EINE BEMERKUNG ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNG DES DEMOULINSCHEN VIERSEITS FÜR DIE FLÄCHE $\mathscr{P}^2_{0,3}$

VÁCLAV HAVEL, Brno

1. Für die Fläche $\boldsymbol{P}$ vom Typus $\mathscr{P}^2_{0,3}$ wählen wir das spezielle begleitende Tetraeder $A_0A_1A_2A_3$, wobei

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 &= \omega_0^0 . A_0 + \mathrm{d}u . A_1 + \mathrm{d}v . A_2, \\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_1^0 . A_0 + \omega_1^1 . A_1 + \beta \mathrm{d}u . A_2 + (1-h) . \mathrm{d}v . A_3, \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_2^0 . A_0 + \gamma \mathrm{d}v . A_1 + \omega_2^2 . A_2 + (1+h) . \mathrm{d}u . A_3, \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_3^0 . A_0 + \omega_3^1 . A_1 + \omega_3^2 . A_2 + \omega_3^3 . A_3,
\end{aligned} \tag{1}
$$

mit üblichem Sinne der Koeffizienten $\omega_i^j = a_i^j . \mathrm{d}u + b_i^j . \mathrm{d}v$; siehe [6], S. 386—387. Wir beschränken uns ausschließlich auf die Fläche $\boldsymbol{P}$ mit Torsion $h \neq \pm 1, \pm 2$ und mit nichtverschwindenden β, γ; es sei noch, wie üblich, die Geltung von

$$a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = 0, \qquad b_0^0 + b_2^2 + b_1^1 + b_3^3 = 0 \tag{2}$$

vorausgesetzt. Im weiteren gebrauchen wir die Methode des Artikels [5]. Ändert man die Lage von A_0A_3, so entsprechen sich A_0A_3, A_1A_2 in der Polarität bezüglich des Büschels gewisser Oskulationsquadriken $\boldsymbol{D}(\lambda)$ mit den Gleichungen

$$x^0x^3 - x^1x^2 + \lambda . (x^3)^2 = 0 \tag{3}$$

wo mit λ der Parameter des Büschels bezeichnet wird. Die Quadrik $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(0)$ enthält den Punkt A_3 und hat also bei jeder geometrischen Fixation des begleitenden Tetraeders den geometrischen Sinn; vgl. [2], S. 597.

2. Im folgenden betrachten wir die Charakteristiken einer Schar der Quadriken $\boldsymbol{D}$, die den Punkten einer festen asymptotischen Kurve hinzugefügt werden; siehe [4], S. 147—149, wo es sich um den Fall der Fläche des gewöhnlichen projektiven Raumes handelt. Eine solche Charakteristik C_u ist durch

$$x^0 . x^3 - x^1 . x^2 = 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{d}x^0 . x^3 + x^0 . \mathrm{d}x^3 - \mathrm{d}x^1 . x^2 - x^1 . \mathrm{d}x^2 = 0 \tag{5}$$

ausgedrückt; mit d bezeichnen wir nun das Differenzieren mit $\mathrm{d}v = 0$ (es handelt sich nun also um die Schar $\mathscr{S}_u$ der Quadriken $\boldsymbol{D}$ längs einer festen Asymptotik $v = const$). Jeder Punkt $P = x^0 . A_0 + x^1 . A_1 + x^2 . A_2 + x^3 . A_3$ aus C_u erfüllt die Bedingung $\mathrm{d}P = \mu . \mathrm{d}u . P$, so daß

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}P = {} & (\mathrm{d}x^0 + ((-\mu + a_0^0)x^0 + a_1^0 . x^1 + a_2^0 . x^2 + a_3^0 . x^3)\mathrm{d}u)A_0 + \\
& + (\mathrm{d}x^1 + (x^0 + (-\mu + a_1^1)x^1 + a_3^1 . x^3)\mathrm{d}u)A_1 + \\
& + (\mathrm{d}x^2 + (\beta . x^1 + (-\mu + a_2^2)x^2 + a_3^2 . x^3)\mathrm{d}u)A_2 + \\
& + (\mathrm{d}x^3 + ((1+h)x^2 + (-\mu + a_3^3)x^3)\mathrm{d}u)A_3;
\end{aligned} \tag{6}
$$

daraus folgt, daß

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x^0 &= -((-\mu + a_0^0)x^0 + a_1^0 . x^1 + a_2^0 . x^2 + a_3^0 . x^3)\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}x^1 &= -(x^0 + (-\mu + a_1^1)x^1 + a_3^1 . x^3)\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}x^2 &= -(\beta . x^1 + (-\mu + a_2^2)x^2 + a_3^2 . x^3)\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}x^3 &= -((1+h)x^2 + (-\mu + a_3^3)x^3)\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen in (5) folgt

$$
\begin{aligned}
-((-\mu + a_0^0)x^0 + a_1^0 . x^1 + a_2^0 . x^2 + a_3^0 . x^3)x^3 - ((1+h)x^2 + \\
+ (-\mu + a_3^3)x^3)x^0 + (x^0 + (-\mu + a_1^1)x^1 + a_3^1 . x^3)x^2 + \\
+ (\beta . x^1 + (-\mu + a_2^2)x^2 + a_3^2 . x^3)x^1 = 0
\end{aligned}
$$

und endlich

$$
\begin{aligned}
-h . x^0x^2 - (a_0^0 + a_3^3)x^0x^3 + (a_1^1 + a_2^2)x^1x^2 + (-a_1^0 + a_3^2)x^1x^3 + \\
+ \beta . (x^1)^2 + (-a_2^0 + a_3^0)x^2x^3 - a_3^0 . x^3 = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Es gilt also die

Behauptung 1. *Die Charakteristik C_u ist durch* (4) *und* (7) *ausgedrückt.*

Aus (4) und (7) folgern wir sofort:

Die Charakteristik C_u enthält die Gerade A_0A_2 dann und nur dann, wenn die Torsion der Fläche verschwindet.

Im weiteren setzen wir $h = 0$ voraus; wir beschränken uns also auschliesslich auf die Fläche $\boldsymbol{P}$ der Torsion Null. Das durch (4), (7) bestimmte Quadrikenbüschel hat die charakteristische Gleichung

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + a_0^0 + a_3^3) \\
0 & -\beta & \frac{1}{2}(\lambda - a_1^1 - a_2^2) & -\frac{1}{2}(-a_1^0 + a_3^2) \\
0 & \frac{1}{2}(\lambda - a_1^1 - a_2^2) & 0 & -\frac{1}{2}(-a_2^0 + a_3^1) \\
\frac{1}{2}(\lambda + a_0^0 + a_3^3) & -\frac{1}{2}(-a_1^0 + a_3^2) & -\frac{1}{2}(-a_2^0 + a_3^1) & a_3^0
\end{vmatrix} = 0. \tag{8}
$$

Diese Gleichung hat die vierfache Nullstelle λ gerade dann, wenn C_u entweder 1) in eine Kubik und ihre Tangente A_0A_2 oder 2) in die Gerade A_0A_2

und zwei windschiefe Geraden p_u, q_u (die sich beide mit A_0A_2 schneiden) oder 3) in zwei komplanare Geraden zerfällt.

Aus (8) und (2_1) ergibt sich nun die

Behauptung 2. *Die charakteristische Gleichung des Paares von konsekutiven Quadriken aus $\mathscr{S}_u$ hat eine vierfache Nullstelle.*

Wir interessieren uns vor allem um den Fall 2), wo der Rang der Matrix

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & -\frac{1}{2}(-a_1^0 + a_3^2) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a_2^0 + a_3^1) \\ 0 & -\frac{1}{2}(-a_1^0 + a_3^2) & -\frac{1}{2}(-a_2^0 + a_3^1) & a_3^2 \end{vmatrix}$$

gleich 2 ist. Diese Situation wird durch

$$(10)\qquad -a_2^0 + a_3^1 = 0,$$

$$(11)\qquad \tfrac{1}{4}(-a_1^0 + a_3^2)^2 + \beta \,.\, a_3^2 \neq 0$$

charakterisiert.

Behauptung 3. *Die Charakteristik C_u zerfällt in die zweifach gezählte Gerade A_0A_2 und zwei windschiefe Geraden p_u, q_u, welche sich mit A_0A_2 schneiden, gerade wenn die Bedingungen* (10), (11) *erfüllt sind.*

Analogische Betrachtungen können wir für $du = 0$, $\mathscr{S}_v$, C_v, p_v, q_v durchführen. Anstatt (10), (11) bekommen wir die Bedingungen

$$(12)\qquad -b_1^0 + b_3^2 = 0,$$

$$(13)\qquad \tfrac{1}{4}(-b_2^0 + b_3^1) + \gamma \,.\, b_3^0 \neq 0.$$

Setzen wir also die Geltung von (10), (11), (12), (13) voraus, so kann man die Konfiguration der Geraden p_u, q_u; p_v, q_v (der einen und der anderen Geradenschar auf $\boldsymbol{D}$) als Demoulinsches Vierseit im Punkte A_0 der Fläche $\boldsymbol{P}$ bezeichnen.

Ist insbesondere

$$(14)\qquad a_0^0 - a_1^1 - a_2^2 + a_3^3 = 0, \qquad b_0^0 - b_2^2 - b_1^1 + b_3^3 = 0,$$

so ist durch

$$(15)\qquad a_3^2 - a_1^0, \qquad b_3^1 - b_2^0$$

die Wahl der Geraden A_0A_3 in der (ersten) Wilczynskischen Direktrix gekennzeichnet (im Sinne des Artikels [4], S. 396) und aus den Relationen (10), (12) folgt die Lage des Punktes A_3 auf der Quadrik $\boldsymbol{Q}_v(0) = \boldsymbol{Q}_u(0)$ (wir gebrauchen die Bezeichnungen aus [6], S. 390–391). Die Gleichungen (4), (8) haben

nun die Form $x^0x^3 - x^1x^2 = 0$, $\beta \,.\, (x^1)^2 - a_3 \,.\, (x^3)^2 = 0$ und es ergibt sich die Situation, die aus der Flächentheorie des gewöhnlichen projektiven Raumes gut bekannt ist.

3. Im folgenden Abschnitt formulieren wir mit einem freundlichen Erlaubnis von J. Klapka seine Verallgemeinerung eines Bompianischen Satzes, die er mit Verwendung der Begriffe aus den vorhergehenden Absätzen abgeleitet hat.

Behauptung 4. *Die Wilczynskischen Direktrizen sind Quergeraden beider Diagonalen des Demoulinschen Vierseits.*

Ein interessanter Beweis für den klasischen Fall der Fläche (mit passenden Einschränkungen), welche in gewöhnlichen projektiven Raum eingebettet wird, ist in [1] und [3] gegeben. *Diese Behauptung gilt aber auch im Falle der Fläche vom Typus $\mathscr{P}^2_{0,3}$, welche die Bedingungen $h = 0$, $\beta \neq 0$ $\gamma \neq 0$,* (2), (10)–(15) *erfüllt, wenn man die Wilczynskischen Geraden nach* [6], S. 396 *und das Demoulinsche Vierseit nach der Definition aus Abschnitt* 2 *verallgemeinert.*

Beweis (nach J. Klapka): Für die beiden Geradenscharen von $\boldsymbol{D}$ gelten die Gleichungen (in lokalen Koordinaten)

$$(15_1)\qquad x^0 = \lambda \,.\, x^1, \qquad x^2 = \lambda \,.\, x^3,$$

$$(15_2)\qquad x^0 = \mu \,.\, x^2, \qquad x^1 = \mu \,.\, x^3;$$

λ, μ sind zugehörige Parameter.

Die Eckpunkte des verallgemeinerten Demoulinschen Vierseits haben die Koordinaten

$$x^0 = \varepsilon_0 \,.\, mn, \qquad x^1 = \varepsilon_1 \,.\, m, \qquad x^2 = \varepsilon_2 \,.\, n, \qquad x^3 = 1,$$

wobei

$$\varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_2^2 = 1, \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon_1\varepsilon_2, \qquad m = \sqrt{(a_3^0/\beta)}, \qquad n = \sqrt{(b_3^0/\gamma)}.$$

(In der Tat liegt die Gerade aus der ersten Geradenschar von $\boldsymbol{D}$ auf der Quadrik (7), wenn $x^1 : x^3 = \varepsilon_1 \,.\, \sqrt{(a_3^0/\beta)}$ und das analogische gilt für die Gerade der zweiten Geradenschar von $\boldsymbol{D}$, wenn $x^2 : x^3 = \varepsilon_2 \,.\, \sqrt{(b_3^0/\gamma)}$ gilt. Daraus ergeben sich schon die Koordinaten der Eckpunkte).

Die Diagonalen d_1, d_2 des Vierseits gehen also durch die Eckpunkte $M_1 = (mn, m, n, 1)$, $N_1 = (mn, -m, -n, 1)$ bzw. $M_2 = (-mn, -m, n, 1)$, $N_2 = (-mn, m, -n, 1)$. Die erste Direktrix A_0A_3 scheidet aber d_1 bzw. d_2 im Punkte $M_1 + N_1$ bzw. $M_2 + N_2$ und die zweite Direktrix A_1A_2 geht tatsächlich durch die Schnittpunkte $M_1 - N_1$, $M_2 - N_2$ der Diagonalen mit der Tangentialebene, so dass die Behauptung bewiesen ist.

LITERATUR

[1] Brejcha J., *Demoulinův čtyřstran a kanonické přímky v bodě plochy prostoru* S_3, Sborník Vysoké školy stavitelství v Brně *87* (1956), 41–47.

[2] Cenkl B., *La normale d'une surface dans l'espace à connexion projective*, Czech. Mat. Journ. *12* (1962), 582–608.

[3] Decuyper M., *Quadrilatère de Demoulin d'une surface*, Rend. Sem. Mat. Messina *1* (1955), 120–142.

[4] Щербаков Р. Н., *Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии*, Томск 1960.

[5] Švec A., *K výkladu teorie prostorů s konexí*, Čas. pěst. mat. *86* (1961), 425–432.

[6] Švec A., *Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective*, Czech. Mat. Journ. *11* (1961), 386–397.

Eingegangen am 26. 3. 1964.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Vysokého učení technického,
Brno

ЗАМЕТКА ОБ ОБОБЩЕНИИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА ДЕМУЛЕНА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ $\mathscr{P}^2_{0,3}$

Вацлав Гавел

Резюме

На поверхности $\mathscr{P}^2_{0,3}$ рассмотрены характеристики некоторой обобщенной квадрики Ли при смещении ее по асимптотике и получены условия для случая, когда эти характеристики составлены из двойной асимптотической касательной и дальнейших двух прямых. На этом основана конструкция обобщенного четырехугольника Демулена для поверхности $\mathscr{P}^2_{0,3}$.