MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 3, 1965

ЗАМЕТКА О МНОЖЕСТВАХ, РЕГУЛЯРНЫХ ПО ВНЕШНЕЙ МЕРЕ КАРАТЭОДОРИ

ЗДЕНА РИЕЧАНОВА (ZDENA RIEČANOVÁ), Братислава

Подмножество E метрического пространства X называется абсолютно измеримым, если оно измеримо по произвольной внешней мере Каратэодори. В работе [2] (стр. 11) при некоторых предположениях о X доказано, что всякое абсолютно измеримое множество регулярно по всякой внешней мере Каратэодори Γ (т. е. его можно по отношению к Γ извне аппроксимировать открытыми, а изнутри — замкнутыми множествами).

В настоящей заметке мы докажем аналогичную теорему для внешних мер Каратэодори в локально компактном хаусдорфовом топологическом пространстве. Непосредственным следствием ее является, в частности, известное утверждение о том, что всякая бэровская мера регулярна.

В работе мы будем пользоваться терминами и понятиями из теории меры в соответствии с книгой [1]. Мы будем все время предполагать, что X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\boldsymbol{H}$ — наименьшее наследственное σ-кольцо над всеми компактными подмножествами X, и $\boldsymbol{B}$ — система всех бэровских подмножеств X (т. е. система всех подмножеств X, принадлежащих наименьшему σ-кольцу над системой всех компактных G_δ-множеств).

Определение. *Действительную функцию множества $\Gamma(E)$, определенную для всех $E \in \boldsymbol{H}$, мы будем называть внешней мерой Каратэодори на $\boldsymbol{H}$ (согласно [3]), если Γ — внешняя мера на $\boldsymbol{H}$, и для произвольных множеств A, $B \in \boldsymbol{H}$, для которых существуют открытые множества U, V так, что $\bar{A} \subset U$, $\bar{B} \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, справедливо*

$$\Gamma(A \cup B) = \Gamma(A) + \Gamma(B).$$

В дальнейшем пусть Γ — произвольная внешняя мера Каратэодори на $\boldsymbol{H}$. Множество $E \in \boldsymbol{H}$ назовем измеримым по Γ (или же коротко Γ-измеримым), если для каждого множества $A \in \boldsymbol{H}$ справедливо

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A - E).$$

Введем еще следующие определения:

1. Множество $E \in \boldsymbol{H}$ будем называть *абсолютно измеримым*, если E измеримо по всякой внешней мере Каратэодори, определенной на $\boldsymbol{H}$.

2. Множество $E \in \boldsymbol{H}$ будем называть *внутренне регулярным* по Γ, если

$$\Gamma(E) = \sup\{\Gamma(C) : E \supset C \in \boldsymbol{C}\},$$

где $\boldsymbol{C}$ — система всех компактных множеств в X, которые суть G_δ.

3. Множество $E \in \boldsymbol{H}$ будем называть *внешне регулярным* по Γ, если

$$\Gamma(E) = \inf\{\Gamma(O) : E \subset O \in \boldsymbol{U}\},$$

где $\boldsymbol{U}$ — система всех открытых бэровских множеств в X.

4. Множество $E \in \boldsymbol{H}$ будем называть *регулярным* по Γ, если оно внутренне и внешне регулярно по Γ.

5. Внешнюю меру Каратэодори Γ на $\boldsymbol{H}$ будем называть (O, σ)-*конечной*, если существует счетная система $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ открытых бэровских множеств такая, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n, \quad \Gamma(O_n) < \infty \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Примечание. Если Γ — внешняя мера Каратэодори на $\boldsymbol{H}$, которая (O, σ)-конечна, то $X \in \boldsymbol{H}$, значит, $\boldsymbol{H}$ содержит все подмножества X. В этом случае мы говорим, что Γ есть (O, σ)-конечная внешняя мера Каратэодори в X.

Лемма 1. *Пусть Γ — произвольная внешняя мера Каратэодори на $\boldsymbol{H}$. Для $E \in \boldsymbol{H}$ определим*

$$\Gamma_0(E) = \inf\{\Gamma(O) : O \supset E, \quad O \text{ — открытое бэровское}\}.$$

Тогда Γ_0 — внешняя мера Каратэодори на $\boldsymbol{H}$. Если E Γ_0-измеримо и $\Gamma_0(E) < \infty$, то E внешне регулярна по Γ.

Доказательство. Очевидно, Γ_0 — внешняя мера на $\boldsymbol{H}$. Покажем, что она является внешней мерой Каратэодори.

Пусть A, $B \in \boldsymbol{H}$ — такие, что для них существуют U, V открытые так, что выполняется

$$\bar{A} \subset U, \quad \bar{B} \subset V, \quad U \cap V = \emptyset. \tag{1}$$

Так как все σ-ограниченные множества образуют σ-кольцо, содержащее все компактные множества, то каждое множество, принадлежащее $\boldsymbol{H}$, σ-ограничено. Следовательно, существуют компактные множества K_1, K_2, ...; L_1, L_2, ... такие, что

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \qquad B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n.$$

Для всякого n справедливо

$$\bar{A} \cap K_n \subset \bar{A} \subset U, \quad \bar{B} \cap L_n \subset \bar{B} \subset V.$$

Так как X — локально компактное хаусдорфово пространство, то существуют открытые бэровские множества U_n, V_n $(n = 1,2, \ldots)$, для которых справедливо

$$\bar{A} \cap K_n \subset U_n \subset \bar{U}_n \subset U, \quad \bar{B} \cap L_n \subset V_n \subset \bar{V}_n \subset V.$$

Положим

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{n} U_k, \quad D_n = \bigcup_{k=1}^{n} V_k.$$

Тогда, очевидно, $\bar{C}_n \subset U$, $\bar{D}_n \subset V$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supset A$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \supset B$, причем C_n, D_n — открытые бэровские множества.

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению Γ_0 существует открытое бэровское множество $O \supset A \cup B$ такое, что

$$\Gamma_0(A \cup B) + \varepsilon \geqq \Gamma(O) \geqq \Gamma[O \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cup D_n)] =$$

$$= \Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} [O \cap (C_n \cup D_n)]) = \lim_{n\to\infty} \Gamma[O \cap (C_n \cup D_n)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (O \cap C_n) + \lim_{n\to\infty} \Gamma(O \cap D_n) =$$

$$= \Gamma[\bigcup_{n=1}^{\infty} (O \cap C_n)] + \Gamma[\bigcup_{n=1}^{\infty} (O \cap D_n)] \geqq$$

$$\geqq \Gamma_0(A) + \Gamma_0(B).$$

Тем самым мы показали, что для A, B со свойством (1) имеет место неравенство

$$\Gamma_0(A \cup B) \geqq \Gamma_0(A) + \Gamma_0(B).$$

Обратное неравенство очевидно.

Пусть E Γ_0-измеримо и $\Gamma_0(E) < \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда существует открытое бэровское множество $O \supset E$, для которого

$$\Gamma_0(O) = \Gamma(O) < \Gamma_0(E) + \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\Gamma_0(O) = \Gamma_0(E) + \Gamma_0(O - E).$$

Отсюда получим

$$\Gamma(O - E) \leqq \Gamma_0(O - E) = \Gamma_0(O) - \Gamma_0(E) < \varepsilon.$$

Значит, множество E внешне регулярно по Γ.

Лемма 2. *Пусть Γ бэровская мера, определенная на $\boldsymbol{B}$. Для $E \in \boldsymbol{H}$ положим*

$$\Gamma_0(E) = \inf \{\Gamma(F) : E \subset F,\ F \in \boldsymbol{B}\}.$$

Тогда Γ_0 — внешняя мера Каратэодори на $\boldsymbol{H}$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Теорема. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\boldsymbol{H}$ — наименьшее наследственное σ-кольцо над всеми компактными подмножествами X. Пусть Γ — внешняя мера Каратэодори, конечная на всех компактных множествах.*

Тогда все абсолютно измеримые множества регулярны по Γ.

Доказательство. Сначала покажем, что всякое абсолютно измеримое множество внешне регулярно по Γ.

Пусть E — абсолютно измеримое множество. Так как E σ-ограничено, то существуют компактные множества K_n такие, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Согласно теореме 4, стр. 212 книги [1] существуют открытые σ-компактные множества W_n такие, что $K_n \subset W_n$ и $\Gamma(W_n) < \infty$ для $n = 1,2, \ldots$. Но согласно той же теореме всякое открытое σ-компактное множество W — бэровское, так как имеет место $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $C_i \subset D_i \subset W$ для $n = 1,2, \ldots$, $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, где C_i — компактные и D_i — компактные G_δ-множества.

Значит, существует такая последовательность открытых бэровских множеств W_n $(n = 1,2, \ldots)$, что

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n, \quad \Gamma(W_n) < \infty.$$

Положим $E_n = E \cap W_n$ $(n = 1,2, \ldots)$. Так как E_n абсолютно измеримо, то оно также Γ_0-измеримо, где Γ_0 — внешняя мера Каратэодори, определенная в лемме 1.

Одновременно $\Gamma_0(E_n) \leqq \Gamma_0(W_n) < \infty$, значит, согласно лемме 1 E_n внешне регулярно по Γ $(n = 1,2, \ldots)$. Множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, очевидно, также внешне регулярно по Γ.

Покажем дальше, что E также внутренне регулярно.

1. Предположим, что E ограничено, т. е. существует компактное множество C, содержащее E. Согласно [1] (теорема 4, стр. 212) существует G_δ-компактное множество C_0 такое, что $C \subset C_0$. Множество $C_0 - E$ абсолютно измеримо, следовательно, согласно только что доказанному

оно внешне регулярно. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует открытое бэровское множество U такое, что

$$U \supset C_0 - E, \quad \Gamma[U - (C_0 - E)] < \varepsilon.$$

Множество $C_0 - U$ компактно, и поскольку оно бэровское, то оно является также G_δ-множеством. Очевидно, имеет место

$$C_0 - U \subset E, \quad \Gamma[E - (C_0 - U)] \leqq \Gamma[U - (C_0 - E)] < \varepsilon.$$

2. Пусть E — произвольное абсолютно измеримое множество. Тогда $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — компактные G_δ-множества и $F_n \subset F_{n+1}$ $(n = 1,2,\ldots)$. Положим $E_n = E \cap F_n$ $(n = 1,2,\ldots)$. E_n — ограниченные абсолютно измеримые множества, значит, согласно доказанному они внутренне регулярны по Γ. Далее, $E_n \subset E_{n+1}$, значит,

$$\Gamma(E) = \lim_{n\to\infty} \Gamma(E_n).$$

Пусть c — произвольное действительное число меньшее $\Gamma(E)$, тогда существует n такое, что $c < \Gamma(E_n)$, и так как E_n внутренне регулярно, то существует компактное G_δ-множество C такое, что $C \subset E_n$ и $c < \Gamma(C)$.

Следствие 1. *Если X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, а Γ — (O, σ)-конечная внешняя мера Каратэодори в X, то все абсолютно измеримые множества регулярны по Γ.*

Следствие 2. *Всякая бэровская мера регулярна.*

Доказательство. Пусть μ — бэровская мера на $\boldsymbol{B}$. Согласно лемме 2 $\Gamma_0(E) = \inf\{\mu(F) : F \supset E, F \in \boldsymbol{B}\}$ для $E \in \boldsymbol{H}$ является внешней мерой Каратэодори на $\boldsymbol{H}$. Если K — компактное множество, то существует компактное G_δ-множество $C_0 \supset K$, значит, $\Gamma_0(K) \leqq \mu(C_0) < \infty$. Согласно теореме 1 работы [3] (стр. 247) все бэровские множества абсолютно измеримы, а согласно только что доказанной теореме все абсолютно измеримые множества регулярны по Γ_0.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950 (Халмош П., *Теория меры*, Москва 1953).

[2] Mickle E. J., Rado T., *On density theorems for outer measures*, Rozprawy matematyczne, Warszawa 1960.
[3] Риечанова З., *О внешней мере Каратеодори*, Mat.-fyz. čas. *12* (1962), 246—252.

Поступило 7. 5. 1964.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

NOTE ON THE SETS THAT ARE REGULAR UNDER ANY CARATHÉODORY OUTER MEASURE

Zdena Riečanová

Summary

A subset E of a metric space X is called absolutely measurable, if it is measurable under any Carathéodory outer measure. In the paper [2] it is proved, under certain suppositions about X, that each absolutely measurable set E is regular under any Carathéodory outer measure m (e. g. $m(E) = \text{l.u.b.}\ \{m(G) : G \supset E,\ G \text{ open}\} = \text{g.l.b.}\ \{m(F) : F \subset E,\ F \text{ closed}\}$).

In this article an analoguous theorem for Carathéodory outer measures is proved in any locally compact Hausdorff space. An immediate corollary of this theorem is the well known statement that each Baire measure is regular.