby medzi dvoma najbližšími jednotkami sa vždy nachádzal jediný prvok x alebo y.

Žiadajme teraz, aby každý prvok x bol príkazom „vykonať súčet" a každý prvok y príkazom „naznačiť súčet". Viď príklad: $\underbrace{1\,x\,1\,x\,1}\,y\,1\,y\,\underbrace{1\,x\,1} \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 + 1 + 2$.

Tým vzniknú z našich skupín všetky možné variácie k-tej triedy, s opakovaním; súčet prvkov každej takejto variácie je n, kde

$$n = ka + rb + k. \tag{5}$$

Prvky, z ktorých sú tieto variácie zostavované, sú z aritmetickej postupnosti:

$$A(a + 1, b) = a + 1,\ a + 1 + b,\ a + 1 + 2b,\ \ldots \tag{6}$$

Počet všetkých novovzniknutých variácií je, pravda, vždy

$$\binom{k + r - 1}{r} = \binom{r + k - 1}{k - 1}, \tag{7}$$

takže podľa symboliky, uvedenej v citovanej knihe, píšeme:

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A(a + 1, b)\right) = \binom{r + k - 1}{k - 1} \tag{8}$$

a hovoríme o variáciách k-tej triedy, súčtu n, zostavovaných z prvkov aritmetickej postupnosti (6).

Ak dosadíme sem za r podľa (5) a píšeme $c = a + 1$, dostaneme výsledný vzorec:

$$\Phi^{(k)}\left(\int n;\ A(c,\, b)\right) = \binom{\dfrac{n - ck}{b} + k - 1}{k - 1}, \tag{9}$$

majúci zmysel, pokiaľ je pravá strana celým číslom.

Poznámka. Pre $b = 1$ redukuje sa (9) na Hermesov vzorec.

Príklad na zovšeobecnený Hermesov vzorec:

Volíme: $n = 21$, $k = 3$, $c = 2$, $b = 5$.

$$\Phi^{(3)}\left(\int 21;\ A(2{,}5)\right) = \binom{3+2}{2} = 10.$$

$$A(2{,}5) = 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ \ldots$$

$$21 = \left.\begin{array}{r} 17 + 2 + 2 \\ 2 + 17 + 2 \\ 2 + 2 + 17 \\ 12 + 7 + 2 \\ 12 + 2 + 7 \\ 7 + 12 + 2 \\ 7 + 2 + 12 \\ 2 + 12 + 7 \\ 2 + 7 + 12 \\ 7 + 7 + 7 \end{array}\right\}\ \text{10 variácií.}$$

LITERATÚRA

[1] Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik*, Berlin 1927.

Došlo 13. 5. 1964.

Katedra matematiky strojní fakulty
Vysokého učení technického,
Brno

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ХЕРМЕСА

Роберт Карпе

Резюме

Статья содержит обобщение одного известного комбинаторного соотношения (см. [1], стр. 136, формула (22)) заданное формулой (9), имеющей смысл тогда и только тогда, когда правая сторона ее является целым числом.