MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 3, 1965

ЗАМЕТКА О ЦИКЛОВОМ ИНДИКАТОРЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

ЙОСЕФ КАУЦКИ (JOSEF KAUCKÝ), Братислава

В настоящей статье рассматриваются две проблемы из теории перестановок. Одна из них относится к построению перестановок из n разных элементов, которые имеют циклы с предписанным количеством элементов. Решение этой по существу комбинаторной задачи ведет к простому выводу формулы для числа таких перестановок.

Во второй проблеме речь идет о нахождении метода, с помощью которого из циклового индикатора $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ легко получается цикловой индикатор $C_{n+1}(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1})$. Метод основан на том свойстве циклового индикатора $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, что он является изобарической функцией переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ веса n.

1.

ν-цикл — это обозначение для цикла порядка ν; он содержит ν элементов. В каждом цикле на первое место поставим наименьший элемент. Перестановка из n разных элементов с k_1 1-циклами, k_2 2-циклами, и т. д., с k_n n-циклами является перестановкой циклового класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, или, коротко, класса (k). Для неотрицательных целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ имеет место соотношение

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n. \tag{1}$$

Если $C(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — число перестановок класса (k), то

$$C(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1}k_1!\, 2^{k_2}k_2! \ldots n^{k_n}k_n!} \tag{2}$$

Это есть число разных подобных перестановок класса (k) (см., например, [1] или [2]).

Цикловой индикатор симметрической группы является обычной производящей функцией для чисел (2). Если его обозначить через $C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, или коротко через C_n, то

$$C_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = C_n = \sum \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \left(\frac{t_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{t_2}{2}\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{t_n}{n}\right)^{k_n}, \tag{3}$$

где сумма берется для всех групп чисел $k_1, \ldots, k_n$, для которых выполнено соотношение (1).

Если

$$A(t) = f[g(t)]$$

— сложная функция, и если обозначить

$$A_n = D_t^n A(t),\ f_n = [D_u^n f(u)]_{u=g(t)},\ g_n = D_t^n g(t),$$

то

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\, A_{n,k}, \tag{4}$$

где

$$A_{n,k} = \sum \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g_2}{2!}\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}. \tag{5}$$

В этой сумме

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k \tag{6}$$

и для чисел $k_1, \ldots, k_n$ имеет место соотношение (1).

Уравнение (4) есть формула Фаа ди Бруно для n-ной производной сложной функции. Мы видим, что сумма (3) получается формально из выражения на ее правой стороне, если положить

$$f_k = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

и

$$g_\nu = t_\nu(\nu - 1)!, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Такова связь циклового индикатора с формулой Фаа ди Бруно.

Фаа ди Бруно доказал свою формулу в 1855 году (Ann. di Tortolini); доказательство опубликовано в его книге [3].

Если мы хотим для данного n выписать индикатор C_n, то мы должны прежде всего найти все разбиения вида (1) числа n, после этого для отдельных этих разбиений найти числа (2) и составить по ним индикатор. Значит, возникает вопрос, нельзя ли найти способ, позволяющий по индикатору C_n легко определить индикатор C_{n+1}.

Этот способ изложен во второй части настоящей статьи. Мы придем к нему следующим образом. Из условия (1) для чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ мы, конечно, знаем, что индикатор (3) является изобарической функцией веса n. Но эту изобаричность можно доказать также методом, аналогичным методу, с помощью которого Фаа ди Бруно доказал изобаричность функции (4). А это доказательство и приводит нас к искомому способу последовательного определения индикаторов C_n.

Наконец, последняя часть статьи посвящена построению перестановок из n разных элементов класса (k). При этом построении мы придем к другому выводу формулы (2).

2.

Из одного элемента 1 существует только одна перестановка, и она образует 1-цикл

$$(1), \tag{7}$$

так что

$$C_1(t_1) = t_1. \tag{8}$$

Пусть $n = 2$; элементы обозначим через 1,2. Перестановки из этих элементов получим из перестановки (7) так, что новый элемент 2 присоединим к ней в качестве нового 1-цикла; так получится тождественная перестановка (1)(2). Или же элемент 2 вложим в 1-цикл (7) на второе место, чтобы на первом месте находился меньший элемент. Так получится 2-цикл (12).

Значит, из элементов 1,2 имеем две перестановки

$$(1)\,(2),\ (12) \tag{9}$$

и

$$C_2(t_1, t_2) = t_1^2 + t_2. \tag{10}$$

Если $n = 3$ и если элементы обозначить через 1,2,3, то перестановки из этих элементов получатся из перестановок (9) следующим образом:

1° Новый элемент 3 присоединим к первой перестановке к качестве нового 1-цикла; так получится перестановка (1)(2)(3). 2° Новый элемент вкладываем в 1-циклы первой перестановки; так получатся перестановки (13)(2) и (1)(23). 3° Элемент 3 присоединим к второй перестановке в качестве 1-цикла; тем самым получится перестановка (12)(3). 4° Наконец, элемент 3 вложим в 2-цикл (12) на второе или на третье место, и тем самым получатся перестановки (132) и (123).

Значит, из элементов 1,2,3 имеем перестановки

$$\begin{gathered}(1)(2)(3),\\ (23),\ (13)(2),\ (12)(3),\\ (123),\ (132),\end{gathered} \tag{1}$$

так что

$$C_3(t_1, t_2, t_3) = t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3. \tag{11}$$

Точно так же мы нашли бы C_4 и т. д.

Из результатов (8), (10) и (11) видно, что индикаторы C_1, C_2, C_3 являются изобарическими функциями веса, равного числу элементов. С помощью индукции легко доказывается, что это справедливо и в общем случае.

Для $n = 1$ утверждение справедливо. Предположим теперь, что

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\,, \tag{12}$$

где на правой стороне стоит сумма изобарических функций переменных $t_1, \ldots, t_n$ веса n и степеней $k = 1, 2, \ldots, n$; $A_{n,k}$ — полином степени k, что означает, что все его члены соответствуют перестановкам с k циклами.

Мы должны доказать, что

$$C_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1,k}\,, \tag{13}$$

где $A_{n+1,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n, (n+1)$ — изобарическая функция переменных $t_1, \ldots, t_{n+1}$ веса $(n+1)$ и степени k. Отдельные члены этого полинома соответствуют перестановкам из $(n+1)$ элемента с k циклами.

Чтобы это доказать, мы должны вспомнить, каким образом получаются эти перестановки из перестановок n элементов. Прежде всего, они получаются из перестановок с $(k-1)$ циклом так, что мы присоединяем к ним новый $(n+1)$-ый элемент в качестве нового 1-цикла. Но перестановки из n элементов с $(k-1)$ циклом представляются полиномом $A_{n,k-1}$, общий член которого есть

$$\ldots t_1^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n}$$

с условиями для показателей

$$\begin{gathered} k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n,\\ k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k - 1.\end{gathered}$$

Присоединение нового, $(n+1)$-ого элемента в качестве нового 1-цикла влечет за собой появление в индикаторе C_{n+1} членов вида

$$\ldots t_1^{k_1+1} t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n},$$

которые имеют степень

$$(k_1 + 1) + k_2 + \ldots + k_n = k$$

и вес

$$(k_1 + 1) + 2k_2 + \ldots + nk_n = n + 1 .$$

Но перестановки из $(n + 1)$ элемента с k циклами могут возникнуть также из перестановок из n элементов с k циклами, если в последние вкладывать новый элемент в отдельные циклы на все допустимые места. Перестановки из n элементов с k циклами представляет полином $A_{n,k}$, общий член которого

$$\ldots t_1^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n}$$

имеет степень k и вес n.

Предположим, что новый элемент вложим в некоторый ν-цикл, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Тем самым исчезнет один ν-цикл и возникнет один $(\nu + 1)$ цикл, так что в полиноме $A_{n+1,k}$ будут члены вида

$$\ldots t_1^{k_1} \ldots t_\nu^{k_\nu - 1} \; t_{\nu+1}^{k_{\nu+1}+1} \ldots t_n^{k_n} \; t_{n+1}^{k_{n+1}} .$$

Эти члены имеют, очевидно, степень k и вес

$$k_1 + 2k + \ldots + (\nu - 1)k_{\nu-1} + \nu(k_\nu - 1) + (\nu + 1)(k_{\nu+1} + 1) + \\ + (\nu + 2)k_{\nu+2} + \ldots + nk_n + (n + 1)k_{n+1} = n + 1 .$$

Таким образом, мы доказали, что все члены полинома $A_{n+1,k}$, $k = 1, \ldots, (n + 1)$ имеют степень k и вес $(n + 1)$.

Пример 1. Таблица цикловых индикаторов в цитированной книге Дж. Риордана [2] заканчивается на индикаторе C_9. Покажем, каким образом получим из него члены индикатора C_{10}. Так, например, в индикаторе есть член

$$18144 t_1^2 t_2 t_5 ; \tag{14}$$

из которого получатся такие члены индикатора C_{10}:

$$\begin{gathered} 18144 t_1^3 t_2 t_5 + 36288 t_1 t_2^2 t_5 + \\ 36288 t_1^2 t_3 t_5 + 90720 t_1^2 t_2 t_6 . \end{gathered} \tag{15}$$

Член (14) представляет в C_9 перестановки с двумя 1-циклами, одним 2-циклом и одним 5-циклом. Новый элемент можно к этим перестановкам присоединить в качестве нового 1-цикла; так получится первый член в (15). Или же можно новый элемент вложить в некоторый из обоих 1-циклов, так что получится новый 2-цикл; так получится второй член в (15). Далее, мы можем новый элемент вложить в 2-цикл, причем на два места, и тем самым получим третий член в (15). Наконец, новый элемент можно дать на одно из пяти возможных мест в 5-цикле, и тем самым получится последний член в (15). Аналогично мы получим все члены индикатора C_{10}.

Если же мы, наоборот, знаем, что в индикаторе C_{10} имееется член с

$$t_1 t_2 t_3 t_4 , \tag{16}$$

так как $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, то легко определим его коэффициент, если нам известен индикатор C_9. В самом деле, эти члены получаются только из следующих членов индикатора C_9:

$$\begin{gathered} 15120 t_2 t_3 t_4 , \quad 15120 t_1^2 t_3 t_4 , \\ 11340 t_1 t_2^2 t_4 , \quad 10080 t_1 t_2 t_3^2 , \end{gathered} \tag{17}$$

причем так, что новый элемент присоединим к первому члену в качестве 1-цикла, или же один 1-цикл во втором члене изменим в 2-цикл, или же один 2-цикл в третьем члене дополним до 3-цикла, или же, наконец, некоторый 3-цикл в последнем члене изменим в 4-цикл. Следовательно, в индикаторе C_{10} у произведения (16) стоит коэффициент

$$15120 + 2 \,.\, 15120 + 4 \,.\, 11340 + 6 \,.\, 10080 = 151200 . \tag{18}$$

3.

Если мы хотим из n элементов построить все разные перестановки класса (k), то мы должны из них прежде всего выбрать k_1 элементов для k_1 1-циклов. Это может быть сделано $\binom{n}{k_1}$ способами. Из любой из этих групп с k элементами элемент для первого 1-цикла можно выбрать $\binom{k_1}{1}$ способами, для второго — $\binom{k_1 - 1}{1}$ способами и т. д. Значит, из выбранной группы можно k_1 1-циклов построить

$$\binom{k_1}{1} \binom{k_1 - 1}{1} \ldots \binom{2}{1} \binom{1}{1}$$

способами.

Но полученные 1-циклы мы получим, очевидно, во всех $k_1!$ порядках, поэтому найденное число необходимо разделить на $k_1!$. И поскольку аналогично можно поступать со всеми группами, то видим, что имеется всего

$$\binom{n}{k_1} \binom{k_1}{1} \binom{k_1 - 1}{1} \ldots \binom{2}{1} \binom{1}{1} \frac{1}{k_1!} \tag{19}$$

возможностей для построения k_1 1-циклов.

Для построения k_2 2-циклов необходимо $2k_2$ элементов, а их можно из оставшихся $(n - k_1)$ элементов выбрать $\binom{n - k_1}{2k_2}$ способами. Из каждой из этих групп с $2k_2$ элементами элементы для первого 2-цикла можно выбрать $\binom{2k_2}{2}$ способами, для второго 2-цикла — $\binom{2k_2-2}{2}$ способами, и т. д., для предпоследнего и последнего циклов соответственно $\binom{4}{2}$ и $\binom{2}{2}$ способами. Если к тому же еще учесть, что так построенные 2-циклы будут во всех $k_2!$ порядках, то видно, что k_2 2-циклов можно построить

$$\binom{n-k_1}{2k_2}\binom{2k_2}{2}\binom{2k_2-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}\frac{1}{k_2!} \tag{20}$$

способами. Произведение обоих чисел (19) и (20) равно

$$\frac{n!}{1!^{k_1}k_1!2!^{k_2}k_2!(n-k_1-2k_2)!};$$

следовательно, таково число возможностей для построения k_1 1-циклов и k_2 2-циклов из заданных n элементов. Если так поступать дальше, то мы прийдем, наконец, к числу

$$\frac{n!}{1!^{k_1}k_1!2!^{k_2}k_2!\ldots n!^{k_n}k_n!} \tag{21}$$

Столько мы получили пока перестановок класса (k) описанным способом.

Но это не все искомые перестановки. Так как при указанном способе мы все время образуем сочетания, то нам обеспечено, что во всех циклах на первых местах находятся наименьшие элементы. Но остальные элементы могут за первыми элементами следовать во всевозможных порядках, и все время это будут перестановки класса (k). Из каждого ν-цикла получится таким образом $(\nu-1)!$ перестановок, а из всех k_ν ν-циклов — $(\nu-1)!^{k_\nu}$ перестановок. Отсюда получаем, что число (17) следует умножить на произведение

$$\prod_{\nu=1}^{n}(\nu-1)!^{k_\nu}, \tag{22}$$

так что

$$C(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1}k_1!2^{k_2}k_2!\ldots n^{k_n}k_n!}. \tag{23}$$

Пример 2. Пусть $n = 5$; элементы обозначим числами $1, \ldots, 5$. Мы имеем $2 . 1 + 3 = 5$, и будем искать все разные перестановки циклового класса $(2, 0, 1, 0, 0)$ из данных элементов. Для двух первых 1-циклов необходимы 2 элемента, а их можно выбрать $\binom{5}{2} = 10$ способами. Это такие группы: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45. Из первой группы

образованные пары 1-циклов таковы: (1) (2) и (2) (1). Мы видим, что они здесь в обоих порядках. Мы выберем первый из них, и если мы это сделаем и с остальными группами, то мы придем к следующим парам 1-циклов:

(1) (2),	(1) (3),	(1) (4),	(1) (5),
	(2) (3),	(2) (4),	(2) (5),
		(3) (4),	(3) (5),
			(4) (5).

Оставшиеся элементы образуют 3-циклы:

(345),	(245),	(235),	(234),
	(145),	(135),	(134),
		(125),	(124),
			(123),

в которых последние два элемента необходимо еще переставить.

Следовательно, искомые перестановки таковы:

(1) (2) (345),	(1) (2) (354),	(1) (3) (245),	(1) (3) (254),
(1) (4) (235),	(1) (4) (253),	(1) (5) (234),	(1) (5) (243),
(2) (3) (145),	(2) (3) (154),	(2) (4) (135),	(2) (4) (153),
(2) (5) (134),	(2) (5) (143),	(3) (4) (125),	(3) (4) (152),
(3) (5) (124),	(3) (5) (142),	(4) (5) (123),	(4) (5) (132).

Их число равно

$$C(2, 0, 1, 0, 0) = \frac{5!}{2 . 3} = 20.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Serret J. A., *Handbuch der höheren Algebra*, 2. Bd., 2. Auflage, Leipzig 1879.
[2] Riordan J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York 1953.
[3] Faa di Bruno F., *Einleitung in die Theorie der binären Formen*, Leipzig 1881.

Поступило 20. 5. 1964.

ČSAV, Kabinet matematiky Slovenskej akadémie vied, Bratislava

NOTE ON THE CYCLE INDICATOR OF THE SYMMETRIC GROUP

Josef Kaucký

Summary

The indicator in question (3) is the generating function for the numbers (2). If we denote by the ν-cycle a cycle of order ν, (2) is the number of permutations of n elements

of class (k), that is of permutations with k_1 unit cycles, k_2 2-cycles, ..., k_n n-cycles. The numbers k_1 to k_n satisfy the condition (1).

If $A(t) = f[g(t)]$ is a composite function, the its n-th derivative is given by the Faa di Bruno's formula (4), the equation (5) giving the polynomials $A_{n,k}$. The indicator (3) follows from (4) by putting $f_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ and $g_\nu = (\nu - 1)!\, t_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

To find the indicator C_n, we must first know all partitions (1) of n, then compute the numbers (2) and thus to determine the sum (3). In the second part of this article we describe a simple procedure for calculating successively the indicators C_n.

The relation (3) says that C_n is an isobaric function of weight n in the variables $t_1\, t_2, \ldots, t_n$. But we may prove this property by an analogous method to Faa di Bruno's method [3] for the proof of the isobaricity of the function (4).

We proceed by induction. Because $C_1 = t$, the assertion is true for $n = 1$. Now we suppose that C_n is of the form (12), where $A_{n,k}$ is a polynomial of degree k and an isobaric function of weight n in $t_1, t_2, \ldots, t_n$. All terms of $A_{n,k}$ correspond to the permutations with k cycles. Then we can show that C_{n+1} is of the form (13), where $A_{n+1,k}$ is a polynomial of degree k and an isobaric function of weight $n + 1$ in $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$. Its terms correspond to the permutations of $n + 1$ elements with k cycles.

The proof follows from the fact that these permutations arise from the permutations of n elements in two ways: Either from the permutations with $(k - 1)$ cycles by adding the new element as a further unit cycle or from the permutations with k cycles by putting the new element into all possible places in each cycle, the number of which in a ν-cycle is ν.

For example in the indicator C_9 (see [2]) there occurs the member (14), from which four members (15) of the indicator C_{10} arise. The first member arises by adding the new element as a further unit cycle, the next member is found by putting the new element into the second place in each of the two unit cycles, the third member arises by placing the new element into the second or third position in the 2-cycles and by a similar way we obtain the last member in (15).

If we know, on the contrary, that the indicator C_{10} has a member with the product (16), we can compute his coefficient. The members with product (16) can namely arise only from the members (17) of the indicator C_9 so that the demanded coefficient equals (18).

The last part of this article considers the construction of permutations of n elements of class (k). For this purpose we must first select k_1 elements for the k_1 unit cycles, this can be made in $\binom{n}{k_1}$ ways. Now from each of these groups it is possible to select the element for the first unit cycle in $\binom{k_1}{1}$ ways, for the second unit cycle in $\binom{k_1 - 1}{1}$ ways etc. By proceeding so, we get the unit cycles in all possible arrangements so that the number of possibilities to construct the k_1 unit cycles is (19). Similarly the number of possibilities to construct the k_2 2-cycles is given by (20). Finally, we get the permutations in number (21).

These are not all the demanded permutations. By the described procedure the first element in each cycle is the smallest element, but the other elements can follow in all possible arrangements. We must therefore multiply the number (21) by the product (22) to obtain the final result (23).

As an example there are constructed the permutations of 5 elements of class (2, 0, 1, 0, 0).