

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГЕОЭЛЕКТРИКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КРУГОВЫХ ПОЛУЦИЛИНДРОВ В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ТОЧЕЧНОМ ПИТАНИИ

СИЛВЕСТЕР КРАЙЧОВИЧ (SILVESTER KRAJČOVIČ), Братислава

В практике геоэлектрической разведки может встретиться задача об исследовании геоэлектрических аномалий сопротивлений, вызванных точечным источником постоянного тока в такой геологической среде, которую можно характеризовать системой коаксиальных круговых полуцилиндров, длину которых — по сравнению с радиусом полуцилиндров — мы будем считать бесконечно большой (рис. 1).

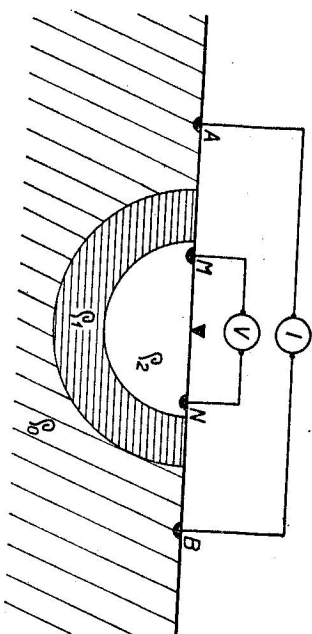


Рис. 1.

Краевую задачу геоэлектрики для этого случая мы можем формулировать следующим образом: пусть в бесконечном, однородном и изотропном полупространстве с удельным электрическим сопротивлением ρ_0 находятся удельными, коаксиальными, круговые полуцилиндры, характеризуемые пространственным распределением токового поля точечного источника постоянного тока для произвольной точки на поверхности полупространства (на поверхности Земли, которую мы обозначим σ), кроме точки питания, в которой токовое поле имеет известную сингулярность.

Эту задачу мы будем решать сначала для круговых, бесконечных, коаксиальных цилиндров в бесконечном пространстве, а потом с помощью подходящих математических преобразований — используя условие $\left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial n}\right)_{\sigma} = 0$ — мы получим формулы, действительные для полуцилиндров в полупространстве.

С первого взгляда становятся очевидными, что геометрическое расположение питающих электродов **A**, **B** и измерительных зондов **M**, **N** будет меняться между двумя экстремальными положениями:

а) питающие электроды и измерительные зонды будут находиться на прямой, параллельной общей оси круговых цилиндров;

б) питающие электроды и измерительные зонды будут находиться на прямой, проходящей через начало цилиндрической системы координат и перпендикулярной к координатной оси z .

Для специального расположения, при котором электроды и зонды находятся на оси цилиндров, крайняя задача решена в работе [1]. Задача для второго расположения электродов и зондов, которая будет предметом нашего рассмотрения, решается — для случая цилиндра при внешнем питании — в работе [2]. Это решение, полученное в виде суммы несобственных интегралов, надо обобщить для системы коаксиальных цилиндров, и потом получить формулы для системы полуцилиндров, что и является целью настоящей работы.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Введем согласно [2] следующие обозначения: **Q** — точечный источник поля, J — сила тока, ρ_2 — удельное сопротивление цилиндра, ρ_1 — удельное сопротивление окружающей среды, $r_0 = 1$ — радиус цилиндра, **P** — измерительная точка; потом для потенциала вне цилиндра при внешнем питании действительная формула:

$$(1) \quad \mathcal{Q}_1(r, \varphi, z) = \frac{J \rho_1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(r t) j_n(a t) \cos n \varphi \right\} \cos t z dt,$$

в то время как для потенциала внутри цилиндра при внешнем питании мы имеем:

$$(2) \quad \mathcal{Q}_2(r, \varphi, z) = \frac{J \rho_1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(r t) j_n(a t) \cos n \varphi \right\} \cos t z dt.$$

В формулах (1) и (2) $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$; $K_n(x) = \frac{1}{2} \pi i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$ являются преобразованными функциями Бесселя и Ханкеля соответственно, $1/R$ — обратная величина расстояния между точками питания Q и измерения P , $\kappa_n(at)$ и $\psi_n(at)$ — неизвестные функции, которые нужно определить из краевых условий. Для внешнего питания (рис. 2) мы имеем:

$$(3) \quad \frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(r't) K_n(at) \cos n\varphi \right] \cos tz \, dt, \quad r < a;$$

смотрим например [3].

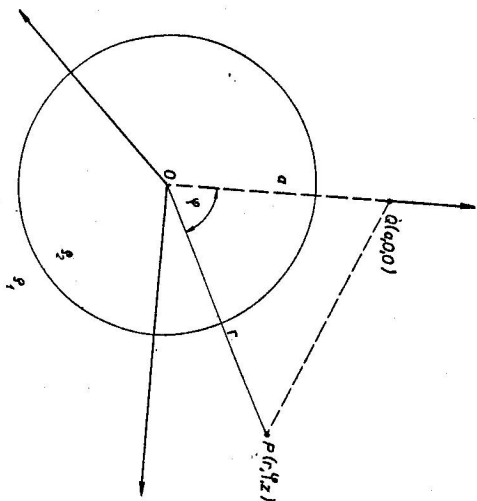


Рис. 2.

Для функций $\kappa_n(at)$ и $\psi_n(at)$ при внешнем питании и для $a > r$ мы получим систему уравнений:

$$(4) \quad I_n(t) \psi_n(at) - K_n(t) \kappa_n(at) = 0,$$

$$\varrho_1 I'_n(t) \psi_n(at) - \varrho_2 K'_n(t) \kappa_n(at) = (\varrho_2 - \varrho_1) I'_n(t) K_n(at),$$

решение которой имеет следующий вид:

$$(5) \quad \kappa_n(at) = (\varrho_2 - \varrho_1) \frac{I_n(t) I'_n(t) K_n(at)}{\varrho_1 K_n(t) I'_n(t) - \varrho_2 I_n(t) K'_n(t)},$$

$$(6) \quad \psi_n(at) = (\varrho_2 - \varrho_1) \frac{K_n(t) I'_n(t) K_n(at)}{\varrho_1 K_n(t) I'_n(t) - \varrho_2 I_n(t) K'_n(t)}.$$

Подставляя формулы (5) и (6) в формулы (1) и (2) соответственно, мы получим формулы для потенциала вне цилиндра и для потенциала в цилиндре, при $t_0 = 1$; $a > r$:

$$(7) \quad \varphi_1(r, \varphi, z) = \frac{J_{\varrho_1}}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(r't) K_n(at) + \frac{K_n(r't) K_n(at) I'_n(t) (\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1 K_n(t) I'_n(t) - \varrho_2 I_n(t) K'_n(t)} \right] \times \cos n\varphi \cos tz \, dt.$$

$$(8) \quad \varphi_2(r, \varphi, z) = \frac{J_{\varrho_1}}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(r't) K_n(at) + \frac{K_n(t) K_n(at) I'_n(t) (\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1 K_n(t) I'_n(t) - \varrho_2 I_n(t) K'_n(t)} \right] \times \cos n\varphi \cos tz \, dt.$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ В БЕСКОНЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим теперь случай коаксиальных круговых цилиндров, радиусы которых мы обозначим r_1 ; r_2 ; ($r_2 < r_1$) (рис. 3). Могут встретиться три случая, когда питающие электроды находятся во внутреннем цилиндре, три случая, когда питающие электроды находятся во внешнем цилиндре, и три случая, когда питающие электроды находятся во внешнем пространстве, причем измерительные зонды расположены:

- а) во внешнем пространстве ($r_1 < r$),
- б) во внешнем цилиндре ($r_2 < r < r_1$),
- в) во внутреннем цилиндре ($r < r_2$).

В первом случае ($r_1 < r < a$) мы имеем для потенциала токового поля следующее уравнение:

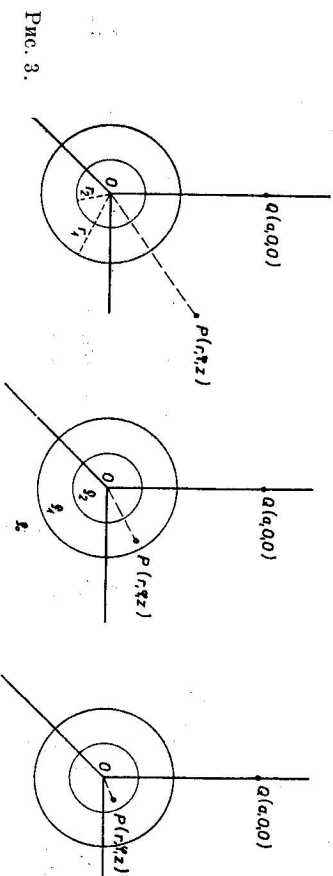


Рис. 3.

$$(9) \quad \mathcal{Q}_1(r, \varphi, z) = \frac{J_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\sum_{n=-\infty}^\infty K_n(r't) x_n^1(at) \cos n\varphi \right] \cos tz \, dt \right\},$$

где для величины $1/R$ действительна формула (3).

Потенциал токового поля во втором случае ($r_2 < r < r_1$) имеет вид:

$$(10) \quad \mathcal{Q}_2(r, \varphi, z) = \frac{J_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\sum_{n=-\infty}^\infty [K_n(r't) x_n^2(at) + I_n(r't) \psi_n^2(at)] \cos n\varphi \right] \cos tz \, dt \right\}.$$

Для потенциала токового поля в третьем случае ($r < r_2$) мы имеем:

$$(11) \quad \mathcal{Q}_3(r, \varphi, z) = \frac{J_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\sum_{n=-\infty}^\infty I_n(r't) \psi_n^3(at) \cos n\varphi \right] \cos tz \, dt \right\}.$$

Неизвестные функции $x_n^1(at)$; $x_n^2(at)$; $\psi_n^2(at)$; $\psi_n^3(at)$ мы определим из краевых условий, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_1)_{r=r_1} &= (\mathcal{Q}_2)_{r=r_1}, \\ (\mathcal{Q}_2)_{r=r_2} &= (\mathcal{Q}_3)_{r=r_2}, \\ \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial r} \right)_{r=r_1} &= \frac{1}{\varrho_1} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial r} \right)_{r=r_1}, \\ \frac{1}{\varrho_1} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial r} \right)_{r=r_2} &= \frac{1}{\varrho_2} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_3}{\partial r} \right)_{r=r_2}. \end{aligned}$$

В системе уравнений (12) нам понадобится выражение $\frac{\partial(1/R)}{\partial r}$, которое в нашем случае имеет вид:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial r} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\sum_{n=-\infty}^\infty I_n'(r't) K_n(at) \cos n\varphi \right] \cos tz \, dt.$$

Теперь мы можем построить систему уравнений для определения неизвестных; введем сначала для краткости следующие обозначения:

$$(13) \quad \mathcal{X} = x_n^1(at); \quad \mathcal{Y} = x_n^2(at); \quad \mathcal{Z} = \psi_n^2(at); \quad \mathcal{Q} = \psi_n^3(at);$$

$$\mathcal{X} K_n(r_1 t) - \mathcal{Q} K_n(r_1 t) - \mathcal{Z} I_n(r_1 t) = 0,$$

$$\mathcal{Q} K_n(r_2 t) + \mathcal{Z} I_n(r_2 t) - \mathcal{Q} I_n(r_2 t) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{I_n'(r_2 t) K_n(at)}{\varrho_0} + \frac{\mathcal{X} K_n'(r_1 t)}{\varrho_0} - \frac{I_n'(r_1 t) K_n(at)}{\varrho_1} - \frac{\mathcal{Y} K_n'(r_1 t)}{\varrho_1} - \frac{\mathcal{Z} I_n'(r_1 t)}{\varrho_1} &= 0, \\ \frac{I_n'(r_2 t) K_n(at)}{\varrho_1} + \frac{\mathcal{Y} K_n'(r_2 t)}{\varrho_1} + \frac{\mathcal{Z} I_n'(r_2 t)}{\varrho_1} - \frac{I_n'(r_2 t) K_n(at)}{\varrho_2} - \frac{\mathcal{Q} I_n'(r_2 t)}{\varrho_2} &= 0. \end{aligned}$$

Решив систему уравнений (13) и подставив таким образом определенную неизвестную функцию $\mathcal{X}$ в уравнение (9), мы получим для потенциала $\mathcal{Q}_1$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1(r, \varphi, z) &= \frac{J_0}{2\pi^2} \left\{ \int_0^\infty \sum_{n=-\infty}^\infty K_n(at) \left[I_n(r't) + K_n(r't) I_n'(r_1 t) I_n'(r_2 t) (I_n(r_2 t) K_n(r_1 t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_n(r_1 t) K_n(r_2 t)) \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\mathcal{Q} \varrho_0 \varrho_1^2} + K_n(r't) I_n'(r_1 t) I_n'(r_2 t) (I_n(r_1 t) K_n(r_2 t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_n'(r_2 t) K_n(r_1 t)) \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\mathcal{Q} \varrho_0 \varrho_1^2} + K_n(r't) I_n'(r_2 t) I_n'(r_2 t) (I_n(r_1 t) K_n(r_1 t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I_n'(r_1 t) K_n(r_1 t)) \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathcal{Q} \varrho_1^2 \varrho_2} \right] \cos n\varphi \cos tz \, dt \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

где символом $\mathcal{Q}$ обозначен определитель системы (13).

Таким-же образом мы могли бы получить, подставляя неизвестные функции $\mathcal{Y}$; $\mathcal{Z}$; $\mathcal{Q}$ в уравнения (10) и (11), формулы для потенциалов $\mathcal{Q}_2$ и $\mathcal{Q}_3$, которые для краткости не приводятся.

Уравнение (14) определяет пространственное распределение потенциала при условиях, которые были приведены в начале главы.

Только что полученную формулу можно легко преобразовать для аномального потенциала круговых коаксиальных полуцилиндров в бесконечном полупространстве. Поскольку в данном случае азимутальный угол φ , образованный радиус-векторами точек питания и измерения, будет равен нулю, для $n = 0, 1, 2, \dots$ будет $\cos n\varphi \equiv 1$. Если теперь положим точки питания и измерения на одну прямую, проходящую через начало координат ($z = 0$), будет $\cos tz \equiv 1$.

Кроме того мы используем при преобразовании формул некоторые

свойства функций $I_n(x)$ и $K_n(x)$, [5], если $n = 0, 1, 2, \dots$ и аргумент x является действительным числом.

В первую очередь мы имеем:

$$(15) \quad I_{-n}(x) = I_n(x); \quad K_{-n}(x) = K_n(x); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Учитывая формулу (15), мы можем в уравнении (14) заменить суммирование от $-\infty$ до $+\infty$ суммированием от 0 до $+\infty$ и умножить правую сторону двумя. Учитывая дальше единичные значения асимптотического угла и функции координаты z , мы получим:

$$(16) \quad \mathcal{Q}_1(r, \varphi, z) \frac{r^2}{J \varrho_0} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty K_n(at) \left(I_n(r) + \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0 \varrho_1} I'_n(r) I'_n(r_2) K_n(r) \times \right. \\ \times (I_n(r_2) K'_n(r_1) - I'_n(r_1) K_n(r_2)) + \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0 \varrho_1^2} I'_n(r_1) I'_n(r_2) K_n(r) \times \\ \times (I_n(r_1) K'_n(r_2) - I'_n(r_2) K_n(r_1)) + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 \varrho_2} I_n(r_2) I'_n(r_2) K_n(r) \times \\ \left. \times (I_n(r_1) K'_n(r_1) - I'_n(r_1) K_n(r_1)) \right) dt + \mathcal{Q}_1^0.$$

Формулы для $\mathcal{Q}_2$ и $\mathcal{Q}_3$ можно получить аналогичным путем.

В уравнении (16), где мы для простоты обозначили знаком $\mathcal{Q}_1^0$ нулевой член бесконечной суммы, дано решение для пространственного распределения аномального потенциала для коаксиальных круговых полупроводников при выполнении вышеупомянутых условий.

Поскольку с первого взгляда очевидно, что интегралы не удаётся вычислить используя известные формулы, надо применить некоторые из методов нумерического вычисления.

Сперва мы должны обратить внимание на то, что функции $I_n(x)$ и $K_n(x)$ в промежутке $0 \leq x \leq \infty$ всегда положительны и не имеют на координатной оси x сингулярных точек, кроме двух значений $x = 0$, $x = \infty$, для которых имеет место:

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow 0} K_n(x) \rightarrow \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} K_n(x) \rightarrow 0; \\ \lim_{x \rightarrow 0} I_n(x) \rightarrow 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} I_n(x) \rightarrow \infty.$$

Кроме того нам понадобятся асимптотические значения упомянутых функций, которые мы определим из выражений:

$$(18) \quad K_0(x) \approx \lg \frac{x}{2}; \quad K_n(x) \approx \frac{1}{2} (n-1)! \left(\frac{x}{2} \right)^{-n};$$

$$I_0(x) \approx 1; \quad I_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n;$$

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]; \quad K_n(x) \approx \frac{\sqrt{x}}{2\pi} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

В дальнейшем рассмотрении мы должны обратить внимание на то, что в формулах (14) и (16) фигурируют производные функций $I_n(x)$ и $K_n(x)$ по аргументу x . Производные этих функций мы можем преобразовать в функции высших или низших порядков согласно формулам:

$$(19) \quad \frac{1}{2} [I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)] = I'_n(x)$$

$$\frac{1}{2} [K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)] = -K'_n(x)$$

причем в частных случаях мы имеем: $I'_0(x) = I_1(x)$; $K'_0(x) = -K_1(x)$.

В математических таблицах [4] приведены значения функций $I_0(x)$; $I_1(x)$; $K_0(x)$; $K_1(x)$ для аргументов $0 \leq x \leq 16$, что вполне удовлетворяет наши потребности. Но мы должны с помощью рекуррентных формул

$$(20) \quad I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} I_n(x) = I_{n+1}(x),$$

$$K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} K_n(x) = K_{n+1}(x)$$

вычислить значения следующих функций, вплоть до $n = 7$.

Остается еще доказать, что существуют конечные пределы суммарных членов в полученных формулах (14) и (16) для $x \rightarrow 0$ и для $x \rightarrow \infty$. Доказательство можно провести, используя уравнения (18) и последовательно применяя правило Лопиталя для предела произведения или отношения двух функций, что в нашем случае представляет кропотливую, но в сущности элементарную работу; поэтому для краткости эти вычисления не приводятся.

В заключение нужно заметить, что из полученных формул (14) и (16) можно легко получить формулы для различных измерительных схем (расположение Веннера, Шлюмбербера итп.) и таким образом вычислить теоретические кривые зондирования для выбранных параметров, что будет сделано в следующей работе.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Заборовский А. И., *Электроразведка*, Москва 1963.
- [2] Huber A., *Randwertangabe der Geoelektrik für Kugel und Zylinder*, Zeitschr. für angew. Mathematik und Mechanik 33 (1953), 382—393.
- [3] Бухгольц Г., *Расчет электростатических и магнитных полей*, Москва 1961.
- [4] Батсон Н. Г., *Теория электрических функций*, Москва 1949.
- [5] Давренцев М. А., Шафар Б. В., *Методы теории функций комплексного переменного*, Москва 1958.

Получено 18. 6. 1964.

ČSAV, Geofyzikálne laboratórium
Slovenskej akadémie vied,
Bratislava

ON THE BOUNDARY PROBLEM OF GEOELECTRICITY FOR A SYSTEM OF CIRCULAR HALF-CYLINDER IN INFINITE HALF-SPACE FOR A POINT SOURCE

Silvester Krajčovič

Summary

In the paper expressions are deduced for the computation of geoelectrical resistivity anomalies for the special case, wherein there are — in a homogeneous and isotropic half-space with specific electrical resistance ρ_0 — infinite circular half-cylinders, whose specific electric resistivities are ρ_1 and ρ_2 , respectively. The expressions were found for electrodes are placed a) in the inside half-cylinder, b) in the outside half-space and potential outside half-space.

The deduced formulae were then arranged for the numerical computation of the sum of the integral expressions and the method for computing them was indicated. For the numerical computation we have formulae (14) and (16) and tables of the functions $I_n(x)$ and $K_n(x)$, respectively.

In the conclusion of this paper it is stated that a paper to follow will contain computations and constructions of theoretical curves for various of ρ_1 ; ρ_2 ; ρ_0 ; ρ_1 ; ρ_2 . These theoretical curves can be useful for the qualitative and quantitative interpretations in applied geophysics.

ADRESY AUTOROV — АДРЕСА АВТОРОВ — AUTHORS' ADDRESSES

- Lev Bukovský, Žitná 25, Praha 1 (Matematický ústav ČSAV).
Imrich Fabricek, Janská ul., Bratislava (Katedra matematiky Chemickej fakulty SVŠT).
Václav Havel, Barvířova 85, Brno (Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VUT).
Zdeněk Hedrlín, Sokolovská 83, Praha (Katedra základů matematiky matematicko-fyzikální fakulty KU).
Alena Jónová, Vazovova 1, Bratislava (Katedra elektrotechnologie Elektrotechnickej fakulty SVŠT).
Josef Kaucký, Obrancov mieru 41, Bratislava (Kabinet matematiky SAV).
Arnošt Kessler, Dúbravská cesta, Bratislava (Fyzikálny ústav SAV).
Anton Kotzig, Šmeralova 2b, Bratislava (Katedra numerickej matematiky a matematickej štatistiky Prírodovedeckej fakulty UK).
Silvester Krajčovič, Dúbravská cesta, Bratislava (Geofyzikálne laboratórium SAV).
Emil Mariani, Dúbravská cesta, Bratislava (Fyzikálny ústav SAV).
Alaš Pultr, Sokolovská 83, Praha (Katedra základů matematiky matematicko-fyzikální fakulty KU).
Beloslav Riečan, Gottwaldovo nám. 2, Bratislava (Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty SVŠT).
Zdena Riečanová, Gottwaldovo nám. 2, Bratislava (Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Elektrotechnickej fakulty SVŠT).
Štefan Schwarz, Obrancov mieru 41, Bratislava (Kabinet matematiky SAV).