MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 15 1965 ČÍSLO 4

ÜBER DIE INTERVALLTOPOLOGIE AUF EINER HALBGEORDNETEN GRUPPE

JÁN JAKUBÍK, Košice

Einleitung. In den Arbeiten [2, 3, 4, 7] wurde untersucht, unter welchen Voraussetzungen eine Verbandsgruppe im Bezug zu der Intervalltopologie eine topologische Gruppe bzw. ein Hausdorffscher Raum ist. In dieser Arbeit untersuchen wir analoge Fragen für eine halbgeordnete Gruppe G. Im § 1 werden einige Begriffe und Bezeichnungen eingefürt. Wir beweisen, dass das Problem im Grunde genommen nur die das Element 0 enthaltende Komponente (Šimbireva [6]) von G betrifft. Im § 2 werden die lexikographischen Erweiterungen von halbgeordneten Gruppen behandelt; im § 3 wird die Intervalltopologie auf einer nichttrivialen lexikographischen Erweiterung untersucht. Die Ergebnisse des § 4 und 5 über gerichtete Gruppen und Verbandsgruppen bilden eine Fortsetzung und Verallgemeinerung der Resultate aus der Arbeit [4].

Wir benutzen die Terminologie und Bezeichnungen nach [1, Kap. XIV].

§ 1. Grundbegriffe. Wir setzen voraus, dass $G = G(+)$ eine Gruppe im Bezug auf die Operation $+$ ist (diese Operation braucht nicht kommutativ zu sein). Das Einheitselement in G bezeichnen wir mit 0. Ferner sei vorausgesetzt, dass in G eine Relation der Halbordnung $\leqq$ derart definiert ist, dass aus $x, y, a, b \in G$, $x \leqq y$ immer $a + x + b \leqq a + y + b$ folgt. Dann heisst $G(+, \leqq)$ eine halbgeordnete Gruppe. Wenn die Operation $+$ nicht in Betracht genommen wird, bezeichnen wir die zugehörige halbgeordnete Menge mit $G(\leqq)$. $G(+, \leqq)$ ist eine gerichtete Gruppe, wenn es für je zwei Elemente $x, y \in G$ eine gemeinsame obere und eine gemeinsame untere Schranke in G gibt. Man kann leicht beweisen, dass dieser Fall schon dann eintritt, wenn es zu jedem $x \in G$ ein $y \in G$ gibt, so dass $y \geqq x$ und $y \geqq 0$ ist.

Für jedes $a \in G$ bezeichnen wir $I_1(a) = \{x : x \in G,\ x \leqq a\}$, $I_2(a) = \{x : x \in G,\ x \geqq a\}$. Die Mengen der Form $I_1(a)$, $I_2(a)$ werden u-Intervalle genannt. Die Intervalltopologie auf G wird derart definiert, dass man als Subbasis der geschlossenen Mengen das System A nimmt, das aus allen

Mengen $I_1(a)$, $I_2(a)$ $(a \in G)$ und aus der Menge G besteht (vgl. [2, S.213]).
Untersuchen wir die folgenden Bedingungen (vgl. [4]):

(t) *G ist eine topologische Gruppe im Bezug auf die Intervalltopologie.*

(h) *G ist ein Hausdorffscher Raum im Bezug auf die Intervalltopologie.*

(o) *G ist eine geordnete (= linear geordnete) Gruppe.*

Es ist bekannt, dass (o) $\Rightarrow$ (t) $\Rightarrow$ (h). Für einige Klassen von Verbands-
gruppen wurde die Implikation (t) $\Rightarrow$ (o) in [2, 3, 4, 7] bewiesen; in [8] ist
eine Verbandsgruppe konstruiert, in der diese Implikation nicht erfüllt ist.

Es sei $a, b \in G$, $a \neq b$ und es seien A, B endliche Teilmengen von G. Be-
zeichnen wir

$$M = \{I_1(a_i)\} \cup \{I_2(b_j)\}, \tag{1.1}$$

wobei a_i bzw. b_j die Menge A bzw. B durchläuft. Das System M wird ein
s-System für a, b in G genannt, wenn die Vereinigung der u-Intervalle des
Systems M gleich G ist und wenn keines dieser u-Intervalle gleichzeitig
a und b enthält (vgl. [4]). Aus der Definition des Hausdorffschen Raumes
folgt unmittelbar, dass G die Bedingung (h) genau dann erfüllt, wenn es für
je zwei Elemente $a, b \in G$, $a \neq b$ ein s-System in G gibt; offensichtlich kann
man aus jedem solchen System M ein minimales s-System $M' \subset M$ für a, b
in G konstruieren.

Bemerkung. Ist $G \neq \{0\}$ eine Verbandsgruppe und M ein s-System für a, b
in G, so ist $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ([4, Abs. 2.1]). Für halbgeordnete Gruppen gilt eine
analoge Behauptung nicht. Als Beispiel kann man eine beliebige endliche
Gruppe $G \neq \{0\}$ nehmen, die trivialerweise halbgerodnet ist (d. h. $x \leqq y$
genau dann, wenn $x = y$).

Es sei $K(0)$ die Menge aller $x \in G$, zu welchen es ein Element $v \in G$ gibt,
so dass $x \leqq v$ und $0 \leqq v$ ist. Man kann sich leicht überzeugen, dass diese
Bedingung mit der folgenden äquivalent ist: es gibt ein $u \in G$ derart, dass
$u \leqq x$ und $u \leqq 0$ ist (es genügt $u = x - v$ bzw. $v = -u + x$ zu setzen).
Die Menge $K(0)$ ist ein Normalteiler in $G(+)$ (vgl. [6]). Bezeichnen wir
$G(+)/K(0) = \bar{G}$ und setzen wir für jedes $y \in G$: $y + K(0) = K(y)$. Ist $y_1, y_2 \in$
$\in G$, $y_1 < y_2$, dann ist $y_2 - y_1 \in K(0)$, also ist $K(y_1) = K(y_2)$. Daraus folgt:

1.1. *Ist $K(y_1) \neq K(y_2)$, so gilt $y_1 \mid y_2$.*(1)

1.2. Satz. *Ist die Gruppe $\bar{G}$ unendlich, so genügt G der Bedingung (h) nicht.
Wenn $\bar{G}$ endlich ist, so genügt G der Bedingung (h) genau dann, wenn $K(0)$
dieser Bedingung genügt.*

Beweis. Es sei $\bar{G}$ unendlich; wählen wir beliebige Elemente $a, b \in G$, $a \neq b$.
Setzen wir voraus, dass es ein s-System M für a, b in G gibt. Aus der Unendlich-
keit von G folgt, dass es ein $x \in G$ gibt, so dass $K(x) \neq K(a_i)$ und $K(x) \neq K(b_j)$

(1) Mit $y_1 \mid y_2$ bezeichnen wir die Tatsache, dass y_1 und y_2 unvergleichbar sind.

für jedes $a_i \in A$ und jedes $b_j \in B$ ist. Nach 1.1 gehört dann x zu keinem der
u-Intervalle des Systems M, was ein Widerspruch ist.

Es sei ferner die Menge $\bar{G}$ endlich, card $\bar{G} = k$.

Setzen wir voraus, dass G die Bedingung (h) erfüllt. Ist card $K(0) = 1$,
so ist in $K(0)$ die Bedingung (h) offensichtlich erfüllt. Es sei ferner card $K(0) >$
> 1, $a, b \in K(0)$, $a \neq b$. Aus der Voraussetzung folgt, dass es ein s-System
M für a, b in G gibt. Bezeichnen wir $A_1 = K(0) \cap A$, $B_1 = K(0) \cap B$, $J_i(z) =$
$= K(0) \cap I_i(z)$ $(i = 1,2;\ z \in K(0))$, $M_1 = \{J_1(a_i)\} \cup \{J_2(b_j)\}$, wobei a_i bzw. b_j
die Menge A_1 bzw. B_1 durchläuft. Nach 1.1 ist $A_1 \cup B_1 \neq \emptyset$. Offenbar ist
dann M_1 ein s-System für a, b in $K(0)$. Umgekehrt setzen wir voraus dass
$K(0)$ der Bedingung (h) genügt und es sei

$$\{x_1, \ldots, x_k\} \tag{1.2}$$

eine Menge, die aus jeder Klasse $K(x)$, $x \in G$ genau ein Element enthält.

Es sei $a, b \in G$, $a \neq b$, $K(a) = K(b)$. Also ist $a - b \in K(0)$. Nach der Voraus-
setzung gibt es ein s-System M_1 für die Elemente $a - b$, 0 im $K(0)$. Wir
können voraussetzen, dass $x_1 = b$ ist. Das System der u-Intervalle

$$J_1(a_i + x_l), \quad J_2(b_j + x_l) \ (a_i \in A,\ \ b_j \in B,\ \ l = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

ist dann ein s-System für a, b in G. Es sei ferner $u, v \in G$, $K(u) \neq K(v)$.
Ist card $K(0) = 1$, so ist $J_1(x_l)$ $(l = 1, \ldots, k)$ ein s-System für u, v in G. Im
Falle card $K(0) > 1$ wählen wir $a, b \in K(0)$, $a \neq b$; es sei M_1 ein s-System für
a, b im $K(0)$. Dann ist (1.3) ein s-System für u, v in G.

Bemerkung. Wenn die Mächtigkeit der Gruppe $G(+)/K(0)$ bekannt ist,
so kann nach dem vorigen Satz die Frage über die Gültigkeit von (h) für G
auf die analoge Frage für die gerichtete Gruppe $K(0)$ reduziert werden. Der
Untersuchung von gerichteten Gruppen ist § 4 gewidmet.

Im folgenden bedeutet G immer eine halbgeordnete Gruppe.

§ 2. Lexikographische Erweiterungen. Wir führen in G eine binäre Rela-
tion $\parallel$ folgendermassen ein: für $x, y \in G$ setzen wir $x \parallel y$, wenn entweder
$x = y$ ist oder wenn es eine endliche Folge $x_0 \ldots x_n$ gibt, so dass

$$x_0 = x, \quad x_n = y, \quad x_i \mid x_{i+1} \tag{2.1}$$

für $i = 0, \ldots, n - 1$ ist. Die Relation $\parallel$ ist reflexiv, symmetrisch und tran-
sitiv, also ist durch diese Relation eine Klassenzerlegung der Menge G ge-
geben; die das Element x enthaltende Klasse bezeichnen wir mit $B(x)$.

2.1. *$B(0)$ ist ein Normalteiler der Gruppe $G(+)$.*(2)

(2) Bemerkung bei der Korrektur. Nach der Beendigung dieser Arbeit habe ich er-
fahren, dass die Behauptungen 2.1 und 2.2 schon früher A. Lavis (Bull. Soc. roy. sci.
Liège 32 (1963), 204—208) bewiesen hat.

Beweis. Es sei a ein Element aus G. Da die Abbildung $z \to z + a$ $(z \in G)$
ein Automorfismus der halbgeordneten Menge G ist, so folgt aus $u \in B(z) + a$
die Beziehung $B(z) + a = B(u)$; in analoger Weise folgt aus $u \in a + B(z)$
die Gleichheit $a + B(z) = B(u)$. Da $a \in B(0) + a$ und $a \in a + B(0)$ ist,
bekommen wir also $B(0) + a = B(a) = a + B(0)$. Ist insbesondere $a \in B(0)$,
so haben wir $a + B(0) = B(0)$. Daher ist $B(0)$ ein Normalteiler von $G(+)$.
Setzen wir $N_1(G) = \{x : x \in G,\ x \mid 0\}$. Ist $A \subset G$, bezeichnen wir mit $[A]$
die durch die Menge A erzeugte Untergruppe der Gruppe $G(+)$.

2.2. $B(0) = [N_1(G)]$.

Beweis. Es sei $B_1 = [N_1(G)]$. Aus der Definition der Menge $B(0)$ und
aus $x \mid 0$ folgt $x \in B(0)$; nach 2.1 ist also $B_1 \subset B(0)$. Es sei $y \in B(0)$, $y \neq 0$.
Setzen wir $x = 0$ und $x_0, \ldots x_n$ sei die der Bedingung (2.1) genügende end-
liche Folge. Da $y = x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0)$ ist
und da die einzelnen Ausdrücke $x_i - x_{i-1}$ mit dem Element 0 unvergleichbar
sind, so ist $y \in B_1$, also ist $B(0) \subset B_1$.

2.3. *$B(0)$ ist eine konvexe Teilmenge von G.*

Beweis. Man soll die folgende Behauptung beweisen: (t_1): Ist $x, y \in B(0)$,
$z \in G$, $x \leqq z \leqq y$, so ist $z \in B(0)$. Für $x = y$ ist die Behauptung trivial.
Für $x \neq y$ sei $x_0, \ldots, x_n$ die der Bedingung (2.1) genügende endliche Folge.
Wir benutzen jetzt die Induktion im Bezung auf die natürliche Zahl n.
Für $n = 1$ haben wir $x \mid y$, also ist (t_1) trivialerweise erfüllt, da die Menge
$\{z : x \leqq z \leqq y\}$ leer ist. Es sei $n > 0$. Ist $z \mid x_{n-1}$, so gehört z zu $B(0)$ nach
der Definition von $B(0)$. Ist $z \leqq x_{n-1}$, so gilt $x \leqq z \leqq x_{n-1}$ und nach der
Induktionsvoraussetzung ist $z \in B(0)$. Wäre $x_{n-1} \leqq z$, so hätten wir $x_{n-1} \leqq$
$\leqq z \leqq y$, was aber unmöglich ist, da $x_{n-1} \mid y$ gilt.

2.4. *Ist G eine l-Gruppe, so ist $B(0)$ die durch die Menge $N_1(G)$ erzeugte
l-Untergruppe von G.*

Beweis. Es sei B_2 die durch die Menge $N_1(G)$ erzeugte l-Untergruppe
der l-Gruppe G. Nach 2.2 ist $B(0) \subset B_2$. Es genügt jetzt die folgende Be-
hauptung zu beweisen: Ist $x \in B(0)$, $x \mid 0$, so ist $x \cup 0 \in B(0)$ (vgl. [1, S. 215,
Theorem 2]). Bezeichnen wir $x^+ = x \cup 0$, $x^- = x \cap 0$ (wir benutzen die
Bezeichnungen und Ergebnisse aus [1, Kap. XIV, § 4]), so sind für jedes
Element $x \in G$ mit $x \mid 0$ die folgenden Beziehungen erfüllt: $x^+ \neq 0 \neq x^-$,
$y = 2x^+ + x^- \in N_1(G)$, $-x \in N_1(G)$; also ist $y - x \in B(0)$. Da $y - x = x^+$
gilt, ist der Beweis erbracht.
Bemerkung. In der Arbeit [5, Abs. 10] wurde für eine l-Gruppe G die
Menge $B(0)$ als eine durch die Menge $N_1(G)$ erzeugte l-Untergruppe von G

definiert; dort wurde auch bewiesen, dass $B(0)$ ein l-Ideal von G ist. Dieses
Ergebnis folgt jetzt als Spezialfall aus 2.1 und 2.3.
Ist G eine l-Gruppe, bezeichnen wir $J = \{e : e \in G;\ x \in G,\ x > 0 \Rightarrow x \cap$
$\cap\, e > 0\}$. Die Elemente aus J heissen schwache Einheiten von G. Ferner
bezeichnen wir $N(G) = \{x : x \in G - J,\ x > 0\}$. Es sei $B(G) = [N(G)]$.

2.5. *Für jede l-Gruppe G gilt $B(G) = B(0)$.*

Beweis. Nach der Definition von $B(G)$ und nach 2.2 genügt es die Bezie-
hungen $N(G) \subset B(0)$, $N_1(G) \subset B(G)$ zu beweisen.
Es sei $x \in N(G)$; dann gibt es ein $y \in G$ mit $x \cap y = 0$, $y > 0$. Offenbar
ist $0 \mid y - x \mid x$, also gehört x zu $B(0)$. Es sei ferner $u \in N_1(G)$; wir haben
dann $u^+ > 0$, $-u^- > 0$, $u^+ \cap (-u^-) = 0$, also ist u^+, $-u^- \in N(G)$. Daraus
folgt $u = u^+ + u^- \in B(G)$.
Bei der Definition der Menge $B(G)$ haben wir nicht nur die Halbordnung $\leqq$
sondern auch die Operation $+$ benutzt; die Menge $B(G)$ ist aber im Bezug
auf die Operation $+$ im folgenden Sinne invariant:

2.6. *Es seien $G_1(+_1, \leqq)$, $G_2(+_2, \leqq)$ l-Gruppen, für die die Gleichung
$G_1(\leqq) = G_2(\leqq)$ besteht, und es sei $0_1 = 0_2$ (mit 0_i wird das Nullelement in der
Gruppe $G_i(+_i)$ bezeichnet, $i = 1, 2$). Dann ist $B(G_1) = B(G_2)$.*
Der Beweis folgt aus 2.5 und daraus, dass bei der Definition der Menge
$B(0)$ nur das Nullelement von $G(+)$ und die Halbordnung benutzt wurde.
Bemerkung. Sind die Bedingungen aus 2.6 erfüllt, so braucht noch
die Gleichung $G_1(+_1, \leqq) = G_2(+_2, \leqq)$ nicht zu gelten (d. h. die Operationen
$+_1$ und $+_2$ können verschieden sein); überdies kann man an Beispielen
zeigen, dass im solchen Fall die l-Gruppen G_1 und G_2 nicht isomorph zu sein
brauchen.
P. Conrad hat für l-Gruppen den folgenden Begriff einer lexikographischen
Erweiterung eingeführt:

2.7. (Vgl. [2, S. 214].) Eine l-Gruppe G heisst *lexikographische Erweiterung*
einer l-Gruppe S, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(a) S ist ein l-Ideal von G.
(b) G/S ist eine geordnete Gruppe.
(c) Wenn $x \in G^+ - S$, $s \in S$ ist, so gilt $s < x$.(3)

Unter diesen Voraussetzungen schreibt man $G = \langle S \rangle$. Diese lexikogra-
phische Erweiterung heisst nichttrivial, wenn $\{0\} \neq S \neq G$ ist.
Für die lexikographischen Erweiterungen von l-Gruppen gelten die fol-
genden Behauptungen:

(3) Wir bezeichnen $G^+ = \{x : x \in G,\ \ x \geqq 0\}$.

2.8.1. ([2, Lemma 9.1]) *Es sei H ein l-Ideal einer l-Gruppe G. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) $G = \langle H \rangle$.

(2) $N(G) \subset H$.

(3) *Ist $x \in G$, $x + H \neq H$, so sind entweder alle Elemente von $x + H$ positiv oder sind alle diese Elemente negativ.*

2.8.2. ([2, Satz 9.1]) *$[N(G)]$ ist ein l-Ideal von G, $N([N(G)]) = N(G)$ und $G = \langle [N(G)] \rangle$. Die l-Gruppe $[N(G)]$ ist keine nichttrivialle lexikographische Erweiterung.*

Wenn $S = \{0\}$ ist, so gilt $G = \langle S \rangle$ genau dann, wenn G eine geordnete Gruppe ist. Wir beweisen, dass in dem nichttrivialen Fall $S \neq \{0\}$ die Bedin-gung (b) in der Definition 2.7 ausgelassen werden kann. Ferner varellgemeinern wir die Sätze 2.8.1 und 2.8.2 für den Fall einer halbgeordneten Gruppe G (vgl. 2.15, 2.16, 2.17).

Es sei G eine halbgeordnete Gruppe. Wenn S ein Normalteiler von $G(+)$ und zugleich eine konvexe Teilmenge von G ist, so kann man die halbgeordnete Faktorgruppe G/S konstruieren (vgl. [6]). Für die entsprechenden Klassen setzen wir dabei $x + S \leqq y + S$, wenn es Elemente $x_1 \in x + S$, $y_1 \in y + S$ mit $x_1 \leqq y_1$ gibt.

Untersuchen wir die folgenden Bedingungen für eine Teilmenge S von G:

(α) S ist ein Normalteiler von $G(+)$.

(β) S ist ein Normalteiler von $G(+)$ und zugleich eine konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$, und G/S ist eine geordnete Gruppe.

(γ) = (c).

2.9. *S sei eine Untergruppe von $G(+)$, die die Bedingung (γ) erfüllt. Dann ist S eine konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$.*

Beweis. Es sei $u, v \in S$, $x \in G$, $u \leqq x \leqq v$. Setzen wir voraus, dass x nicht zu S gehört. Dan ist $0 < x - u < v - u$, $v - u \in S$, $x - u \notin S$. Nach (γ) ist also $v - u < x - u$, was ein Widerspruch ist.

2.10. *Es sei G eine l-Gruppe. Es sei S eine Untergruppe von $G(+)$, so dass (γ) erfüllt ist. Dann ist S eine l-Untergruppe von G.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass aus $x \in S$, $x \mid 0$ die Beziehung $x^+ \in S$ folgt. Setzen wir voraus, dass x^+ nicht zu S gehört; dann haben wir nach (γ) $x^+ > 2x = 2x^+ + 2x^-$, $-2x^- > x^+$; es gilt aber ([1, Kap. XIV, § 4]) $(-2x^-) \cap x^+ > 2x = 2x^+ + 2x^-$ ... $\cap\, x^+ = 0$, $x^+ > 0$, und wir haben einen Widerspruch.

2.11. *Es sei G eine l-Gruppe; setzen wir voraus, dass $S \neq \{0\}$ die Bedingungen (α) und (γ) erfüllt. Dann erfüllt S auch die Bedingung (β).*

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es $s \in S$ mit $s \neq 0$. Nach 2.10 ist dann $0 < |s| \in S$. Nach 2.9 ist S konvex in $G(\leqq)$. Setzen wir voraus, dass

es ein Element $x \in G - S$ mit $x \mid 0$ gibt. Dann haben wir $x^+ > 0$, $-x^- > 0$. Aus (γ) folgt, dass entweder $x^+ \in S$ und $-x^- \in S$ oder $x^+ \notin S$ und $x^- \notin S$ ist. Im ersten Fall bekommen wir $x \in S$, was ein Widerspruch ist. Im zweiten Fall ist nach (γ) $|s| < x^+$, $|s| < -x^-$, was unnöglich ist, da $x^+ \cap (-x^-) = 0$ gilt. Für $x \in G - S$ ist also entweder $x > 0$ oder $x < 0$. Es sei $u, v \in G$, $u + S \neq v + S$. Dann ist $u - v \notin S$, also $u - v > 0$ oder $u - v < 0$. Die Elemente $u + S$, $v + S$ von G/S sind daher vergleichbar.

Aus 2.9, 2.10 und 2.11 folgt:

2.12. *Es sei G eine l-Gruppe und S sei ein Normalteiler von $G(+)$. Wenn S die Bedingungen* (b) ,(c) *erfüllt, so ist $G = \langle S \rangle$. Wenn $S \neq \{0\}$ die Bedingung* (c) *erfüllt, so gilt $G = \langle S \rangle$.*

Bemerkung. Für die halbgeordneten Gruppen bleibt die zu 2.11 analoge Behauptung nicht in Kraft: aus (α), (γ) und $S \neq \{0\}$ folgt die Bedingung (β) nicht. Beispiel: es sei G eine trivialerweise halbgerodnete Gruppe, S sei ein Normalteiler von G, $\{0\} \neq S \neq G$. Die Bedingungen (α) und (γ) sind dann erfüllt, aber (β) gilt nicht. Wenn man also den Begriff der lexikographischen Erweiterung für halbgeordnete Gruppen derart verallgemeinern will, dass dieser Begriff analoge Eigenschaften wie im Fall der l-Gruppen hat, so muss man auch im Falle $S \neq \{0\}$ die Bedingung (β) postulieren. Führen wir daher die folgende Definition ein:

2.13. Es sei G eine halbgeordnete Gruppe und $S \subset G$. Wir schreiben $G = \langle S \rangle$ (*G ist eine lexikographische Erweiterung von S*), wenn die Bedingungen (β) und (γ) erfüllt sind.

2.14 *S sei ein Normalteiler von $G(+)$ und zugleich eine konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$. Dann ist die Gleichheit $G = \langle S \rangle$ mit*

$$(\delta)\ \text{aus } y \in G - S \text{ folgt } y > 0 \text{ oder } y < 0$$

äquivalent.

Beweis. Es sei (δ) erfüllt und es sei $u, v \in G$, $u + S \neq v + S$. Dann haben wir $u - v \notin S$, also sind die Elemente $u + S$, $v + S$ von G/S nach (δ) ver-gleichbar und damit ist (β) erfüllt. Es sei $x \in G^+ - S$, $a \in S$. Nach (δ) sind die Elemente $a - x$, 0 vergleichbar. Wäre $a - x > 0$, dann bekämen wir $a > x > 0$, also $x \in S$, was ein Widerspruch ist. Es ist also $a < x$ und es gilt (γ).

Umgekehrt, es sei $G = \langle S \rangle$, $y \in G - S$. In der halbgeordneten Gruppe G/S ist das Element $y + S$ entweder positiv oder negativ; untersuchen wir den ersten Fall (der zweite Fall ist analog). Es gibt ein $y_1 \in y + S$ mit $y_1 > 0$. Da $y_1 - y \in S$ ist, haben wir nach (γ) $y_1 - y < y_1$, also ist $y > 0$.

Untersuchen wir jetzt die Bedingungen (1) und (3) aus 2.8.1 für den Fall, wenn G eine halbgeordnete Gruppe ist.

2.15. *Es sei G eine halbgeordnete Gruppe und H sei ein Normalteiler von $G(+)$. Dann sind die Bedingungen* (1) *und* (3) *äquivalent.*

Beweis. a) Zuerst beweisen wir: erfüllt H die Bedingung (3) so ist H eine konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$. Es sei nämlich $u, v \in H$, $x \in G$, $u < x < v$. Ist $x \notin H$, dann haben wir $x + H \neq H$, $0 > x - v \in x + H$, $0 < x - u \in$ $\in x + H$, was ein Widerspruch zu (3) ist.

b) Es sei (1) erfüllt. Nach 2.13 und 2.9 ist H eine konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$, also sind auch alle Klassen $x + H$ konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$. Es sei $x + H \neq H$, $y \in x + H$. Nach 2.14 ist entweder $y > 0$ oder $y < 0$. Wenn es Elemente $y_1, y_2 \in x + H$ mit $y_1 < 0 < y_2$ gibt, so folgt aus der Konvexität der Menge $x + H$ die Beziehung $0 \in x + H$, also $x + H = H$, was ein Widerspruch ist. Also gilt (3).

c) Es sei (3) erfüllt. Nach a) ist H eine konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$; nach 2.14 gilt dann (1).

Bemerkung. Es sei G eine l-Gruppe. Aus 2.15 folgt, dass die Implikation (3) $\Rightarrow$ (1) in 2.8.1. schon dann gilt, wenn H ein Normalteiler von $G(+)$ ist.

Für $H \subset G$ betrachten wir ferner die Bedingung:

(2′) $N_1(G) \subset H$.

Offensichtlich ist (2′) $\Leftrightarrow$ (γ) (für $H = S$); nach 2.14 und 2.15 haben wir also:

2.16. Satz. *Es sei G eine halbgeordnete Gruppe, $H \subset G$. Dann sind die Bedingungen* (1), (2′) *und* (3) *äquivalent.*

Bemerkung. Im 2.16 kann die Voraussetzung über die Konvexität der Menge H nicht ausgelassen werden. Beispiel: Es sei G eine komutative geordnete Gruppe und es sei H eine Untergruppe von G, $\{0\} \neq H \neq G$, so dass H keine konvexe Teilmenge von G $(\leqq)$ ist. Die Bedingung (2′) ist trivialerweise erfüllt und (1) gilt nicht.

2.17. Satz. *Es sei G eine halbgeordnete Gruppe.* $[N_1(G)]$ *ist ein Normalteiler von $G(+)$ und zugleich eine konvexe Teilmenge von $G(\leqq)$; ferner ist* $N_1([N_1(G)] = N_1(G)$ *und* $G = \langle[N_1(G)]\rangle$.

Die erste Behauptung folgt aus 2.1, 2.2 und 2.3; die zweite Behauptung ist klar; die dritte folgt aus 2.14.

2.18. *Wenn die halbgeordnete Gruppe G nicht geordnet ist, so ist G eine nichttriviale lexikographische Erweiterung genau dann, wenn $B(0) \neq G$ gilt.*

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $N_1(G) \neq \{0\}$; die Behauptung folgt jetzt unmittelbar aus 2.17 und 2.14.

2.19. *Wenn die halbgeordnete Gruppe G nich geordnet ist, so kann man schon aus den Eigenschaften der halbgeordneten Menge $G(\leqq)$ entscheiden, ob G eine nichttriviale lexikographische Erweiterung ist.*

Beweis. Nach 2.18 hängt die Frage, ob G eine nichttriviale lexikographische

Erweiterung ist, nur von der Menge $B(0)$ ab. Bei der Definition der Menge $B(0)$ wurde die Operation $+$ nich benutzt.

§ 3. Die Intervalltopologie in einer lexikographischen Erweiterung.

Im ganzen § 3 setzen wir voraus, dass $G = \langle S\rangle$ ist. Wenn $a \in S$ gilt, bezeichnen wir $J_1(a) = \{x : x \in S,\ x \leqq a\}$, $J_2(a) = \{x : x \in S,\ x \geqq a\}$.

3.1. *Es sei $a, b \in S$, $a \neq b$, und M ein minimales s-System für a, b in G. Dann besteht eine der folgenden Bedingungen:*

a) *Alle Elemente a_i gehören zu S und $M_1 = \{J_1(a_i)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist ein s-System für a, b in S.*

b) *Alle Elemente b_j gehören zu S und $M_2 = \{J_2(b_j)\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ ist ein s-System für a, b in S.*

c) *Alle Elemente a_i, b_j gehören zu S und $M_3 = \{J_1(a_i), J_2(b_j)\}$ $(i = 1, \ldots, n;$ $j = 1, \ldots, m)$ ist ein s-System für a, b in S.*

Beweis. Aus der Minimalität von M ergibt es sich, dass die Elemente a_i unvergleichbar sind. Aus der Definition der lexikographischen Erweiterung folgt es dann, dass es in G/S eine Klasse $x + S$ gibt, so dass alle a_i in der Klasse $x + S$ liegen. Also entweder gehören alle a_i zu S, oder liegt kein a_i in S. Eine analoge Behauptung gilt für b_j. Wenn ferner a_i nicht zu S gehört, so ist $a_i < 0$ (aus $a_i > 0$ folgt nämlich $a, b \in I_1(a_i)$, was ein Widerspruch ist). In analoger Weise folgt aus $b_j \notin S$ die Beziehung $b_j > 0$.

Setzen wir voraus, dass $b_j \notin S$ ist. Wäre zugleich $a_i \notin S$, so gehört das Element 0 zu keiner der Mengen des Systems M, was unmöglich ist. Es ist also $a_i \in S$. Dann ist M_1 ein s-System für a, b in S. Der Fall $a_i \notin S$ ist analog. Wenn $a_i, b_j \in S$, so ist M_3 offensichtlich ein s-System für a, b in S.

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses aus [4] dar.

3.2. Satz. *Es sei $G = \langle S\rangle$. G erfüllt die Bedingung* (h) *dann und nur dann, wenn S die Bedingung* (h) *erfüllt.*

Beweis. Wenn G die Bedingung (h) erfüllt, so gilt (h) nach 3.1 auch für S. Setzen wir voraus, dass S die Bedingung (h) erfüllt. Wenn S eine geordnete Gruppe ist, so ist auch G eine geordnete Gruppe, also ist (h) für G erfüllt. Es sei G nicht geordnet. Dann gibt es zu jedem $s \in S$ ein Element $s' \in S$ mit $s' \mid s$. Es sei $u, v \in G$, $u \neq v$. Wenn $v - u \in S$ ist, setzen wir $a = 0$, $b = v - u$; nach der Voraussetzung gibt es ein s-System $J_1(a_1'), \ldots, J_1(a_n')$; $J_2(b_1'), \ldots,$ $J_2(b_m')$ für a, b in S. Bezeichnen wir $a_i = a_i' + u$, $b_j = b_j' + u$; dann ist M ein s-System für u, v in G. Wenn $v - u \notin S$ ist, so sind u und v vergleichbar; es sei z. B. $u < v$. Es gibt u_1, v_1 mit $u_1 \mid u$, $v_1 \mid v$. Offensichtlich ist $u_1 - u \in S$, $v_1 - v \in S$, also gilt $u_1 < v$, $u < v_1$. Die Menge $\{I_2(u_1), I_1(v_1)\}$ ist dann ein s-System für u, v in G.

§ 4. Gerichtete Gruppen. Wenn G eine l-Gruppe ist, die als eine nichttriviale Kardinalsumme darstellbar ist, so erfüllt G die Bedingung (h) nicht (vgl. [2], [7]). Diesen Satz kann man für gerichtete Gruppen verallgemeinern. Wir führen zuerst die folgende Definition ein (vgl. z. B. [2]):

4.1. Eine halbgeordnete Gruppe G heisst eine *Kardinalsumme von halbgeordneten Gruppen G_i, wenn*

a) $G(+)$ eine direkte Summe der Gruppen $G_i(+)$ ist;

b) wenn $g = g_1 + \ldots + g_n, g_k \in G_{i(k)}$ ist, wobei $i(k_1) \neq i(k_2)$ für $k_1 \neq k_2$ gilt, so ist $g \geqq 0$ genau dann, wenn $g_k \geqq 0$ für $k = 1, \ldots, n$ ist.

Im solchen Fall schreiben wir $G = \dot{\sum} G_i$.

4.2. *Es sei $G \neq \{0\}$ eine gerichtete Gruppe, die eine mengentheoretische Summe endlichvieler u-Intervalle ist; dann gibt es ein $c \in G^+$ mit*

$$G = I_1(c) \cup I_2(0). \tag{4.1}$$

Beweis. Setzen wir voraus, dass das System M (vgl. (1.1)) von u-Intervallen die Menge G bedeckt. Wäre $\{a_i, \ldots, a_n\} = \emptyset$, so sei u eine untere Schranke der Menge $\{b_1, \ldots, b_n\}$ (eine solche existiert, da G eine gerichtete Gruppe ist). Nach der Voraussetzung wäre dann $G = I_2(u)$, was unmöglich ist, da G kein kleinstes Element besitzt. Also ist $\{a_1, \ldots, a_n\} \neq \emptyset$; in analoger Weise beweist man, dass $\{b_1, \ldots, b_m\} \neq \emptyset$ ist. Da G eine gerichtete Gruppe ist, gibt es eine untere Schranke b_0 der Menge $\{b_1, \ldots, b_m\}$; ferner gibt es eine obere Schranke a_0 der Menge $\{b_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Offensichtlich ist $b_0 \leqq a_0$, $G = I_1(a_0) \cup I_2(b_0)$; bezeichnen wir $a_0 - b_0 = c$, so bekommen wir die Beziehung (4.1).

4.3. *Es sei $G = \dot{\sum} G_i$, wobei wenigstens zwei der halbgeordneten Gruppen G_i gerichtet und von $\{0\}$ verschieden sind. Dann kann G nicht durch eine endliche Anzahl von u-Intervallen bedeckt werden.*

Beweis. Setzen wir voraus, das G_{i_1} und G_{i_2} $(i_1 \neq i_2)$ gerichtet und von $\{0\}$ verschieden sind. Wenn sich G durch endlichviele u-Intervalle bedecken lässt, so existiert $c \in G^+$, so dass (4.1) erfüllt ist. Nach der Voraussetzung ist dann c in der Form $c = c_1 + \ldots + c_n$, $c_k \in G_{i(k)}$ darstellbar, wobei für $k_1 \neq k_2$ auch $i(k_1) \neq i(k_2)$ ist. Man kann voraussetzen, dass $i_1 = i(1)$, $i_2 = i(2)$ ist (der Fall $c_{i_1} = 0$ oder $c_{i_2} = 0$ ist nicht ausgeschlossen). In G_{i_1} bzw. G_{i_2} gibt es p_1 bzw. p_2 so dass $p_1 > 0$, $p_1 > c_1$, bzw. $p_2 < 0$ ist. Für das Element $p = p_1 + p_2$ haben wir dann $p \parallel 0$, $p \nleqq c$; also besteht (4.1) nicht, was ein Widerspruch ist.

4.4. Satz. *Es sei $G = \dot{\sum} G_i$, wobei wenigstens zwei der halbgeordneten Gruppen G_i gerichtet und von $\{0\}$ verschieden sind. Dann erfüllt G die Bedingung (h) nicht.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus **4.3** und **4.2**.

Dieser Satz enthält als einen Spezialfal den Satz 2 aus [7] (vgl. auch [2, Lemma 6.5]).

Es sei (bis zu Ende des § 4) $G \neq \{0\}$ eine beliebige (festgewählte) halbgeordnete Gruppe. Untersuchen wir die folgende Bedingung für eine natürliche Zahl n:

(v_n') Es gibt Elemente $b_1, \ldots, b_n \in N_1(G)$ so dass $b = b_1 + \ldots + b_n$ eine obere Schranke der Menge $N_1(G)$ ist und $b \geqq 0$ gilt.

4.5. *Setzen wir voraus, dass G nicht geordnet und $B(0)$ eine gerichtete Gruppe ist. Wenn G die Bedingung* (h) *erfüllt, dan gibt es eine natürliche Zahl n, so dass (v_n') gilt.*

Beweis. Da G die Bedingung (h) erfüllt, ist nach **3.2** und **2.17** (h) auch in $B(0)$ erfüllt, also lässt sich $B(0)$ durch endlichviele Mengen der Form $I_1(a_i) \cap B(0)$, $I_2(b_j) \cap B(0)$ $(a_i, b_j \in B(0))$ bedecken. Nach **4.2** gibt es dann ein Element $c \in B(0)$, $c \geqq 0$, so dass

$$B(0) = [I_1(c) \cap B(0)] \cup [I_2(c) \cap B(0)] \tag{4.2}$$

ist. Nach **2.2** gibt es Elemente $b_1, \ldots, b_n \in N_1(G)$ mit $c = b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n$; nach (4.2) ist $x \leqq c$ für jedes $c \in N_1(G)$, als ist (v_n') erfüllt.

4.6. Satz. *Setzen wir voraus, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *$B(0)$ ist eine gerichtete Gruppe.*

(b) $x \in N_1(G) \Rightarrow 2x \in N_1(G)$.

(c) *$B(0)(+)$ ist kommutativ.*

Dann gilt (h) $\Rightarrow$ (o).

Beweis. Setzen wir voraus, dass G die Bedingungen (a), (b) und (c) erfüllt und dass G nicht geordnet ist. Es sei A die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die (v_n') gilt. Nach **4.5** ist $A \neq \emptyset$; es sei n die kleinste Zahl der Menge A. Wäre $n = 1$, d. h. $b = b_1$, so bekommen wir nach (b) $2b_1 \in N_1(G)$, also nach (v_n') $2b_1 \leqq b_1$; daraus folgt $b_1 \leqq 0$, ein Widerspruch. Der Fall $n = 1$ ist damit ausgeschlossen. Ferner ist nach (h) $2b_1 \leqq b_1 + \ldots + b_n$, $b_1 \leqq b_2 + \ldots + b_n$, also gilt nach (c) $b \leqq 2b_2 + \ldots + 2b_n$, wobei nach (b) $2b_i \in N_1(G)$ ist; damit haben wir einen Widerspruch mit der Minimalität der Zahl n.

In [4] wurde die folgende Bedingung untersucht (unter der Voraussetzung, dass G eine l-Gruppe ist):

(v_n) Es gibt Elemente $b_1, \ldots, b_n \in N(G)$, so dass $b = b_1 + \ldots + b_n$ eine obere Schranke der Menge $N(G)$ ist.

4.7. *Es sei G eine l-Gruppe, die nicht geordnet ist. Dann gilt* $(v_n) \Rightarrow (v_{2n}')$, $(v_n') \Rightarrow (v_n)$.

Beweis. a) Zuerst beweisen wir die Behauptung: Ist G nicht geordnet, so ist ein Element $c \in G$ genau dann eine obere Schranke der Menge $N(G)$, wenn c eine obere Schranke der Menge $N_1(G)$ ist. Es sei nämlich $y \leqq c$ für jedes $y \in N(G)$, und es sei $x \in N_1(G)$. Dann ist $x < x^+ \in N(G)$, also gilt $x \leqq c$. Umgekehrt sei $x \leqq c$ für jedes $x \in N_1(G)$ und es sei $y \in N(G)$. Dann gibt es $z > 0$, so dass $y \cap z = 0$ ist; bezeichnen wir $u = y - z$. Wir haben u, $-u \in N_1(G)$, also $u \cup (-u) \leqq c$; da $u \cup (-u) = y \cup z > y$ ist, bekommen wir $y < c$.

b) Setzen wir voraus, dass (v_n) gilt. Zu jedem b_i existiert ein Element $b_i' \in N(G)$ mit $b_i \cap b_i' = 0$. Dann ist $b_i = (2b_i - b_i') + (b_i' - b_i)$, und zugleich gilt $2b_i - b_i'$, $b_i' - b_i \in N_1(G)$. Offensichtlich ist $b > 0$. Also ist die Bedingung (v_{2n}') erfüllt. Es gelte umgekehrt (v_n'). Da $b_i = b_i^+ + b_i^-$ ist, wobei $b_i^+ \in N(G)$, $b_i^- < 0$ ist, haben wir $b < b_1^+ + \ldots + b_n^+$, und daher gilt (v_n).

4.7.1. Bemerkung. In [4] wurde bewiesen, dass in einer kommutativen 1-Gruppe, die nicht geordnet ist, die Bedingung (v_n) (und also nach 4.7 auch die Bedingung (v_n')) für keine natürliche Zahl n gelten kann. Dagegen gibt es kommutative gerichtete Gruppen, für welche die Bedingung (v_1') erfüllt ist. Beispiel: es sei G die Menge aller Paare (n, m), wo n die Menge aller ganzen Zahlen durchläuft und $m \in \{0, 1\}$ ist; die Operation $+$ sei in G komponentenweise definiert (die Summe $m_1 + m_2$ wird modulo 2 gerechnet). Setzen wir $b = b_1 =$ $(n_1, m_1) > (n_2, m_2)$ genau dann, wenn $n_1 > n_2$ ist; ferner setzen wir $b = b_1 =$ $= (0,1)$. Dann erfüllt G die obengenanten Bedingungen. Zugleich bildet G ein Beispiel einer gerichteten Gruppe, die nicht geordnet ist und die Bedingung (h) befriedigt (dies folgt aus 3.2, denn $G = \langle B(0) \rangle$ und die Menge $B(0) =$ $= \{(0, 0), (0, 1)\}$ ist endlich).

4.8. *Es sei G eine halbgeordnete Gruppe, die nicht geordnet ist, wobei $B(0)$ gerichtet ist. Wenn G die Bedingung (h) befriedigt, dann gibt es Elemente x_1, x_2, $x_3 \in G$, so dass Folgendes gilt:*

(a) $0 \mid x_1 \mid x_2 \mid x_3$; $x_3 > 0$;
(b) *x_3 ist eine obere Schranke der Menge $N_1(G)$.*

Beweis. Wenn (h) erfüllt ist, so gibt es nach 4.5 eine natürliche Zahl n, so dass (v_n') erfüllt ist. Da $b_i \in N_1(G)$ gilt, gehört b zu $B(0)$. Nach der Definition der Menge $B(0)$ gibt es Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_m \in G$, so dass $x_0 = 0$, $x_m = b$, $x_i \mid x_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, m - 1)$ ist. Es sei m die kleinste der natürlichen Zahlen k mit der folgenden Eigenschaft: es gibt Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_k \in G$ mit $x_0 = 0$, $x_i \mid x_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, k - 1)$, $x_k > 0$, wobei x_k eine obere Schranke der Menge $N_1(G)$ ist.

a) Setzen wir voraus, dass $m > 3$ ist. Es sei $c \in G$, $c \mid 0$. Wäre $c \mid x_3$, so nehmen wir die $(m - 1)$-gliedrige Folge $0, c, x_3, x_4, \ldots, x_m$ in Betracht und wir haben einen Widerspruch mit der Minimalität von m. Jedes Element $c \in N_1(G)$ ist also mit x_3 vergleichbar. Die Voraussetzung $0 \mid x_3$ führt zum

Widerspruch (wenn man die Elemente $0, x_3, x_4, \ldots, x_m$ betrachtet). Ferner folgt aus $x_3 \leqq 0$ für $y_j = x_j - x_3$ $(j = 3, 4, \ldots, m)$ die Beziehung $0 \mid y_4 \mid y_5 \ldots$ $\ldots \mid y_m$, $y_m = x_m - x_3 \geqq x_m > 0$ und wir haben wieder einen Widerspruch mit der Minimalität der Zahl m. Es ist also $x_3 > 0$, so dass für jedes $c \in N_1(G)$ $c \leqq x_3$ ist; wir haben damit $m \leqq 3$.

b) Der Fall $m = 1$ ist ausgeschlossen, da $0 \mid x_1$ ist und nach der Voraussetzung $x_k > 0$ sein soll. Die Gleichheit $m = 2$ ist auch ausgeschlossen, da in diesem Fall $x_2 \geqq x_1$ wäre (denn es ist $x_1 \in N(G)$). Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.8.1. *Für das Element x_2 aus 4.8 gilt $x_2 > 0$.*

Beweis. Wäre $0 \mid x_2$, so ist (bei derselben Bezeichnung wie im Beweise des Satzes 4.8) $0 \mid x_2 \mid x_3$, also $m < 3$, was unmöglich ist. Aus $x_2 < 0$ und aus $x_2 \mid x_3$ bekommt man $0 \mid x_3 - x_2 > x_3$, was nach (b) ausgeschlossen ist. Im Falle $x_2 = 0$ haben wir $0 \mid x_3$; nach (a) ist aber $x_3 > 0$. Also ist $x_2 > 0$.

Da $x_3 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) + x_1$ und $x_3 - x_2$, $x_2 - x_1$, $x_1 \in N_1(G)$ ist, bekommen wir aus 4.8 die folgende Verschärfung des Satzes 4.5:

4.9. *Es sei G eine halbgeordnete Gruppe, die nicht geordnet ist und $B(0)$ sei gerichtet. Dann gilt* (h) $\Rightarrow$ (v_3').

Insbesondere bekommt man aus 4.9 und 4.7 die Verschärfung des erwähnten Ergebnisses aus [4]:

4.10. *Es sei G eine l-Gruppe, die nicht geordnet ist. Dann gilt* (h) $\Rightarrow$ (v_3).

§ 5. Intervalltopologie in einer 1-Gruppe. In dem ganzen § 5 setzen wir voraus, dass G eine 1-Gruppe ist, $G \neq \{0\}$. Es ist bekannt, dass $G(\leqq)$ ein distributiver Verband ist (vgl. [1]). Bezeichnen wir $\{0\} \cup N(G) = N'$. Offensitlich folgt aus $x \in G^+$, $y \in N'$, $x \leqq y$ die Beziehung $x \in N'$.

5.1. *Wenn G nicht geordnet und $x_1, x_2 \in N'$, $x = x_1 + x_2$ ist, so gibt es $y \in N(G)$ mit $y \nleqq x$.*

Beweis. Erwähnen wir zuerst, dass aus $t \in N(G)$ immer $nt \in N(G)$ folgt, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Setzen wir voraus, dass $x_1, x_2 \in N'$, und $x = x_1 + x_2$ eine obere Schranke der Menge $N(G)$ ist. Da G nicht geordnet ist, gilt $N(G) \neq \emptyset$. Dann haben wir $2x_1 \leqq x$, also $x_1 \leqq x_2$, $x \leqq 2x_2$. Aus $N(G) \neq \emptyset$ folgt $x_2 > 0$. Nach der Voraussetzung ist dann $3x_2 \in N(G)$, also $3x_2 \leqq 2x_2$, und wir haben einen Widerspruch.

5.2. *Es sei a, $b \in G$, $a \cap b = u$, $a \cup b = v$. Setzen wir voraus, dass $u \neq b$ oder $a \neq v$ und $\langle c, d\rangle \subset \langle u, a\rangle$ oder $\langle c, d\rangle \subset \langle b, v\rangle$ ist. Dann gilt $-c + d \in N'$.*

Beweis. Die Beziehungen $u \neq b$, $a \neq v$ sind äquivalent; setzen wir voraus, dass $u \neq b$ ist. Es gilt $-u + a = -b + v$ (vgl. [1]), also ist $0 \leqq -c + d \leqq$ $\leqq -u + a$. Es genügt also die Beziehung $-u + a \in N'$ zu beweisen. Nach der Voraussetzung ist $-u + b > 0$; ferner ist $(-u + b) \cap (-u + a) =$ $= -u + (b \cap a) = 0$. Damit ist der Beweis erbracht.

5.3. Satz. *Es sei G eine l-Gruppe, die die Bedingung* (h) *erfüllt. Wenn G nicht geordnet ist, so gibt es Elemente $x_1, x_2, x_3 \in G$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *x_3 ist eine obere Schranke der Menge $N(G)$.*

(b) *Der durch die Menge $\{0, x_1, x_2, x_3\}$ erzeugte Teilverband S des Verbandes $G(\leqq)$ ist zu dem Verband S' auf der Abb. 1 isomorph.*

Beweis. Untersuchen wir die Elemente x_1, x_2, x_3 aus dem Satz 4.8. Nach diesem Satz (wenn man noch den Teil a) des Beweises von 4.7 in Betracht nimmt) ist x_3 eine obere Schranke der Menge $N(G)$ und es gilt $0 \mid x_1 \mid x_2 \mid x_3$, $x_3 > 0$. Es ist also $x_1 < x_3$ und nach 4.8.1 gilt auch $0 < x_2$.

Bezeichnen wir $A_0 = \{0, x_1, x_2, x_3\}$. Es sei $A_1 = \{a \cap b : a, b \in A_0\}$. Dann ist $A_1 = A_0 \cup \{0 \cap x_1, x_1 \cap x_2, x_2 \cap x_3\}$. Aus der Distributivität von S folgt, dass jedes Element $z \in S$ die Vereinigung gewisser zu A_1 gehöriger Elemente ist. Bezeichnen wir $u = x_1 \cap x_2$, $v = x_2 \cap x_3$ und betrachten wir die endliche Folge

$$0, u, v, x_1, x_2, x_3. \tag{5.1}$$

Jedes Element $z \in S - A_1$ kann in der Form

$$z = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_k, \; k > 1$$

dargestellt werden, wobei die Elemente a_i, a_j $(i, j = 1, \ldots, k;\; i \neq j)$ unvergleichbar sind und $a_1, \ldots, a_k$ in derselben Reihenfolge wie in 5.1 stehen. Ist $a_1 = 0$, so ist $z = 0 \cup u$ oder $z = 0 \cup x_1$. Da für $y \in \{v, x_1, x_2, x_3\}$ die Ungleichheit $u \leqq y$ besteht, ist der Fall $a_1 = u$ ausgeschlossen. Wenn $a_1 = v$ ist, haben wir $z = v \cup x_1$. Wenn $a_1 = x_1$ bzw. $a_1 = x_2$ ist, so bleibt nur die Möglichkeit $z = x_1 \cup x_2$ bzw. $z = x_2 \cup x_3$. Offensichtlich ist $x_2 \cup x_3$ das grösste Element in S. Ferner ist $0 \cup u \leqq v$, $0 \cup u \leqq 0 \cup x_1 \leqq v \cup x_1 \leqq x_3$, $v \cup x_1 \leqq x_1 \cup x_2$. Aus diesen Beziehungen folgt die Existenz einer homomorphen Abbildung $\varphi : S' \to S$, in der $\varphi(0') = 0$, $\varphi(x_i') = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ gilt. Zum Beweise, dass φ ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass jedes Primintervall von S' auf ein Primintervall von S abgebildet wird. Ferner genügt es nur je einen Repräsententen aus jeder Klasse zueinander projektiver Primintervalle von S' zu untersuchen (vgl. [1, Kap. V.]). Untersuchen wir also die Intervalle

$$\alpha = \langle 0' \cap x_1', 0' \rangle, \; \beta = \langle x_3', x_2' \cup x_3' \rangle, \; \gamma = \langle u', x_1' \rangle,$$
$$\varepsilon = \langle 0' \cap x_1', u' \rangle, \; \eta = \langle x_1' \cup x_2', x_2' \cup x_3' \rangle,$$
$$\vartheta = \langle 0' \cup x_1', v' \cup x_1' \rangle.$$

Da 0 und x_1 unvergleichbar sind, gilt $0 \cap x_1 \neq 0$, also ist $\varphi(\alpha)$ ein Primintervall. In analoger Weise beweist man, dass auch $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$ Primintervalle sind (da x_2 und x_3, und auch x_1 und x_2 unvergleichbar sind).

Da $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$ und die zu diesen Intervallen projektiven Intervalle lauter Primintervalle von S sind, bekommt man nach 5.2 (vgl. Abb. 1)

$$0 \cup x_1, \; -v + x_3, \; -x_1 + (x_1 \cup x_2) \in N'. \tag{5.2}$$

Wäre jetzt $0 \cap x_1 = u$, so ist $0 \cup u = 0$, $v \leqq -u + x_2 = -x_1 + (x_1 \cup x_2)$, also ist $v \in N'$; aus $x_3 = v + (-v + x_3)$ und aus (5.2) bekommen wir einen Widerspruch zu 5.1. Also ist $\varphi(\varepsilon)$ ein Primintervall. Ist $\varphi(\eta)$ kein Primintervall, so haben wir

$$x_3 = v \cup x_1 = (0 \cup x_1) + [-(0 \cup x_1) + (v \cup x_1)].$$

Nach (5.2) gehören beide Summanden auf der rechten Seite zu N' und aus 5.1 bekommen wir einen Widerspruch. Wenn $\varphi(\vartheta)$ kein Primintervall ist, dann haben wir in analoger Weise $v = 0 \cup u$, also $x_3 = (0 \cup u) + (-v + x_3)$, woraus sich nach (5.2) und 5.1 ein Widerspruch ergibt.

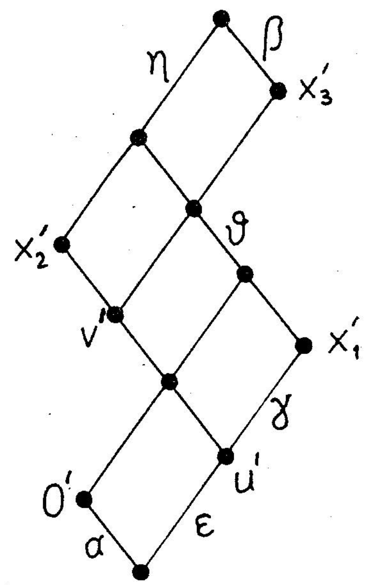

Abb. 1.

Es sei $A \subset G^+$. Wir sagen, dass A eine disjunkte Menge ist, wenn $0 \notin A$ ist und für je zwei Elemente $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ die Beziehung $a_1 \cap a_2 = 0$ gilt. Es sei $\alpha > 1$ eine Kardinalzahl. Betrachten wir die folgende Bedingung für G:

(α) *Ist $A \subset G$ eine von oben beschränkte disjunkte Menge, so ist* card $A < \alpha$.

In der Arbeit [2] wurde die Intervalltopologie in 1-Gruppen untersucht, die der Bedingung ($\aleph_0$) genügen.

5.4. Satz. *Es sei G eine l-Gruppe, die der Bedingung* (α) *genügt. Wenn es in G eine disjunkte Menge B mit* card $B \geqq \alpha$ *gibt, so erfüllt G die Bedingung* (h) *nicht.*

Beweis. Es sei B eine disjunkte Teilmenge von G mit card $B \geqq \alpha$. Setzen wir voraus, dass G der Bedingung (h) genügt. Das Element x_3 aus dem Satz 5.3 ist nach dem Teil a) des Beweises von 4.7 eine obere Schranke der Menge B; nach (α) ist also card $B < \alpha$, und wir haben einen Widerspruch.

LITERATUR

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, New York 1948.

[2] Conrad P., *Some structure theorems for lattice ordered groups*, Trans. Amer. Math. Soc. *99* (1961), 212–240.

[3] Jakubík J., *The interval topology of an l-group*, Mat.-fyz. časop. *12* (1962), 209–211.

[4] Jakubík J., *Interval topology of an l-group*, Colloq. math. *11* (1963), 65–72.

[5] Якубик Я., *Об одном классе структурно упорядоченных групп*, Časop. pěstov. mat. *84* (1959), 150–161.

[6] Шимбирева Е. П., *К теории частично упорядоченных групп*, Матем. сб. *20* (1947), 145–178.

[7] Wolk E. S., *On the interval topology of an l-group*, Proc. Amer. Math. Soc. *12* (1961), 304–307.

[8] Holland Ch. *The interval topology of a certain l-group*, Чехосл. матем. ж. *15* (*90*) (1965), 311–314.

Eingegangen am 24. 9. 1964.

Katedra matematiky Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej,
Košice

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Ян Якубик

Резюме

В работах [2, 3, 4, 7] был исследован вопрос о том, при каких условиях структурно упорядоченная группа G является топологической группой или хаусдорфовым пространством относительно интервальной топологии. Нами исследуются аналогичные вопросы для частично упорядоченных групп. В § 1 доказывается, что этот вопрос зависит по существу только от некоторого подмножества $K(0)$ частично упорядоченной группы G. В § 2 рассматриваются лексикографические расширения частично упорядоченных групп; в § 3 исследуется интервальная топология на лексикографическом расширении. Результаты из § 4 и § 5, касающиеся направленных групп и структурно упорядоченных групп, являются продолжением и обобщением некоторых теорем работы [4].