MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 3, 1965

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ О ВОЗВРАЩЕНИИ НА БУЛЕВСКИХ КОЛЬЦАХ

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН (BELOSLAV RIEČAN), Братислава

В настоящей статье справедливость теоремы Пуанкаре о возвращении распространяется с колец множеств на булевские кольца.

1. Введение. Сформулируем сначала теорему Пуанкаре о возвращении. Пусть $(X, \mathbf{S}, m)$ — пространство с вполне конечной мерой, т. е. $\mathbf{S}$ является σ-алгеброй подмножеств X, а m — конечная мера на $\mathbf{S}$.(1) Пусть T — взаимно-однозначное сохраняющее меру преобразование X в X, т. е. для $E \in \mathbf{S}$ имеем $T^{-1}(E) \in \mathbf{S}$ и выполняется $m(E) = m(T^{-1}(E))$. Тогда для произвольного множества $F \in \mathbf{S}$ справедливо

$$m\Big(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(F)\Big) = 0 .\text{(2)} \tag{1}$$

Если через $\mathbf{N}$ обозначить систему всех множеств нулевой меры, то мы можем заменить (1) эквивалентным утверждением

$$F - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(F) \in \mathbf{N} . \tag{2}$$

При указанных условиях имеет место также усиленная теорема о возвращении:

$$m(F - \limsup T^{-n}(F)) = 0\,, \text{ т. е.} \tag{3}$$

$$F - \limsup T^{-n}(F) \in \mathbf{N} . \tag{4}$$

П. Р. Халмош обратил внимание на то, что для доказательства теоремы Пуанкаре о возвращении достаточно о T предполагать следующее: Если

(1) См. [1].
(2) См. [2], стр. 21.

$E \in \mathbf{S}$ и $E \cap T^{-n}(E) = \emptyset$ для всех n, то $m(E) = 0$, т. е. $E \in \mathbf{N}$. Преобразование T с указанным свойством назовем консервативным. Очевидно, произвольное взаимно-однозначное сохраняющее меру преобразование на пространстве с вполне конечной мерой консервативно. Значит, мы можем теорему Пуанкаре о возвращении сформулировать следующим образом: Для всякого измеримого консервативного преобразования справедливо (2).

Аналогично для доказательства усиленной теоремы Пуанкаре достаточно воспользоваться лишь некоторыми свойствами T и $\mathbf{N}$: Если для T выполняется (2), то и для T^n выполняется (2); $\mathbf{N}$ замкнута относительно образования счетных сумм.

Тамм доказал, что если T консервативно, то и T^n консервативно (П. Р. Халмош доказал это свойство для взаимно-однозначного консервативного преобразования с обратным измеримым).(3) Следовательно, усиленная теорема Пуанкаре может быть сформулирована в таком виде: Для всякого консервативного измеримого преобразования T справедливо (4).

Именно в этой формулировке мы докажем теорему Пуанкаре на булевских кольцах. Заметим, что консервативность преобразования T определяется только с помощью множеств $T^{-n}(E)$, $E \in \mathbf{S}$. Аналогично может быть высказано и утверждение теоремы Пуанкаре. Значит, мы можем сформулировать теорему Пуанкаре для некоторого булевского кольца $\mathbf{S}$ и преобразования T^{-1} кольца $\mathbf{S}$ в себя. Доказательство теоремы Пуанкаре будет аналогично доказательству Сачестона из работы [4].

Нам не известно, могут ли кольцо и преобразование с требуемыми свойствами быть представлены кольцом множеств и точечным преобразованием.

2. Определения и обозначения. Через $\mathbf{B}$ мы будем обозначать произвольную, но фиксированную булевскую σ-алгебру, т. е. булевскую алгебру, замкнутую относительно образования счетных объединений. Хорошо известно, что всякая булевская алгебра, замкнутая относительно образования счетных объединений, замкнута также относительно образования счетных пересечений. Объединение элементов $E_i \in \mathbf{B}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ мы будем обозначать через $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, пересечение их — через $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, дополнение элемента $E \in \mathbf{B}$ — через E'. Для конечного числа слагаемых мы будем писать также $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, $\bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 \cap$

(3) См. [3, 5]. Правда, в обеих работах понятие консервативности заменено эквивалентным понятием несжимаемости.

$\cap \ldots \cap E_n$. Наконец, мы будем писать $E - F = E \cap F'$. Для $E_i \in \mathbf{B}$ определяем $\limsup E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$.

Через $\mathbf{S}$ мы будем обозначать произвольное σ-кольцо, т. е. непустое подмножество $\mathbf{B}$ с такими свойствами: Если E, F, $E_i \in \mathbf{S}$ $(i = 1,2, \ldots)$, то и $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$ и $E - F \in \mathbf{S}$.

Пусть T^{-1} — преобразование кольца $\mathbf{S}$ в $\mathbf{S}$, которое всякому $E \in \mathbf{S}$ ставит в соответствие элемент $T^{-1}(E) \in \mathbf{S}$. Будем рассматривать только такие преобразования, для которых выполняется

(5) $$T^{-1}(O) = O,$$

(6) $$T^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(E_n),$$

где $E_n \in \mathbf{S}$ $(n = 1,2, \ldots)$ — произвольные элементы, O — нулевой элемент алгебры $\mathbf{B}$. Легко видеть, что такое преобразование изотонно, т. е. что имеет место

$$E \leqq F \;\Rightarrow\; T^{-1}(E) \leqq T^{-1}(F).$$

Для произвольного натурального числа $n \geqq 2$ положим $T^{-n}(E) = T^{-1}(T^{-(n-1)}(E))$; положим, кроме того, $T^0(E) = E$.

Пусть $\mathbf{N}$ — непустое подмножество $\mathbf{S}$. Преобразование T^{-1} назовем консервативным, если имеет место следование

(7) $$E \in \mathbf{S},\quad E \cap T^{-n}(E) = O \;(n = 1,2, \ldots) \;\Rightarrow\; E \in \mathbf{N}.$$

Главным результатом нашей статьи является следующая теорема.

3. Теорема. *Пусть* $\mathbf{S} \subset \mathbf{B}$ — *σ-кольцо,* $\mathbf{N} \subset \mathbf{S}$ — *произвольное подмножество, замкнутое относительно образования счетных сумм и притом такое, что* $O \in \mathbf{N}$. *Пусть* T^{-1} — *консервативное преобразование кольца* $\mathbf{S}$ *в* $\mathbf{S}$ *(т. е. преобразование* $\mathbf{S}$ *в себя, удовлетворяющее* (5)—(7)*).*

Тогда для произвольного элемента $E \in \mathbf{S}$ *справедливо*

$$E - \limsup T^{-n}(E) \in \mathbf{N}.$$

Доказательство вытекает из следующих вспомогательных теорем.

4. Пусть $B_0, B_1, \ldots, B_n$ — произвольные элементы алгебры $\mathbf{B}$. Положим $B_\nu^n = \bigcap_{i \in \nu} B_i \cap \big(\bigcup_{i \notin \nu} B_i\big)'$ где $\emptyset \neq \nu \subset \{0,1, \ldots, n\}$.(⁴)

(⁴) Для $\nu = \{0,1, \ldots, n\}$ полагаем $\bigcup_{i \notin \nu} B_i = O$.

Тогда

(8) $$\cup \{B_\nu^n : \emptyset \neq \nu \subset \{0,1, \ldots, n\}\} = \bigcup_{i=0}^{n} B_i.$$

Доказательство проведем по индукции. Первый индукционный шаг очевиден. Предположим, что равенство (8) справедливо для некоторого n, докажем его справедливость для $n+1$. Очевидно, левая сторона (8) меньше или равна правой стороне (8). Достаточно доказать справедливость обратного неравенства.

Очевидно, выполняется

(9) $$\bigcup_{i=0}^{n+1} B_i = \Big[B_{n+1} \cap \Big(\bigcup_{i=0}^{n} B_i\Big)'\Big] \cup \Big[B_{n+1} \cap \Big(\bigcup_{i=0}^{n} B_i\Big)\Big] \cup \Big[\Big(\bigcup_{i=0}^{n} B_i\Big) \cap B_{n+1}'\Big].$$

Первое слагаемое в соотношении (9) можно записать в виде

(10) $$B_\mu^{n+1} = \bigcap_{i \in \mu} B_i \cap \Big(\bigcup_{i \notin \mu} B_i\Big)',$$

если положить $\mu = \{n+1\}$. Второе и третье слагаемое в (9) можно по индукционному предположению записать соответственно в виде

(11) $$\cup \Big\{B_{n+1} \cap \bigcap_{i \in \nu} B_i \cap \Big(\bigcup_{i \notin \nu} B_i\Big)' : \emptyset \neq \nu \subset \{0,1, \ldots, n\}\Big\}$$

и

(12) $$\cup \Big\{\bigcap_{i \in \nu} B_i \cap \Big(B_{n+1} \cup \bigcup_{i \notin \nu} B_i\Big)' : \emptyset \neq \nu \subset \{0,1, \ldots, n\}\Big\}.$$

Значит, каждое слагаемое в (11) имеет вид (10), где $\mu = \nu \cup \{n+1\}$. Аналогично каждое слагаемое в (12) имеет вид (10), где $\mu = \nu$, $\mu \subset \{0,1, \ldots, n, n+1\}$. Значит, $\bigcup_{i=0}^{n+1} B_i$ может быть представлено в виде суммы элементов вида B_μ^{n+1}, где $\emptyset \neq \mu \subset \{0,1, \ldots, n+1\}$. Тем самым лемма доказана.

5. Пусть $E, B_0, B_1, \ldots, B_n$ — произвольные элементы алгебры $\mathbf{B}$, $E \leqq \bigcup_{i=0}^{n} B_i$. Положим $B_\mu = (B_\mu^n) = \bigcap_{i \in \mu} B_i \cap \big(\bigcup_{i \notin \mu} B_i\big)'$. Тогда

$$E = \cup \{E \cap B_\mu : \emptyset \neq \mu \subset \{0,1, \ldots, n\}\}.$$

Доказательство этого утверждения очевидно.

6. Пусть $\mathbf{S}$ — σ-кольцо, $\mathbf{N} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{N}$ замкнута относительно образования суммы. Пусть T^{-1} — консервативное преобразование кольца $\mathbf{S}$ в $\mathbf{S}$. Пусть n — произвольное натуральное число. Пусть $E \in \mathbf{S}$ и для каждого натурального k выполняется $T^{-nk}(E) \cap E = O$. Тогда $E \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Положим

$$(13)\quad B_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-kn-i}(E), \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Пусть m — произвольное натуральное число. Из равенств (6) и (13) вытекает, что для произвольного индекса i существует j такое, что $T^{-m}(B_i) \leqq B_j$.

Пусть $\emptyset \neq \mu \subset \{0,1,\ldots,n-1\}$. Образуем елементы

$$D_\mu = E \cap \bigcap_{i\in\mu} B_i \cap (\bigcup_{i\notin\mu} B_i)'.$$

Согласно лемме 5

$$(14)\qquad E = \bigcup \{D_\mu : \emptyset \neq \mu \subset \{0,1,\ldots,n-1\}\}.$$

Очевидно, $D_\mu \in \mathbf{S}$. Достаточно показать, что $D_\mu \in \mathbf{N}$ для всех $\mu \subset \{0,1,\ldots,n-1\}$. Так как T^{-1} консервативно, то достаточно доказать, что для произвольного натурального числа m выполняется

$$(15)\qquad D_\mu \cap T^{-m}(D_\mu) = O.$$

Если $D_\mu = O$, то (15) очевидно. Если $D_\mu \neq O$, то в силу $E \leqq B_0$ имеем $0 \in \mu$. Могут произойти два случая: 1. Для произвольного $i \in \mu$ существует $j \in \mu$ такое, что $T^{-m}(B_i) \leqq B_j$. 2. Существуют i, j такие, что $i \in \mu$, $j \notin \mu$ и $T^{-m}(B_i) \leqq B_j$.

В первом случае существует $j \in \mu$ такое, что $T^{-m}(B_j) \leqq B_0$. Но, очевидно, $T^{-m}(B_j) \leqq \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-nk}(E) \leqq E'$. Значит, $D_\mu \cap T^{-m}(D_\mu) \leqq E \cap T^{-m}(B_j) \leqq E \cap E' = O$.

Во втором случае $D_\mu \cap T^{-m}(D_\mu) \leqq (\bigcup_{s\notin\mu} B_s)' \cap B_j \leqq B_j' \cap B_j = O$.

7. Доказательство теоремы 3. Из определения, правил де Моргана и бесконечной дистрибутивности **B** вытекает

$$(16)\qquad E - \limsup T^{-n}(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [E \cap (\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(E))'].$$

Обозначим $E_n = E \cap (\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(E))'$. Очевидно, для $k = 1,2,\ldots$ имеет место $E_n \cap T^{-nk}(E_n) \leqq (\bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-k}(E))' \cap T^{-nk}(E) = O$. Согласно утверждению леммы 6 $E_n \in \mathbf{N}$. Так как $\mathbf{N}$ замкнута относительно образования счетных сумм, то в силу (16) имеем также $E - \limsup T^{-n}(E) \in \mathbf{N}$.

8. Из доказанной теоремы 3 вытекают некоторые известные утверждения.

8.1. В работе [4] рассматривается множество X, σ-кольцо $\mathbf{S}$ подмножеств X и отношение T, определенное на X, т. е. отображение X в систему всех подмножеств X. Для $E \subset X$ определяется $T^{-1}(E) = \{x \in X : Tx \cap E \neq \emptyset\}$. Далее предполагается, что для $E \in \mathbf{S}$ имеем $T^{-1}(E) \in \mathbf{S}$. Нетрудно доказать, что так определенное отображение T^{-1} кольца $\mathbf{S}$ в $\mathbf{S}$ удовлетворяет условиям (5), (6). Из леммы 6 вытекает теорема 1 работы [4], из теоремы 3 — теорема 2 работы [4].

8.2. Пусть T — измеримое отображение пространства X в X. Опять очевидно, что отображение T^{-1}, ставящее множеству $E \in \mathbf{S}$ в соответствие множество $T^{-1}(E) \in \mathbf{S}$, удовлетворяет условиям (5), (6).

9. Кроме консервативности можно для формулировки теоремы Пуанкаре о возвращении использовать также другие свойства преобразований (см. [3,5,6]). В дальнейшем мы будем рассматривать такие свойства:

(i) Если $E \in \mathbf{S}$, $E \leqq T^{-1}(E)$, то $T^{-1}(E) - E \in \mathbf{N}$.

(ii) Если $E \in \mathbf{S}$, $E \cap T^{-n}(E) = 0$ для $n = 1,2,\ldots$, то $E \in \mathbf{N}$.

(iii) Если $E \in \mathbf{S}$ и $\{T^{-n}(E)\}_{n=0}^{\infty}$ — система непересекающихся множеств, то $E \in \mathbf{N}$.

(iv) Если $E \in \mathbf{S}$, то $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E) \in \mathbf{N}$.

(v) Если $E \in \mathbf{S}$, то $E - \limsup T^{-n}(E) \in \mathbf{N}$.

Если преобразование T^{-1} обладает свойством (i), то мы говорим, что оно несжимаемо, свойством (ii) — консервативно (по Сачестону), свойством (iii) — слабо консервативно (консервативно по Халмошу), свойством (iv) — возвращаемо, свойством (v) — сильно возвращаемо.

10. Теорема. *Из свойства* (v) *вытекает свойство* (iv), *из свойства* (ii) *вытекает свойство* (iii). *Свойства* (ii) *и* (iv) *эквивалентны. Если* $\mathbf{N}$ *замкнута относительно образования счетных сумм, то из* (iv) *вытекает* (v).

Доказательство. Следование (ii) → (iii) очевидно. Пусть выполнено (v), $E \in \mathbf{S}$. Докажем, что имеет место

$$(17)\quad E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E) = (E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)) - \limsup T^{-k}(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)).$$

Обозначим через F элемент, находящийся на правой стороне (17). Очевидно, $F \leqq E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)$. С другой стороны,

$$\limsup T^{-k}(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)) \leqq \limsup T^{-k}(E) \leqq \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(E).$$

Значит,

$$F \geqq (E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)) - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E) = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E).$$

Тем самым (17) доказано. Согласно (v) и (17) имеем $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E) \in \mathbf{N}$, значит, свойство (iv) выполнено.

Пусть выполнено (ii), $E \in \mathbf{S}$. Положим $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E) = F$. Очевидно, $F \cap T^{-m}(F) \leqq (E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)) \cap T^{-m}(E) = O$ для всякого натурального числа m. Отсюда вытекает, что $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E) = F \in \mathbf{N}$. Наоборот, пусть выполняется (iv) и пусть $E \in \mathbf{S}$, $E \cap T^{-n}(E) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E) = E \in \mathbf{N}$.

Если $\mathbf{N}$ замкнута относительно образования счетных сумм, то из (ii) в силу теоремы 3 вытекает свойство (v). Но согласно сказанному (ii) эквивалентно (iv).

11. Несколько больше мы сможем сказать о соотношениях (i)—(iv) при условии, что для всех $E \in \mathbf{B}$ имеет место

$$T^{-1}(E') \geqq (T^{-1}(E))'. \tag{18}$$

При этом T^{-1} — преобразование алгебры $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$, удовлетворяющее свой-
ствам (5) и (6). Не всякое преобразование со свойствами (5), (6) обладает
также свойством (18). Например, пусть $\mathbf{B}$ — булевская σ-алгебра всех
подмножеств множества натуральных чисел. Для $E \in \mathbf{B}$ положим $T^{-1}(E) =$
$= E \cap \{1\}$. Отображение T^{-1} удовлетворяет, очевидно, (5), (6), но не
удовлетворяет (18). С другой стороны, всякое отношение (см. 8,1) удовле-
творяет (18). В самом деле, пусть $x \notin T^{-1}(E)$. Тогда $Tx \cap E = \emptyset$, т. е.
$Tx \cap E' \neq \emptyset$. Значит, $x \in T^{-1}(E')$.

12. Теорема. *Пусть* $\mathbf{S}$ — *булевская* σ-*алгебра*, T^{-1} — *отображение* $\mathbf{S}$ *в* $\mathbf{S}$, *удовлетворяющее помимо условий* (5), (6) *также условию* (18). *Пусть* $\mathbf{N}$ *наследственна, т. е. если* $x \leqq y \in \mathbf{N}$, *то и* $x \in \mathbf{N}$. *Тогда из* (i) *вытекает* (ii).

Доказательство. Пусть $E \in \mathbf{S}$, $E \cap T^{-n}(E) = O$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим $F = (\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(E))'$. Из (18) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} T^{-1}[(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(E))'] &\geqq [T^{-1}(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(E))]' = \\ &= [\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)]' \geqq [\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(E)]', \end{aligned} \tag{19}$$

значит, $T^{-1}(F) \geqq F$. Далее, согласно (19) имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}(F) - F &\geqq (\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E))' \cap (\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(E)) = \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T^{-n}(E) \cap [\bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(E)]'\} = E \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(E))' = E. \end{aligned} \tag{20}$$

Из свойства (i) вытекает, что $T^{-1}(F) - F \in \mathbf{N}$. Так как $\mathbf{N}$ — наследственное множество, то и $E \in \mathbf{N}$.

13. Предположим, что T^{-1} удовлетворяет кроме свойств (5), (6) еще следующим свойствам:

$$T^{-1}(E \cap F) = T^{-1}(E) \cap T^{-1}(F), \tag{21}$$

$$T^{-1}(I) = I, \tag{22}$$

где I — наибольший элемент алгебры $\mathbf{B}$. Легко докажется, что преобра-
зование T^{-1} σ-алгебры $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$, удовлетворяющее свойствам (5), (6), (21),
(22), удовлетворяет также свойству

$$T^{-1}(E') = (T^{-1}(E))', \tag{23}$$

а значит, и свойству (18). Пусть $\mathbf{B}$ — σ-алгебра подмножеств множества I.
Пусть T — точечное преобразование пространства I в I. Очевидно, пре-
образование T^{-1} σ-алгебры $\mathbf{B}$ в себя, индуцированное этим точечным
преобразованием, удовлетворяет всем условиям (5), (6), (21) и (22).

14. Теорема. *Пусть* $\mathbf{S}$ — σ-*алгебра*, T^{-1} — *преобразование* $\mathbf{S}$ *в* $\mathbf{S}$, *удовле-*
творяющее условиям (5), (6), (21) *и* (22). *Тогда свойства* (i)—(iv) *эквива-*
лентны. Если $\mathbf{N}$ *замкнута относительно образования счетных сумм, то*
тогда эквивалентны все свойства (i)—(v).

Доказательство. Очевидно, (ii) и (iii) при данных условиях экви-
валентны. Докажем еще эквивалентность (i) и (ii).

Пусть выполнено (ii), $E \leqq T^{-1}(E)$, $E \in \mathbf{S}$. Положим $F = T^{-1}(E) - E$.
Тогда $F \cap T^{-n}(F) \leqq T^{-1}(E) \cap (T^{-n}(E))' \leqq T^{-n}(E) \cap (T^{-n}(E))' = O$. Зна-
чит, согласно (ii) $T^{-1}(E) - E = F \in \mathbf{N}$.

Для доказательства следования (i) $\to$ (ii) можно использовать доказа-
тельство теоремы 12. Достаточно для этого вспомнить, что в (18) вместо
неравенства имеет место равенство вследствие (21) и (22).

15. Примечание. Из теоремы 14 непосредственно вытекает утвержде-
ние работы [6]: свойства (i)—(v) эквивалентны. Приведенное в [6] дока-
зательство проще нашего. Однако там вдобавок предполагается, что $\mathbf{N}$
является σ-идеалом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950.

[2] Halmos P. R., *Lectures on Ergodic Theory*, Tokyo 1956.

[3] Halmos P. R., *Invariant measures*, Ann. of Math. *48* (1947), 735—754.

[4] Sucheston L., *A note on conservative transformations and the recurrence theorem*, Amer. J. Math. *79* (1957), 444—447.

[5] Tamm C. T., *Recurrent properties of conservative measurable transformations*, Duke Math. J. *28* (1961), 277—279.

[6] Wright F. B., *The recurrence theorem*, Amer. Math. Monthly *68* (1961), 247—248.

Поступило 21. 7. 1964.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

NOTE ON THE POINCARÉ RECURRENCE THEOREM ON BOOLEAN RINGS

Beloslav Riečan

Summary

Let $\mathbf{B}$ be a Boolean σ-algebra, $\mathbf{S}$ be a σ-ring, $\mathbf{S} \subset \mathbf{B}$ and $\mathbf{N}$ a subset of $\mathbf{S}$. Let T^{-1} be a transformation of $\mathbf{S}$ into $\mathbf{S}$ such that $T^{-1}(O) = O$ and $T^{-1}(\cup E_n) = \cup T^{-1}(E_n)$. Transformation T^{-1} is called conservative if the following implication holds: $E \in \mathbf{S}$, $E \cap T^{-n}(E) = O$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow E \in \mathbf{N}$.

In this article the following theorem is proved (theorem 3):

If $O \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ is closed under countable unions and T^{-1} is a conservative transformation, then $E - \limsup T^{-n}(E) \in \mathbf{N}$ for all $E \in \mathbf{S}$.

From the theorem 3 there immediately follow recurrence theorems obtained in the articles [2], [3], [4] and [5]. The equivalence of various conditions with conservativity is proved (theorems 10, 12, 14). The result of the paper [6] is a corollary of the theorem 14.