MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 3, 1965

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПОЛНОГО ГРАФА НА $4k$-УГОЛЬНИКИ

АНТОН КОЦИГ (ANTON KOTZIG), Братислава

Пусть n — произвольное натуральное число. Через K_n мы будем обозначать полный граф с n вершинами. Под разложением некоторого графа G на r-угольники мы будем понимать такое множество r-угольников $\bar{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, что каждый r-угольник из $\bar{Q}$ содержит только ребра из G и каждое ребро из G принадлежит одному и только одному r-угольнику из $\bar{Q}$. Мы ответим на вопрос о том, для каких n существует разложение графа K_n на $4k$-угольники в случае, когда числа n, $4k$ — взаимно простые. Но раньше мы опишем способ построения разложения графа K_n на $4k$-угольники для более общего случая, когда $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$. Мы докажем справедливость следующей теоремы:

Теорема 1. *Если для натуральных чисел n, k имеет место $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$, то существует хотя бы одно разложение графа K_n на $4k$-угольники.*

Доказательство. Пусть $n = 8\,kp + 1$, где p — произвольное натуральное число. Отдельные вершины графа K_n обозначим через $1, 2, \ldots, n$ и условимся, что символы x, y (где x, y — два произвольных целых числа) будут обозначать одну и ту же вершину графа K_n, если имеет место $x \equiv y \pmod{n}$. Пусть $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Будем говорить, что ребро $h_{i,j}$, соединяющее вершины i, j, имеет длину δ, если кратчайший из путей, соединяющих вершины i, j в гамильтоновой окружности $H = (1, h_{12}, 2, h_{23}, \ldots, n, h_{n,1}, 1)$, содержит δ ребер. Очевидно, для произвольного $\delta = 1, 2, \ldots, 4kp$ справедливо: граф K_n содержит ровно n ребер длины δ. Очевидно также, что K_n не содержит никакого ребра с длиной большей чем $4\,kp$.

Пусть i — произвольное число из $\{1, 2, \ldots, p\}$ и пусть последовательность $Y_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,4k})$ определена следующим образом (см. рис. 1 и 2):

(1) если $j = 2q - 1$, где $q = 1, 2, \ldots, 2k$, то $y_{i,j} = q - 1$;
(2) если $j = 2r$, где $r = 1, 2, \ldots, k$, то $y_{i,j} = 4ik - r + 1$;
(3) если $j = 2s$, где $s = k + 1, k + 2, \ldots, 2k$, то $y_{i,j} = 4ik - s$.

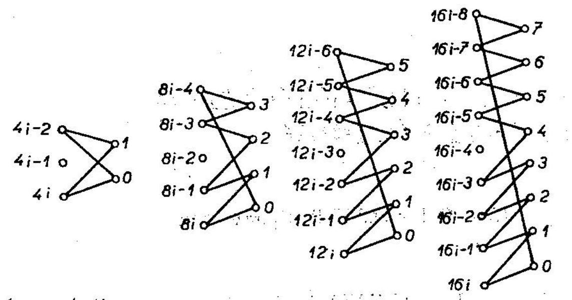

Рис. 1.

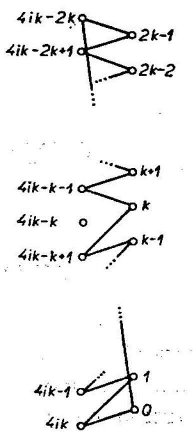

Рис. 2.

Пусть x — произвольное число из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Через $Q_{i,x}$ обозначим тот $4k$-угольник графа K_n, через вершины которого мы проходим в том порядке, в каком они находятся в последовательности $V = (x + y_{i,1}, x + y_{i,2}, \ldots, x + y_{i,4k})$. При указанном прохождении после прохождения вершины $x + y_{i,4k}$ мы, очевидно, вернемся в вершину $x + y_{i,1}$. Заметим, что при указанном построении последовательности Y_i произвольная вершина из K_n в последовательности V фигурирует не более одного раза. Из построения последовательности Y_i следует также, что длины ребер из K_n, соединяющих соседние члены (= вершины) последовательности V, образуют последовательность:

$$4ik, 4ik - 1, \ldots, 4ik - 2k + 1, 4ik - 2k - 1, 4ik - 2k - 2, \ldots, 4ik - 4k - 1$$

и ребро длиной $4ik - 2k$ соединяет последнюю вершину последовательности V с ее первой вершиной. Но это означает, что всякие два отличные друг от друга ребра из $Q_{i,x}$ имеют неравную длину и что длины ребер из $Q_{i,x}$ образуют множество $\{4(i-1)k + 1, 4(i-1)k + 2, \ldots, 4(i-1) + 4k\}$. Поэтому справедливо: окружность $Q_{1,x}$ содержит ребра длины $1, 2, \ldots, 4k$, окружность $Q_{2,x}$ — ребра длины $4k + 1, 4k + 2, \ldots, 8k$, и т. д., наконец, окружность $Q_{p,x}$ содержит ребра длины $4k(p-1) + 1, 4k(p-1) + 2, \ldots, 4kp$. Но из построения окружностей $Q_{i,x}$ очевидно также следующее: если x, y — две разные числа из $\{1, 2, \ldots, n\}$, то окружности $Q_{i,x}$, $Q_{i,y}$ не имеют общего ребра. Так как при $i \neq j$ окружности $Q_{i,x}$, $Q_{j,y}$, очевидно, также не могут иметь никакого общего ребра, то справедливо: множество $Q = \{Q_{1,1}, \ldots, Q_{1,n}, Q_{2,1}, \ldots, Q_{2,n}, \ldots, Q_{p,1}, \ldots, Q_{p,n}\}$ является разложением графа K_n на $4k$-угольники. Это доказывает теорему 1.

Теорема 2. *Пусть числа n, $4k$ — взаимно простые, тогда граф K_n можно разложить на $4k$-угольники тогда и только тогда, когда выполняется:* $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что если выполнены условия $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$, то граф K_n можно разложить на $4k$-угольники. Значит, остается доказать, что разложение графа K_n на $4k$-угольники при взаимно простых n, $4k$ существует только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod{8k}$. Известно (см., например, Кениг [1], стр. 23, теорема 6), что граф можно разложить на окружности тогда и только тогда, когда всякая его вершина имеет четную степень. Но это означает, что граф K_n можно разложить на окружности тогда и только тогда, когда n — нечетное число. По, кроме того, справедливо еще и следующее: граф K_n можно разложить на $4k$-угольники только тогда, когда число его ребер делится на число $4k$. Значит, для того, чтобы граф K_n разлагался указанным образом, должно выполняться:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) \equiv 0 \pmod{4k} \Rightarrow n(n-1) \equiv 0 \pmod{8k}$$

и так как, согласно условию, числа n, $4k$ — взаимно простые, то должно быть $n \equiv 1 \pmod{8k}$. Это доказывает теорему 2.

Следствием теоремы 2 является следующая теорема:

Теорема 3. Пусть p — произвольное натуральное число > 1. Граф K_n можно разложить на $2p$-угольники тогда и только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod{2^{p+1}}$, $n > 1$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 ясно, что n должно быть нечетным числом. Но тогда числа n, 2^p (где p — натуральное число) взаимно просты, и согласно теореме 2 граф K_n можно разложить на $4k = 2^p$-угольники тогда и только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$. Это доказывает теорему 3.

Примечание 1. Значительно сложнее те случаи, когда числа $4k$, n из теоремы 2 — не взаимно простые. Дело в том, что тогда условие $n \equiv 1 \pmod{8k}$, хотя и является достаточным (см. теорему 1), но не является необходимым условием. Так, например, граф K_{33} можно разложить на 44 двенадцатиугольников, хотя $33 \equiv 9 \pmod{24}$. Опишем одно из таких разложений. Обозначим через $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{44}$ отдельные двенадцатиугольники этого разложения. Пусть последовательность $q_1(x), q_2(x), \ldots,$

$q_{12}(x)$ описывает порядок, в каком мы пробегаем через отдельные вершины двенадцатиугольника Q_x при прохождении через него. Описание этих последовательностей для $x = 1, 2, \ldots, 44$ содержит таблица 1.

Таблица 1

$x = 1, 2, \ldots, 11.$	$x = 12, 13, \ldots, 44.$
$q_1(x) = x$	$q_1(x) = x$
$q_2(x) = x + 16$	$q_2(x) = x + 2$
$q_3(x) = x + 3$	$q_3(x) = x + 5$
$q_4(x) = x + 10$	$q_4(x) = x + 9$
$q_5(x) = x + 11$	$q_5(x) = x + 14$
$q_6(x) = x + 27$	$q_6(x) = x + 20$
$q_7(x) = x + 14$	$q_7(x) = x + 28$
$q_8(x) = x + 21$	$q_8(x) = x + 4$
$q_9(x) = x + 22$	$q_9(x) = x + 15$
$q_{10}(x) = x + 5$	$q_{10}(x) = x + 25$
$q_{11}(x) = x + 25$	$q_{11}(x) = x + 6$
$q_{12}(x) = x + 32$	$q_{12}(x) = x + 21$

Примечание 2. Автору не известно, существует ли разложение графа K_{25} на пятнадцать 20-угольников.

ЛИТЕРАТУРА

[1] König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

Поступило 10. 7. 1964.

Katedra numerickej matematiky
a matematickej štatistiky
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava

ON THE DECOMPOSITION OF A COMPLETE GRAPH INTO 4k-GONS

Anton Kotzig

Summary

Let r be a natural number > 2. By the decomposition of the given graph G into r-gons we mean such a set D of r-gons, where each r-gon from D contains only edges from G and each edge from G belongs to exactly one r-gon from D. The paper proves the following theorems about the decomposition of a complete graph K_n with n vertices into $4k$-gons:

Theorem 1. If for the natural numbers n, k we have $n \equiv 1 \pmod{8k}$ and $n > 1$, then there exists at least one decomposition of the graph K_n into $4k$-gons.

Theorem 2. Let the numbers n, $4k$ be relatively prime, then the graph K_n can be decomposed into $4k$-gons if and only if $n \equiv 1 \pmod{8k}$.

Theorem 3. Let p be any natural number > 1. The graph K_n can be decomposed into 2^p-gons if and only if $n \equiv 1 \pmod{2^{p+1}}$, $n > 1$.

The author demonstrates on concrete example (the decomposition of the graph K_{33} into 12-gons) that the condition $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$, is not a necessary condition when n, $4k$ are not coprime numbers.