MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 4, 1965

GRAF SYSTÉMU TĚTIV DANÉ KRUŽNICE

BOHDAN ZELINKA, Liberec

V tomto článku je studován graf, jehož množinou uzlů je určitá podmnožina množiny tětiv dané kružnice, přičemž dva různé uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, jestliže jim odpovídající tětivy mají společný bod. Studium takovýchto grafů bylo navrženo A. Kotzigem na kolokviu o teorii grafů v Halle roku 1960.

Budiž dána kružnice k a budiž $\mathscr{T}$ množina jejích tětiv. Symbolem G_k označíme graf, jehož množinou uzlů je $\mathscr{T}$ a dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, jestliže jim odpovídající tětivy mají společný bod. Za tětivu považujeme i každý bod kružnice k. Buďtež nyní $A_1, \ldots, A_n$ body na kružnici k takové, že orientovaný úhel $\widehat{A_nSA_m}$ (S je střed kružnice k) je roven $2\pi m/n$ pro $m = 1, \ldots, n$; budiž $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Množinu tětiv kružnice k, jejichž oba koncové body patří do $\mathscr{A}$, označíme $\mathscr{T}(n)$. Podgraf grafu G_k indukovaný množinou $\mathscr{T}(n)$, to jest podgraf skládající se ze všech uzlů množiny $\mathscr{T}(n)$ a všech hran spojujících některé dva uzly z $\mathscr{T}(n)$ označíme $G_k(n)$. Budeme studovat vlastnosti především tohoto grafu, protože je konečný. Předpoklad o velikostech úhlů $\widehat{A_nSA_m}$ jsme učinili jen pro zjednodušení určitých úvah, jinak zde vlastně záleží jen na uspořádání bodů na kružnici. Místo kružnice bychom vůbec mohli uvažovat libovolnou uzavřenou jednoduchou konvexní rovinnou křivku, aniž by se změnily výsledky, k nimž se dochází v tomto článku.

Zavedeme si ještě pomocný pojem hodnoty uzlu v $G_k(n)$. Jestliže uzel u grafu $G_k(n)$ odpovídá tětivě A_iA_j $(1 \leqq i \leqq j \leqq n)$, pak hodnotou uzlu u je $h(u) = \min(j - i, n + i - j)$. Zřejmě $0 \leqq h(u) \leqq \frac{1}{2}n$.

Snadno se dokáží následující tvrzení.

Počet uzlů grafu $G_k(n)$ je roven $\frac{1}{2}n\,(n + 1)$.

Stupeň uzlu u v grafu $G_k(n)$ je roven $[h(u) + 1]\,[n - h(u) + 1] - 2$.

Druhé tvrzení plyne z toho, že při $h(u) > 0$ tětiva u rozdělí kružnici na dva oblouky o_1 a o_2, jejichž vnitřky obsahují po řadě $h(u) - 1$ a $n - h(u) - 1$ bodů z $\mathscr{A}$. Spojíme-li každý bod z $\mathscr{A}$ náležející vnitřku o_1 s každým bodem z $\mathscr{A}$ náležejícím vnitřku o_2, dostaneme $[h(u) - 1]\,[n - h(u) - 1]$ tětiv, z nichž každá má společný bod s u. Dále každý z koncových bodů tětivy u je incidentní s $n - 1$ tětivami různými od u, máme tedy celkem $[h(u) - 1] \times [n - h(u) - 1] + 2(n - 1) = [h(u) + 1][n - h(u) + 1] - 2$ tětiv, které mají společné body s u. Lze dokázat, že ostatní tětivy společné body s u nemají. Je-li $h(u) = 0$, je u tvořena jediným bodem a ten je incidentní právě s $n - 1$ tětivami různými od u.

Analogicky lze dokázat další tvrzení.

Množina všech uzlů o dané hodnotě $h(u)$ tvoří pravidelný podgraf stupně $2h(u)$ při $h(u) < \frac{1}{2}n$ a pravidelný podgraf stupně $h(u)$ při $h(u) = \frac{1}{2}n$.

Nyní si odvodíme některé další vlastnosti.

Věta 1. *Číslo vnitřní stability (viz [1]) grafu $G_k(n)$ je rovno n.*

Důkaz. Množina všech uzlů u, pro něž $h(u) = 0$, je zřejmě vnitřně stabilní, protože jim odpovídající tětivy jsou tvořeny jedním bodem a dvě různé takovéto tětivy nemohou mít společný bod. Těchto uzlů je n, tudíž číslo vnitřní stability je nejméně n. Máme-li nyní libovolnou vnitřně stabilní množinu o m prvcích, je celkový počet koncových bodů tětiv této množiny nejméně roven m, neboť každá tětiva má jeden nebo dva koncové body a dvě tětivy této množiny nemohou mít společný bod, tedy speciálně nemohou mít společný koncový bod. Musí být tedy $m \leqq n$. Tím je věta dokázána.

Věta 2. *Číslo vnější stability (viz [1]) grafu $G_k(n)$ je pro sudé n rovno $\frac{1}{2}n$, pro liché n je rovno $\frac{1}{2}(n + 1)$.*

Důkaz. Množina tětiv A_iA_{n+1-i} pro $i = 1, \ldots, \frac{1}{2}n$ při n sudém, resp. pro $i = 1, \ldots, \frac{1}{2}(n + 1)$ při n lichém je zevně stabilní, neboť koncové body tětiv této množiny vyplňují celou množinu $\mathscr{A}$, tudíž každá další tětiva má společný koncový bod alespoň s jednou z tětiv této množiny. Číslo vnější stability je tedy nejvýše $\frac{1}{2}n$, resp. $\frac{1}{2}(n + 1)$. Máme-li nyní zevně stabilní množinu o m prvcích, pak koncových bodů tětiv této množiny je nejvýše $2m$. Kdyby bylo $m \leqq \frac{1}{2}n - 1$ pro n sudé, resp. $m \leqq \frac{1}{2}(n - 1)$ pro n liché, bylo by těchto bodů nejvýše $n - 2$, resp. $n - 1$ a existoval by bod z $\mathscr{A}$, který by nebyl koncovým bodem žádné z tětiv zmíněné množiny. Tento bod by však sám tvořil tětivu, která by byla bez společného bodu s kteroukoli z tětiv této množiny, tudíž by tato množina nebyla zevně stabilní.

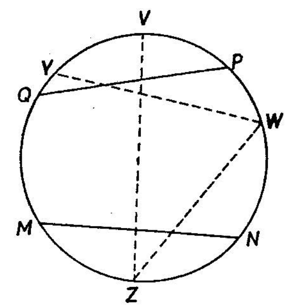
Věta 3. *Chromatické číslo grafu $G_k(n)$ je rovno n.*

Důkaz. S každým bodem množiny $\mathscr{A}$ je incidentních právě n tětiv. Tyto tětivy tedy tvoří podgraf, který je úplným grafem o n uzlech, tudíž jej nelze zbarvit méně než n barvami. Je-li nyní dáno celé číslo p, $1 \leqq p \leqq n$, označme $\mathscr{M}_p$ množinu uzlů odpovídajících tětivám A_iA_{p-i} pro všechna $i = 1, \ldots, n$, přičemž rozdíly indexů bereme modulo n. Je zřejmé, že tětivy množiny $\mathscr{M}_p$ jsou navzájem rovnoběžné, pokud nejsou tvořeny jedním bodem; je-li některá z nich tvořena jedním bodem, není tento bod koncovým bodem žádné jiné

tětivy z $\mathscr{M}_p$. Vytvoříme-li množiny $\mathscr{M}_p$ pro každé $p = 1, \ldots, n$, můžeme snadno dokázat, že každá tětiva patří právě do jedné z množin $\mathscr{M}_p$. Můžeme tedy uzly grafu $G_k(n)$ zbarvit tak, že uzly náležející do téže množiny $\mathscr{M}_p$ zbarvíme vždy touž barvou.

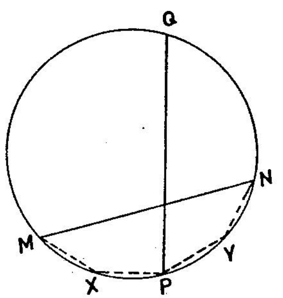
Věta 4. *Uzlový stupeň souvislosti mezi dvěma uzly u a v grafu $G_k(n)$ při $h(u) \leqq h(v)$ je roven $[h(u) + 1][n - h(u) - 1]$, jestliže odpovídající tětivy nemají společný bod, $[h(u) + 1][n - h(u) + 1] - 4$, jestliže mají společný vnitřní bod, $[h(u) + 1][n - h(u) + 1] - 2 - h(u)$, jestliže mají společný koncový bod.*

Důkaz. Uzlový stupeň souvislosti mezi dvěma uzly grafu je definován v případě, že tyto uzly nejsou spojeny hranou, jako minimální počet uzlů, které je třeba odstranit, aby v grafu takto získaném ležely dané uzly v různých komponentách; v případě, že jsou tyto uzly spojeny hranou, je roven stupni souvislosti těchto uzlů v grafu vzniklém odstraněním této hrany zvětšenému o jednu. Provedeme důkaz nejprve pro případ dvou uzlů, které nejsou spojeny hranou. Mějme dány dva uzly u, v grafu $G_k(n)$, které nejsou spojeny hranou a budiž $h(u) \leqq h(v)$. Uzly u, v nechť odpovídají po řadě tětivám MN, PQ (obr. 1). Oblouky budeme brát vždy tak, že jdeme od počátečního ke koncovému bodu proti směru pohybu hodinových ručiček. Dokážeme, že v $G_k(n)$ existuje $[h(u) + 1][n - h(u) - 1]$ cest mezi u a v, které nemají společné uzly kromě u a v. Z toho podle Mengerovy věty plyne, že uzlový stupeň souvislosti mezi u a v je roven nejméně $[h(u) + 1][n - h(u) - 1]$.



Obr. 1.

Máme-li bod V (resp. W) uvnitř oblouku NM, existuje $h(u) + 1$ tětiv z $\mathscr{T}(n)$, které spojují V (resp. W) s body oblouku MN a zřejmě to jsou právě všechny tětivy z $\mathscr{T}(n)$ procházející bodem V (resp. W), které mají společný bod s tětivou MN. Jestliže V leží na oblouku PQ, pak tyto tětivy mají společný bod i s tětivou PQ. Ke každé takovéto tětivě VZ existuje tedy cesta složená z uzlů odpovídajících tětivám MN, VZ, PQ. Žádné dvě z těchto cest nemají zřejmě společný uzel kromě u a v. Jestliže W neleží na oblouku PQ, pak žádná z tětiv WZ, kde Z leží na oblouku MN, nemá společný bod s tětivou PQ. Každé z těchto tětiv lze však přiřadit tětivu WY, kde Y leží na oblouku PQ (a tedy tětiva WY má společný bod s tětivou PQ), a to tak, aby různým tětivám WZ byly přiřazeny různé tětivy WY (to lze, neboť takovýchto tětiv WY při daném W může být celkem $h(v) + 1$, což je větší nebo rovno $h(u) + 1$). Uzly odpovídající tětivám MN, WZ, WY, PQ tvoří cestu, přičemž dvě různé takovéto cesty nemají společný uzel kromě u a v a nemají jej ani s cestami dříve popsanými. Ke každému bodu uvnitř oblouku NM tedy přísluší $h(u) + 1$ cest. Poněvadž vnitřek oblouku NM obsahuje $n - h(u) - 1$ bodů z $\mathscr{A}$, je celkový počet cest roven $[h(u) + 1]\,[n - h(u) - 1]$. Tedy uzlový stupeň souvislosti mezi u a v je nejméně roven tomuto číslu. Odstraníme-li nyní množinu $\mathscr{T}_0$ tětiv z $\mathscr{T}(n)$ spojujících bod oblouku MN s bodem vnitřku oblouku NM, lze rozložit zbylou množinu tětiv z $\mathscr{T}(n)$ na dvě disjunktní podmnožiny $\mathscr{T}_1$ a $\mathscr{T}_2$, kde $\mathscr{T}_1$ (resp. $\mathscr{T}_2$) je množina tečen z $\mathscr{T}(n)$, jejichž oba koncové body leží na oblouku MN (resp. uvnitř oblouku NM), tedy které leží v kruhové úseči určené obloukem MN (resp. uvnitř kruhové úseče určené obloukem NM). Protože kruhová úseč je konvexní množina, nemá žádná tětiva z $\mathscr{T}_1$ společný bod se žádnou tětivou z $\mathscr{T}_2$. Poněvadž tětiva MN je v $\mathscr{T}_1$, tětiva PQ v $\mathscr{T}_2$, znamená to, že v grafu vzniklém odstraněním množiny $\mathscr{T}_0$ z $G_k(n)$ uzly odpovídající tětivám MN, PQ spolu nesouvisí. Protože $|\mathscr{T}_0| = [h(u) + 1]\,[n - h(u) - 1]$, je tento výraz roven uzlovému stupni souvislosti mezi u a v.



Obr. 2.

Mějme nyní případ, že tětivy MN a PQ mají společný vnitřní bod (obr. 2). Dokážeme nejprve, že oblouk NQ (resp. QM) obsahuje aspoň tolik bodů z $\mathscr{A}$, kolik obsahuje oblouk MP (resp. PN). Víme, že oblouky MN, PQ obsahují po řadě $h(u) + 1$, $h(v) + 1$ bodů z $\mathscr{A}$. Nechť oblouk MP obsahuje q bodů z $\mathscr{A}$; pak oblouky PN, NQ, QM obsahují po řadě $h(u) - q + 1$, $h(v) - h(u) + q$, $n - h(v) - q + 1$ bodů z $\mathscr{A}$. Pro počty bodů z $\mathscr{A}$ na obloucích NQ, MP platí $h(v) - h(u) + q \geqq q$, neboť tuto nerovnost lze odvodit ekvivalentními úpravami z nerovnosti $h(v) \geqq h(u)$, což platí podle předpokladu. Pro počty

bodů z $\mathscr{A}$ na obloucích QM, PN platí $n - h(v) - q + 1 \geqq h(u) - q + 1$, což lze odvodit ekvivalentními úpravami z nerovnosti $n \geqq h(u) + h(v)$, která rovněž platí, poněvadž $h(u) \leqq \frac{1}{2}n$, $h(v) \leqq \frac{1}{2}n$. Tětivy spojující bod oblouku MP (resp. PN) s bodem oblouku NQ (resp. QM) mají společné body s oběma tětivami MN, PQ, každá je tedy vnitřním uzlem jedné z cest délky 2 z MN do PQ. Pro tětivy spojující bod oblouku MP (resp. PN) s výjimkou P s bodem vnitřku oblouku QM (resp. NQ) provedeme stejnou úvahu jako v předešlém případě pro tětivy WZ. Konečně ke každému bodu X z $\mathscr{A}$, který leží uvnitř oblouku MP, existuje cesta složená z tětiv MN, MX, PX, PQ a ke každému bodu Y z $\mathscr{A}$, který leží uvnitř oblouku PN, existuje cesta složená z tětiv MN, NY, PY, PQ. Tím jsme dokázali, že existuje takový systém cest z MN do PQ, že žádné dvě cesty tohoto systému nemají společný uzel kromě MN a PQ a každá tětiva z $\mathscr{T}(n)$, která má společný bod s MN (kromě PQ, MM, NN) je obsažena právě v jedné z těchto cest a v systému je cesta délky 1. Těchto cest je tedy $[h(u) + 1]\,[n - h(u) + 1] - 4$ (stupeň uzlu u zmenšený o dvě). Snadno bychom zjistili, že odstraněním všech tětiv, které mají společný bod s MN kromě PQ, MM, NN, bychom získali graf, v němž uzly odpovídající tětivám MN a PQ jsou koncovými uzly mostu.

Zbývá ještě případ, že MN a PQ mají společný koncový bod $N \equiv P$. Zde je uzlový stupeň souvislosti mezi MN a PQ roven $[h(u) + 1]\,[n - h(u) + 1] - 2 - h(u)$, neboť zmíněný systém cest obsahuje všechny tětivy z $\mathscr{T}(n)$, které mají společný bod s MN kromě MM a tětiv spojujících M s vnitřními body oblouku MN (předpokládáme, že Q leží mime oblouk MN).

Věta 5. *Hranový stupeň souvislosti mezi uzly u a v v $G_k(n)$ při $h(u) \leqq h(v)$ je roven stupni uzlu u.*

Důkaz. Budeme větu dokazovat pouze pro případ, že tětivy odpovídající uzlům u a v nemají společný bod; pro ostatní případy je důkaz analogický. Sestrojujeme systém cest z u do v jako v důkaze předešlé věty, a to tak, aby zmíněné body Y ležely uvnitř oblouku PQ. Dále sestrojíme pro každý bod L z $\mathscr{A}$ ležící uvnitř oblouku MN cestu složenou z tětiv MN, LM, LL^*, L^*P, PQ, kde L^* je bod uvnitř oblouku PQ a každému bodu L je přiřazen bod L^* vzájemně jednoznačně. Dále sestrojíme pro každý takovýto bod L cestu složenou z tětiv MN, LN, LL^*, L^*Q, PQ a konečně cesty složené z tětiv MN, MM, MP, PP, PQ a MN, NN, NQ, QQ, PQ. Lze dokázat, že takto doplněný systém cest má tu vlastnost, že žádné dvě z cest tohoto systému nemají společnou hranu a že každá hrana incidentní s uzlem u je obsažena právě v jedné z těchto cest; počet těchto cest je tedy roven stupni uzlu u. Podle věty dokázané A. Kotzigem v [2] je tedy hranový stupeň souvislosti mezi u a v nejméně roven stupni uzlu u; protože však hranový stupeň souvislosti mezi u a v nemůže překročit supeň uzlu u, je mu roven.

Důsledek. *Uzlový i hranový stupeň souvislosti grafu $G_k(n)$ je roven $n - 1$.*
Z předešlých úvah vyplývá ještě jedna vlastnost.

Věta 6. *Je-li u uzel grafu $G_k(n)$ a $h(u) > 0$ a odstraníme-li všechny uzly spojené hranou s u, vznikne graf o třech komponentách; jednou z komponent je izolovaný uzel u, každá z dalších komponent je tvořená tětivami ležícími uvnitř jedné z kruhových úsečí vyťatých tětivou odpovídající uzlu u.*

Věta 7. *V grafu $G_k(n)$ existuje Hamiltonova kružnice.*

Důkaz provedeme sestrojením této kružnice. Sestrojíme nejprve cestu C_1 po řadě z uzlů odpovídajících tětivám $A_1A_1, A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{n-1}, A_1A_2, A_2A_2$. Dále pro každé $i = 2, \ldots, n - 2$ sestrojíme cestu C_i po řadě z uzlů odpovídajících tětivám $A_iA_i, A_iA_{i+2}, \ldots, A_iA_n, A_iA_{i+1}, A_{i+1}A_{i+1}$. Pak sestrojíme ještě cestu C_{n-1} po řadě z uzlů odpovídajících tětivám $A_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}A_n, A_nA_n$ a cestu C_n po řadě z uzlů odpovídajících tětivám A_nA_n, A_nA_1, A_1A_1. Snadno bychom zjistili, že $H = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ je Hamiltonova kružnice.

Věta 8. *Grupa automorfismů grafu $G_k(n)$ je izomorfní s grupou symetrií pravidelného n-úhelníka.*

Důkaz. Body $A_1, \ldots, A_n$ tvoří pravidelný n-úhelník. Každému shodnému zobrazení, kterým tento n-úhelník přechází v sebe, odpovídá zřejmě právě jeden automorfismus grafu $G_k(n)$. Poněvadž hodnota a stupeň uzlu v $G_k(n)$ jsou si přiřazeny vzájemně jednoznačně, musí každý automorfismus grafu $G_k(n)$ zachovávat hodnotu všech uzlů. Speciálně tedy obrazem uzlu hodnoty 0, to jest uzlu odpovídajícího tětivě tvořené jedním bodem, je opět uzel hodnoty 0. K takovýmto dvěma tětivám u, v existuje zřejmě právě jedna tětiva w, která má s oběma společné body, to jest tětiva spojující tyto body. V grafu $G_k(n)$ se to projeví tím, že existuje právě jedna cesta délky 2 mezi uzly odpovídajícími těmto tětivám. Mezi délkami tětiv a hodnotami uzlů jim odpovídajících existuje zřejmě též vzájemně jednoznačné přiřazení a tedy hodnota vnitřního uzlu w zmíněné cesty určuje jednoznačně vzdálenost bodů tvořících tětivy u, v. Protože délky cest a hodnoty uzlů se v automorfismu zachovávají, budou obrazy uzlů u a v představovat opět tětivy vytvořené jedním bodem a vzdálenost bodů tvořících tyto tětivy bude táž jako vzdálenost bodů tvořících tětivy u a v. Automorfismu grafu $G_k(n)$ odpovídá tedy transformace roviny, kterou přechází množina bodů $\mathscr{A}$ v sebe, přičemž vzdálenosti každých dvou bodů této množiny se zachovávají. Takováto transformace je zřejmě shodné zobrazení, kterým přechází n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ v sebe.

Poznámka. Graf $G_k(n)$ lze definovat i zcela bez užití geometrických pojmů. Budiž $\mathscr{T}(n)$ množina neuspořádaných dvojic zbytkových tříd modulo n.

Graf $G_k(n)$ má množinu uzlů $\mathscr{T}(n)$, přičemž dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, jestliže odpovídající dvojice buď mají společný prvek, nebo se navzájem oddělují. Analogicky by se definoval i graf G_k.

LITERATURA

[1] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.
[2] Kotzig A., *Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov*, Bratislava 1956.

Došlo 3. 10. 1964.

Katedra matematiky
Vysoké školy strojní a textilní,
Liberec

THE GRAPH OF THE SYSTEM OF CHORDS OF A GIVEN CIRCLE

Bohdan Zelinka

Summary

Let n points on a circle be given and let us consider the system of chords joining these points. The graph $G_k(n)$ is the graph whose vertices are chords of that system, two vertices being joined by an edge if and only if the corresponding chords have a common point. In this article the numbers of internal and external stability, the chromatic number and the connectivity degree of the graph $G_k(n)$ are found. The existence of a Hamilton circuit and a theorem on the group of automorphisms of $G_k(n)$ are proved. Investigation of such a graph was proposed by A. Kotzig.