MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 3, 1965

PLOCHY S AFINNĚ VYTVOŘUJÍCÍ SÍTÍ (S KONSTRUKCÍ SPECIÁLNÍ BIELIPTICKÉ PLOCHY)

VÁCLAV HAVEL, Brno

1. Vyšetřujme afinní prostor A_3 a označme $\mathscr{A}$ jeho úplnou afinní grupu. Vrstva na ploše v A_3 nazývá se afinně vytvořující, odpovídají-li čáry vrstvy pevné čáře při afinitách, probíhajících monosystém $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$. Síť na ploše v A_3 nazývá se afinně vytvořující, skládá-li se z afinně vytvořujících vrstev takových, že čáry jedné vrstvy jsou trajektoriemi vzhledem k systému afinit odpovídajícímu druhé vrstvě a naopak.(1)

Plocha s afinně vytvořující vrstvou má parametrické rovnice

$$x^i = a^i_j(v)\,\varphi^j(u) + a^i(v), \quad (u, v) \in I_u \times I_v, \tag{1}$$

kde $x^i = \varphi^i(u)$, $u \in I_u$ *jsou parametrické rovnice pevné čáry a*

$$\left\| \begin{matrix} a^1_1(v) & a^1_2(v) & a^1_3(v) & a^1(v) \\ a^2_1(v) & a^2_2(v) & a^2_3(v) & a^2(v) \\ a^3_1(v) & a^3_2(v) & a^3_3(v) & a^3(v) \end{matrix} \right\|, \quad v \in I_v,$$

je matice afinity monosystému $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$. (2)

Důkaz je zřejmý.

Plocha s afinně vytvořující sítí má parametrické rovnice

$$x^k = a^k_{ij}\,\varphi^i(u)\,\psi^j(v) + b^k_i\,\varphi^i(u) + c^k_j\,\psi^j(v), \quad (u, v) \in I_u \times I_v, \tag{2}$$

kde a^k_{ij}, b^k_i, c^k_j *jsou konstanty,* $x^i = \varphi^i(u)$, $u \in I_u$, *resp.* $x^j = \psi^j(v)$, $v \in I_v$ *jsou parametrické rovnice dvou čar a*

(1) Všude zde půjde o čáry, plochy systémy předepsané třídy $\mathscr{C}^r$; $r = 0, 1, 2, \ldots$. Náleží-li $\mathscr{S}$ do některé podgrupy z $\mathscr{A}$, obdržíme speciální afinně vytvořující vrstvu.

(2) Indexy nabývají hodnot 1, 2, 3, pokud není výslovně řečeno něco jiného. Užíváme obvyklé sumační konvence.

$$\left\| \begin{matrix} a^1_{i1}\varphi^i(u) + c^1_1, & a^1_{i2}\varphi^i(u) + c^1_2, & a^1_{i3}\varphi^i(u) + c^1_3, & b^1_i\varphi^i(u) \\ a^2_{i1}\varphi^i(u) + c^2_1, & a^2_{i2}\varphi^i(u) + c^2_2, & a^2_{i3}\varphi^i(u) + c^2_3, & b^2_i\varphi^i(u) \\ a^3_{i1}\varphi^i(u) + c^3_1, & a^3_{i2}\varphi^i(u) + c^3_2, & a^3_{i3}\varphi^i(u) + c^3_3, & b^3_i\varphi^i(u) \end{matrix} \right\|, \quad u \in I_u, \; resp.$$

$$\left\| \begin{matrix} a^2_{1j}\psi^j(v) + b^1_2, & a^1_{2j}\psi^j(v) + b^1_2, & a^1_{3j}\psi^j(v) + b^1_3, & c^1_j\psi^j(v) \\ a^2_{1j}\psi^j(v) + b^2_1, & a^2_{2j}\psi^j(v) + b^2_2, & a^2_{3j}\psi^j(v) + b^2_3, & c^2_j\psi^j(v) \\ a^3_{1j}\psi^j(v) + b^3_1, & a^3_{2j}\psi^j(v) + b^3_2, & a^3_{3j}\psi^j(v) + b^3_3, & c^3_j\psi^j(v) \end{matrix} \right\|, \quad v \in I_v,$$

jsou matice afinit dvou monosystémů z $\mathscr{A}$.

Důkaz. Je-li dána plocha o parametrickém popisu (2), pak položme

$$a^k_{ij}\varphi^i(u) + c^k_i = B^k_j(u), \; b^k_i\varphi^i(u) = B^k(u) \text{ pro } u \in I_u,$$
$$a^k_{ij}\psi^j(v) + b^k_j = A^k_i(v), \; c^k_j\psi^j(v) = A^k(v) \text{ pro } v \in I_v,$$

takže danou plochu lze vyjádřit dvojicí parametrických rovnic

$$(3_\varphi) \qquad x^k = A^k_i(v)\varphi^i(u) + A^k(v),$$
$$(3_\psi) \qquad x^k = B^k_j(u)\psi^j(v) + B^k(u).$$

Jde tedy o plochu s afinně vytvořující sítí o vrstvách daných rovnicemi $v = konst.$ resp. $u = konst.$

Mějme dánu plochu o parametrických rovnicích $x^i = x^i(u, v)$, $(u, v) \in I_u \times I_v$, obsahující afinně vytvořující síť s vrstvami čar o rovnicích $v = konst.$, resp. $u = konst.$ Tuto plochu lze vyjádřit rovnicemi tvaru (3_φ), (3_ψ) s vhodnými $A^k_i(v)$, $A^k(v)$, $\psi^j(v)$, $B^k_j(u)$, $B^k(u)$, $\varphi^i(u)$. Platí tedy identita

$$(4) \qquad A^k_i(v)\varphi^i(u) + A^k(v) = B^k_j(u)\psi^j(v) + B^k(u) \text{ pro } (u, v) \in I_u \times I_v.$$

Z ní plyne nyní jako důsledek

$$(5) \qquad A^k_i(v) = a^k_{ij}\psi^j(v) + c^k, \; A^k_i(v) = b^k_j\psi^j(v), \; v \in I_v$$

pro vhodné konstanty a^k_{ij}, b^k_j, c^k_i.

Vskutku, je-li čára o rovnicích $x^i = \varphi^i(u)$, $u \in I_v$, prostorová, zvolme na ní čtyři lineárně nezávislé body o parametrech u_1, u_2, u_3, u_4, takže platí

$$(6) \qquad A^k_i(v)\varphi^i(u_l) + A^k(v) = B^k_j(u_l)\psi^j(v) + B^k(u_l) \text{ pro } l = 1, 2, 3, 4.$$

Při pevném k máme tedy zde čtyři rovnice pro čtyři neznámé A^k_1, A^k_2, A^k_3, A^k. Soustava má jediné řešení, které je skutečně tvaru (5).

Analogicky postupujeme v případě čáry rovinné (pak jde o výběr tří lineárně nezávislých bodů) a v případě čáry obsažené v přímce (pak jde o výběr dvou lineárně nezávislých bodů).

Po dosazení z (5) do (3_φ) obdržíme rovnice plochy v žádaném tvaru.

2. Uvedeme některé speciální typy ploch s afinně vytvořující sítí. Uplatníme dvě klasifikační hlediska: a) podle typu čar v obou vrstvách, b) podle typu

grup afinit v nichž jsou obsaženy oba monosystémy odpovídající vrstvám dané afinně vytvořující sítě.

Ad a): Jednoduchým případem afinně vytvořujících sítí jsou ty, jejichž vrstvy jsou tvořeny vesměs parabolami, resp. hyperbolami nebo elipsami (parabolická, hyperbolická, resp. eliptická vrstva).

Ad b): Jednoduché typy ploch s afinně vytvořující vrstvou získáme, když příslušný monosystém afinit volíme tak, aby byl obsažen v grupě translací, v grupě perspektivních afinit s pevnou rovinou samodružných bodů, v grupě homotetií, v grupě biaxiálních afinit atd. Obdržíme tak translační plochy, Salkowského plochy, Kadeřávkovy plochy(3) atd. ([2], str. 270, 225—227; [3], str. 51—52).

Každá parabolická, hyperbolická, resp. eliptická vrstva dané plochy je afinně vytvořující. (Bez důkazu.)

Všimneme si nyní bieliptické plochy (plochy se sítí elips) a to takové, že síť elips je afinně vytvořující. Nechť rovnice elips obou vrstev jsou $u = konst.$, resp. $v = konst.$, pak vyšetřovaná plocha má parametrické vyjádření

$$(7) \qquad x^k = a^k_{11}\cos u \cos v + a^k_{12}\cos u \sin v + a^k_{21}\sin u \cos v + a^k_{22}\sin u \sin v + b^k_1\cos u + b^k_2\sin u + c^k_1\cos v + c^k_2\sin v, \; (u, v) \in R \times R$$

s vhodnými koeficienty a^k_{ij}, b^k_i, c^k_j.(4)

V teorii zavěšených střech setkáváme se s tímto námětem:(5) V eukleidovském prostoru E_3 mějme dány kružnice I, II jednotkového poloměru, prvou v rovině $(x^1 = 0)$ se středem $(0, 0, 1)$, druhou v rovině $(x^2 = 0)$ se středem $(0, 0, -1)$. Hledejme plochu s afinně vytvořující sítí složenou ze dvou eliptických vrstev a žádejme, aby elipsy prvé vrstvy byly souměrné podle roviny $(x^1 = 0)$, aby jedna jejich osa procházela bodem $(0, 0, 1)$ a jeden z vrcholů byl na kružnici I a aby kružnice II náležela do prvé vrstvy a kružnice I do druhé vrstvy.

Ukážeme, že taková plocha existuje. Elipsy prvé vrstvy lze vyjádřit parametricky takto:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x^1 &= b(v)\sin u, \\ x^2 &= (a(v)\cos u + a(v) + 1)\cos v, \\ x^3 &= (a(v)\cos u + a(v) + 1)\sin v + 1, \end{aligned}$$

kde $a(v)$, $b(v)$ jsou délky poloos a žádáme $a(3\pi/2) = 1$, $b(3\pi/2) = 1$, takže pro $v = 3\pi/2$ je $x^1 = \sin u$, $x^2 = 0$, $x^3 = -\cos u - 1$, což vyjadřuje to,

(3) Též: klínové plochy.
(4) R je množina všech reálných čísel.
(5) Námět laskavě poskytl Prof. Ing. Dr. F. Lederer (Vysoké učení technické v Brně).

že kružnice II náleží prvé vrstvě. Protože však plocha má parametrické rovnice tvaru (7), je tedy

$$\begin{cases} x^1 = (A \cos v + B \sin v + C) \sin u\,, \\ x^2 = \cos u \cos v + 2 \cos v\,, \\ x^3 = \cos u \sin v + 2 \sin v + 1\,, \end{cases} \tag{9}$$

kde A, B, C jsou konstanty, $- B + C = 1$; pro $u = \pi$ je $x^1 = 0$, $x^2 = \cos v$; $x^3 = \sin v + 1$, takže kružnice I náleží druhé vrstvě. Obdrželi jsme parametrické rovnice hledané bieliptické plochy.

Speciálně pro $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$ přejdou rovnice (9) v rovnice

$$\begin{cases} x^1 = -\sin u \sin v\,, \\ x^2 = (\cos u + 2) \cos v\,, \\ x^3 = (\cos u + 2) \sin v + 1\,; \end{cases} \tag{10}$$

zde je rovněž druhá afinně vytvořující vrstva složena z elips souměrných podle roviny ($x^2 = 0$); roviny těchto elips procházejí vesměs počátkem, jak lze okamžitě ověřit výpočtem.

LITERATURA

[1] Норден А. П., *Теория поверхностей*, Москва 1956.

[2] Широков П. А., Широков А. П., *Аффинная дифференциальная геометрия*, Москва 1959.

[3] Havel V., *O plochách klínových I—II*, Čas. pěst. mat. *80* (1955), 51—59, 308—316.

Došlo 27. 3. 1964.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Vysokého učení technického, Brno

FLÄCHEN MIT AFFIN-ERZEUGENDEM NETZ (MIT DER KONSTRUKTION EINER BIELLIPTISCHEN FLÄCHE)

Václav Havel

Zusammenfassung

Man untersucht eine Fläche im affinen Raume A_3, auf der sich das folgende Kurvennetz befindet: Sind $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ beide Netzscharen, dann entsprechen sich die Kurven einer jeden Schar in gewissen affinen Transformationen und die Kurven jeder Schar sind Trajektorien der restlichen Schar bezüglich der entsprechenden affinen Transformationen.

Nachträglich konstruiert man eine spezielle Fläche im euklidischen Raume E_3, welche ein solches Kurvennetz von lauter Ellipsen enthält.