MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 4, 1965

О ПРОБЛЕМЕ В. МНИХА

ЭДУАРД ТИГРАНОВИЧ АВАНЕСОВ, Иваново (СССР)

Как известно [1], проблема Мниха существования рациональных решений системы уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1x_2x_3 = 1 \tag{1}$$

разрешена в отрицательном смысле.

Пусть R — поле рациональных чисел. Расширение поля R, полученное присоединением элемента $\sqrt{d}$, где d не является квадратом, есть квадратичное поле $R(\sqrt{d})$.

В работе [2] найдены решения (1) в некоторых квадратичных полях, и рассмотрена система сравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1 (\text{mod } p), \quad x_1x_2x_3 \equiv 1 (\text{mod } p), \tag{2}$$

где p — нечетное простое число, для которой (см. и [3]) установлена разрешимость в целых числах при любом $p \neq 3$.

Шинцель [4] доказал, что система уравнений

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = 1, \quad x_1x_2 \ldots x_s = 1 \tag{3}$$

имеет для всякого $s > 3$ бесконечное число рациональных решений; например, при $s = 4$ числа

$$x_1 = -\frac{1}{n^2 - 1}, \quad x_2 = \frac{n^2}{n^2 - 1}, \quad x_3 = \frac{1 - n^2}{n}, \quad x_4 = \frac{n^2 - 1}{n},$$

где $n > 1$ — любое натуральное число, удовлетворяют (3).

Можно указать примеры квадратичных полей, в которых система (3) при $s = 4$ разрешима. Например,

a) $x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$, $\quad x_{3,4} = -\frac{7}{2} \pm 2\sqrt{3}$;
b) $x_{1,2} = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{15})$, $\quad x_{3,4} = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{15})$;
c) $x_{1,2} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})$, $\quad x_{3,4} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17})$;
d) $x_{1,2} = \frac{1}{4}(7 \pm \sqrt{57})$, $\quad x_{3,4} = \frac{1}{4}(-5 \pm \sqrt{57})$, и т.д.

Легко устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. *Существуют действительные квадратичные поля $R(\sqrt{d})$, в которых система* (3) *при $s = 4$ разрешима.*

Доказательство. Пусть $f(x) = 16x^4 - 8x^3 - 31x^2 - 8x + 16$. Очевидно, что $f(x) > 0$ при любом целом $x \neq 1$. Так как $f(x) = (4x^2 + 7x + 4)(4x^2 - 9x + 4)$, то при всяком целом $x \equiv 1 (\text{mod } 4)$ каждая скобка в разложении $f(x)$ дает остаток 3 при делении на 4 и не может быть квадратом целого числа. Предположим при этом, что $f(x) = t^2$, где t — целое число, тогда наибольший делитель множителей $f(x)$ равен $D = (4x^2 + 7x + 4, 4x^2 - 9x + 4) \neq 1$, причем D должно иметь делитель $\delta \equiv 3 (\text{mod } 4)$. Так как D есть и делитель разности $(4x^2 + 7x + 4) - (4x^2 - 9x + 4) = 16x$, то отсюда вытекает, что δ — делитель x. Если теперь

$$m = m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} \ldots m_k^{\alpha_k}, \tag{4}$$

где все α_j — целые неотрицательные и каждое $m_j \equiv 1 (\text{mod } 4)$, то равенство $f(m) = t^2$ невозможно ни при каком целом значении t. В квадратичном поле $R(\sqrt{d})$, где $d = f(m) > 0$, а целое число $m \neq 1$ вида (4), рассмотрим числа

$$x_{1,2} = \frac{1}{4m}(4m^2 + m - 4 \pm \sqrt{d}), \quad x_{3,4} = \frac{1}{4m}(-4m^2 + m + 4 \pm \sqrt{d}).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что эти числа удовлетворяют системе (3) при $s = 4$, и доказательство теоремы завершено.

Остается открытым вопрос о том, является ли бесконечным число квадратичных полей, рассмотренных в теореме 1. Заметим, что при $m = 1$ получается мнимое квадратичное поле $R(i\sqrt{15})$, см. приведенный выше пример b).

Перейдем теперь к системе (1). Исследование вопроса о разрешимости системы (1) в высших алгебраических числовых полях, в частности, в чисто кубических полях представляет большой интерес. Мною обнаружена следующая тройка чисел:

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(1 + \sqrt[3]{26}), \quad x_2 = \tfrac{1}{3}(1 + \varepsilon \sqrt[3]{26}), \quad x_3 = \tfrac{1}{3}(1 + \varepsilon^2 \sqrt[3]{26}), \text{ где } \varepsilon^3 = 1, \ \varepsilon \neq 1,$$

являющаяся решением (1). Это решение принадлежит композиту чисто кубического поля $R(\sqrt[3]{26})$ и классического поля Эйзенштейна, образованного кубическим корнем из единицы. Интересно найти другие конкретные, уже чисто кубические поля, в которых система (1) разрешима.

Аналогичным путем можно получить и решение (3) при $s = 4$ по формулам:

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{4}\left[1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 \pm i)\sqrt[4]{255}\right], \quad x_{3,4} = \tfrac{1}{4}\left[1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(-1 \pm i)\sqrt[4]{255}\right].$$

При $s = 6$ система (3) имеет решения

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{6}\left(1 \pm i\sqrt[6]{46655}\right), \quad x_{3,4,5,6} = \tfrac{1}{6}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\pm \sqrt{3} \pm i\right)\sqrt[6]{46655}\right] \text{ и т. д.}$$

Повидимому, имеет место и общая теорема.

Теорема 2. *Система уравнений* (3) *разрешима по формулам:*

$$x_j = \frac{1}{s}\left(1 + \varepsilon_j \sqrt[s]{s^s - 1}\right), \qquad j = 1,2,\ldots, s,$$

где ε_j — различные корни степени s из -1 при четном s и из числа $+1$ при нечетном s.

Обозначим через Q некоммутативное поле кватернионов над полем рациональных чисел R. Тогда можно доказать теорему, являющуюся обобщением соответствующей теоремы 2 (см. [2]).

Теорема 3. *Для всякого $r \in R$ система уравнений*

$$(5) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k+1} = r, \quad x_1 x_2 \ldots x_{2k+1} = r$$

имеет бесконечное число решений в Q.

Доказательство. Действительно, пусть

$$x_{2j-1,2j} = \pm \frac{1}{a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 + d_j^2}\left[(a_j^2 + b_j^2 - c_j^2 - d_j^2)i_1 + 2(a_j c_j - b_j d_j)i_2 + \right.$$
$$\left. + 2(a_j d_j + b_j c_j)i_3\right], \quad j = 1,2,\ldots,k; \quad x_{2k+1} = r.$$

Здесь a_j, b_j, c_j, d_j — произвольные рациональные числа из R, не равные нулю одновременно. Прямой проверкой убеждаемся в том, что указанные значения неизвестных удовлетворяют системе (5), и теорема доказана.

В заключение рассмотрим систему сравнений

$$(6) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p), \quad x_1 x_2 \ldots x_s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p),$$

где p — нечетное простое число. Справедлива следующая общая теорема о разрешимости (6) в целых числах в T_p, где через T_p обозначено поле вычетов по mod p.

Теорема 4. *Система сравнений* (6) *для всех s, начиная с некоторого, разрешима в T_p.*

Доказательство. *Случай* ***A***. $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Будем искать решение (6) в виде

$$(7) \qquad x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_j \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p),$$

$$(8) \qquad x_{j+1} \equiv x_{j+2} \equiv \ldots \equiv x_s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

Тогда при $s \equiv 4k + 1 (\mathrm{mod}\ p)$, где $k = 0,1,2,\ldots, \frac{1}{4}(p-1)$, будет $j = 2k$. Если $s \equiv 4k + 2 (\mathrm{mod}\ p)$, $k = 0,1,2,\ldots,\frac{1}{4}(p-5)$, то $j = \frac{1}{2}(3p + 4k + 1)$. Для $s \equiv 4k + 3 (\mathrm{mod}\ p)$ и $k = 0,1,2,\ldots,\frac{1}{4}(p-5)$ будет $j = p + 2k + 1$. И наконец, в случае $s \equiv 4k + 4 (\mathrm{mod}\ p)$ и $k = 0,1,2,\ldots,\frac{1}{4}(p-5)$ имеем: $j = \frac{1}{2}(p + 4k + 3)$.

Случай ***B***. $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Система (6) разрешима в T_p с помощью формул (7), (8) при следующих условиях:

$$j = \begin{cases} \left.\begin{array}{r} 2k \ \text{ при } \ s \equiv 4k + 1 (\mathrm{mod}\ p), \\ \frac{1}{2}(p + 4k + 1), \text{ если } s \equiv 4k + 2 (\mathrm{mod}\ p), \\ p + 2k + 1 \ \text{ для } \ s \equiv 4k + 3 (\mathrm{mod}\ p), \end{array}\right\} k = 0,1,2,\ldots, \frac{1}{4}(p-3), \\ \frac{1}{2}(3p + 4k + 3), \text{ если } s \equiv 4k + 4 (\mathrm{mod}\ p), \quad k = 0,1,2,\ldots,\frac{1}{4}(p-7). \end{cases}$$

Докажем, например, ***A***; $s \equiv 4k + 2 (\mathrm{mod}\ p)$, $k = 0,1,2,\ldots, \frac{1}{4}(p-5)$. Пусть $s = mp + 4k + 2$. Положим в (7) $j = \frac{1}{2}(3p + 4k + 1)$, тогда в (8) число неизвестных равно

$$s - j = mp + 4k + 2 - \tfrac{1}{2}(3p + 4k + 1) = (m - \tfrac{3}{2})p + 2k + \tfrac{3}{2}.$$

Так как j четно, то $x_1 x_2 \ldots x_j \equiv x_1 x_2 \ldots x_j x_{j+1} \ldots x_s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$; кроме того, $x_1 + x_2 + \ldots + x_s = (x_1 + x_2 + \ldots + x_j) + (x_{j+1} + \ldots + x_s) \equiv -\frac{1}{2}(3p + 4k + 1) + (m - \frac{3}{2})p + 2k + \frac{3}{2} = (m - 3)p + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, что и требовалось доказать.

Доказательства остальных пунктов проводятся аналогично.

Замечание. Указанные в теореме 4 значения j являются наименьшими возможными значениями s в соответствующем классе вычетов по mod p. Для меньших значений s вопрос остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cassels J. W. S., *On a diofantine equation*, Acta arithm. *6* (1960), 47–52.

[2] Sedláček J., *Několik poznámek k problému W. Mnicha*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 97–102.

[3] Schwarz Š., *O jednej sústave kongruencií*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 103–104.

[4] Sierpiński W., *Remarques sur le travail de M.J.W.S. Cassels „On a diophantine equation"*, Acta arithm. *6* (1961), 469–471.

Поступило 6. 11. 1964.

Кафедра математики
Ивановского педагогического института,
Иваново, СССР

ON A PROBLEM OF W. MNICH

Eduard T. Avanesov

Summary

We consider the system of equations

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = 1, \quad x_1 x_2 \ldots x_s = 1 \tag{1}$$

and

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = r, \quad x_1 x_2 \ldots x_s = r, \tag{2}$$

where r is a given rational number.

First the existence of quadratic fields $R(\sqrt{d})$ over the field of rational numbers is proved for which (1) with $s = 4$ has a solution. (Here $d > 0$ is a non-square.)

Some particular cases of (1) having solutions in fields of higher order than 2 are given.

Further, for an odd s and any $r \in R$, the existence of an infinite number of solutions of (2) in the field of quaternions over the rational numbers is shown.

Finally, in the field of residue classes mod p, a constructive proof for the existence of solutions of (1) is given.