MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 15 1965 ČÍSLO 3

ОБ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ПОЛУГРУППЫ И ИХ ОТНОШЕНИИ К УВЕЛИЧИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ПОЛУГРУППЫ

ИМРИХ ФАБРИЦИ (IMRICH FABRICI), Братислава

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] изучаются полугруппы, содержащие т. наз. обратимые элементы и полугруппы, содержащие т. наз. увеличительные элементы полугруппы, а также взаимоотношения этих элементов. Дэск (Desq) в [3] изучает строение таких полугрупп с односторонними единицами (значит, случай уже нашего) и в теореме 1 дает разложение такой полугруппы.

Цель настоящей заметки — характеризировать некоторым способом строение таких полугрупп, которые содержат обратимые элементы, а также строение таких полугрупп, которые содержат увеличительные элементы.

Приведем теперь некоторые понятия и утверждения из [2] и [5]. Понятием максимального идеала мы пользуемся согласно [2]. Чтобы упростить рассуждения, мы будем и пустое множество считать идеалом и подполугруппой всякой полугруппы. Если в полугруппе S существует единственный максимальный собственный правый идеал, то мы обозначаем его через R^*, в случае левого идеала — через L^*, а в случае двустороннего — через M^*. Если A — собственное подмножество S, то мы будем это обозначать через $A \subset S$, в отличие от $A \subseteq S$. Элемент x полугруппы S называется вполне максимальным, если $SxS = S$. Если полугруппа S имеет хотя бы один вполне максимальный элемент и не является простой полугруппой, то S содержит единственный максимальный двусторонний собственный идеал M^*, и дополнение $S - M^*$ является множеством всех вполне максимальных элементов ([5], теорема 1).

2.

В этом разделе мы будем изучать строение полугрупп, содержащих т. наз. обратимые элементы.

Определение 2.1 [1]. *Элемент x полугруппы S называется обратимым справа (соответственно, обратимым слева и двусторонне обратимым), если $xS = S$ (соответственно, $Sx = S$ и $xSx = S$).*

В работе нами используются сведения об обратимых элементах, вывод которых дается в VI главе книги [1].

В дальнейшем через $\mathscr{K}$ мы будем обозначать множество всех элементов полугруппы S, необратимых ни справа, ни слева, через $\mathscr{L}$ мы будем обозначать множество всех элементов полугруппы S, обратимых слева, но необратимых справа, через $\mathscr{R}$ — множество всех элементов полугруппы S, обратимых справа, но необратимых слева, а через $\mathscr{G}$ — множество всех двусторонне обратимых элементов полугруппы S.

Очевидно, имеет место соотношение

$$S = \mathscr{K} \cup \mathscr{L} \cup \mathscr{R} \cup \mathscr{G},$$

где множества, фигурирующие на правой стороне, попарно не пересекаются, причем некоторые из них могут быть и пустым множеством.

Теорема 2.1а. *Если в полугруппе S существует хотя бы один элемент обратимый справа,* то *S содержит единственный максимальный правый собственный идеал R^*, и дополнение этого идеала есть множество всех элементов обратимых справа.*

Доказательство. Очевидно, никакой собственный правый идеал не может содержать элемента обратимого справа. Поэтому достаточно доказать, что $P = \mathscr{L} \cup \mathscr{K}$ (множество всех элементов необратимых справа) является правым идеалом полугруппы S, т. е. что $PS \subseteq P$. Если $x \in PS$, то $x = ys$, где $y \in P$ (т. е. $yS \subset S$), $s \in S$. Поэтому $xS = (ys)S = y(sS) \subseteq yS \subset S$, так что $x \in P$. Значит, $P = R^*$, так что

$$S = R^* \cup \mathscr{R} \cup \mathscr{G}.$$

Аналогично доказывается и

Теорема 2.1б. *Если в полугруппе S существует хотя бы один элемент обратимый слева, то S содержит единственный максимальный собственный левый идеал L^*, и дополнение этого идеала есть множество всех элементов обратимых слева:*

$$S = L^* \cup \mathscr{L} \cup \mathscr{G}.$$

Ни в теореме 2.1а, ни в теореме 2.1б не требовалось существования двусторонне обратимых элементов, т. е. множество $\mathscr{G}$ могло быть и пустым.

О том, как обстоит дело в случае, когда в S существуют двусторонне обратимые элементы, говорит следующая теорема. Но сначала мы приведем.

Лемму 2.1. *Если элемент x обратим слева или справа, то он вполне максимален.*

Доказательство. Докажем утверждение для элементов обратимых справа. Для элементов обратимых слева можно поступать аналогичным образом.

Пусть x — элемент обратимый справа, значит, $xS = S$. Отсюда $SxS = SS \supseteq xS = S$, значит, $SxS = S$.

Теорема 2.2. *Если в полугруппе S существует хотя бы один двусторонне обратимый элемент, то S содержит единственный максимальный собственный правый идеал R^*, единственный максимальный собственный левый идеал L^* и единственный максимальный собственный двусторонний идеал M^*, для которого выполняется:*

$$M^* \subseteq R^* \cap L^*.$$

Доказательство. Существование единственного максимального собственного правого и единственного максимального собственного левого идеала вытекает из теоремы 2.1а и из теоремы 2.1б. Из леммы 2.1 мы знаем, что всякий обратимый справа и слева элемент вполне максимален. Из [5] известно, что если S содержит хотя бы один вполне максимальный элемент, то S имеет единственный максимальный собственный идеал M^*. Двусторонний максимальный собственный идеал M^* должен в качестве правого содержаться в R^*, а в качестве левого — в L^*. Значит, $M^* \subseteq R^*$, $M^* \subseteq L^*$. Отсюда

$$M^* \subseteq R^* \cap L^*.$$

Непосредственно из теорем 2.1а, 2.1б и 2.2 получается следствие, которое мы сформулируем в теореме.

Теорема 2.3. **а)** *Если полугруппа S имеет более одного максимального собственного правого идеала, то она не может содержать элементов обратимых справа.*

б) *Если полугруппа S имеет более одного максимального собственного левого идеала, то она не может содержать элементов обратимых слева.*

в) *Если полугруппа S имеет более одного двустороннего максимального собственного идеала, то S не может содержать ни справа, ни слева, ни двусторонне обратимых элементов.*

Доказательство. Утверждения а), б) вытекают непосредственно из теорем 2.1а, 2.1б. Пусть теперь полугруппа S имеет более одного двусторонного максимального собственного идеала и пусть она имеет, например, элементы обратимые слева. Пусть x — один такой элемент. Из леммы 2.1 мы знаем, что x вполне максимален. Из [5] известно, что если полугруппа содержит хотя бы один вполне максимальный элемент, то S имеет единственный максимальный собственный двусторонний идеал, что противоречит нашему допущению. Если бы S имела элементы обратимые справа, то мы поступали бы точно так же.

На простых примерах можно показать, что утверждения, обратные к утверждениям теорем 2.1а, 2.1б и 2.2, не имеют места: Если S содержит единственный максимальный собственный правый (соответственно, левый и двусторонний) идеал, то полугруппа S может и не содержать элементов справа (соответственно, слева и двусторонне) обратимых.

Правда, здесь имеет место теорема из [2], относящаяся к односторонним идеалам: Если полугруппа S содержит единственный максимальный правый собственный идеал R^* и $S—R^*$ содержит более одного элемента, то $S—R^*$ есть полугруппа и для всякого $x \in S—R^*$ имеет место $xS = S$, т. е. x является элементом обратимым справа. Аналогичная теорема имеет место и для единственного максимального собственного левого идеала L^*.

На простом примере мы покажем, что аналогичная теорема для единственного максимального собственного двустороннего идеала не имеет места.

Пример 1. Пусть $S = \{a, b, c, d\}$. Умножение задается следующей таблицей умножения:

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	d
c	c	c	c	c
d	a	d	a	b

Единственным максимальным двусторонним собственным идеалом является $M^* = \{a, c\}$. $S - M^*$ содержит более одного элемента, но, например, для $b \in S - M^*$ имеем $bS = \{a, b, d\} \neq S$, так что b не является обратимым справа, а значит, не является и двусторонне обратимым элементом.

Однако, справедлива следующая.

Теорема 2.4. *Пусть в полугруппе S существует L^* и R^*. Пусть $L^* = R^*$ и пусть $S - L^* = S - R^*$ содержит более одного элемента. Тогда существует и $M^* = L^*$ и каждый элемент из $S - L^*$ двусторонне обратим.*

Доказательство. Из условий теоремы очевидно, что $M^* = L^* = R^*$ является максимальным собственным двусторонним идеалом полугруп-

пы S. В самом деле, если бы существовал такой двусторонний идеал M' что $M^* \subset M'$ то M' в силу того, что он является двусторонним, был бы левым и правым идеалом, а тогда L^* и R^* не были бы максимальными, что противоречит допущению. Далее, $S - L^*$ содержит более одного элемента. Значит, для каждого элемента $x \in S - L^*$ имеет место $Sx = S$ и $xS = S$ (так как $L^* = R^*$), следовательно, всякий элемент из $S - L^*$ обратим слева и справа, а значит, и двусторонне обратим.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы, тогда полугруппа обладает единицей.*

Доказательство. Множество всех двусторонне обратимых элементов полугруппы S, если оно непусто, образует группу и единица этой группы является единицей всей полугруппы ([1], стр. 300).

3.

В этом разделе мы будем изучать отношение обратимых элементов к т. наз. увеличительным элементам полугруппы, введенным Ляпиным, и характеризовать строение полугрупп, содержащих увеличительные элементы, способом, отличным от способа в [1]. Воробьев в [4] тоже изучает строение, в частности, полугрупп, содержащих увеличительные элементы, и в теореме 9 он характеризует их определенным образом (для случая, когда полугруппа удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов).

Определение 3.1. а) *Элемент x полугруппы S называется правым увеличительным элементом полугруппы S, если в S существует такое собственное подмножество S', что $S'x = S$ ($S' \subset S$).*

б) *Элемент y полугруппы S называется левым увеличительным элементом полугруппы S, если в S существует такое собственное подмножество S'', что $yS'' = S$ ($S'' \subset S$).*

Чтобы избежать лишних ссылок, приведем некоторые понятия и свойства из [1]: Никакой элемент полугруппы S не может быть одновременно и правым увеличительным и левым увеличительным элементом. Если через $S^{(r)}$ (соответственно, через $S^{(l)}$ и $S^{(n)}$) обозначить множество всех элементов полугруппы S, которые являются правыми (соответственно, левыми, соответственно, ни правыми ни левыми) увеличительными элементами полугруппы S, то справедливо: S является объединением попарно непересекающихся подполугрупп (некоторые из них могут быть и пустым множеством) $S^{(r)}$, $S^{(l)}$ и $S^{(n)}$.

Для наших дальнейших рассуждений об увеличительных элементах большое значение будут иметь следующие леммы из [1].

Лемма 3.1. а) *Всякий правый увеличительный элемент полугруппы S обратим слева и необратим справа.*

б) *Всякий левый увеличительный элемент полугруппы S обратим справа и необратим слева.*

Обратное утверждение в общем случае места не имеет. Но известна следующая.

Лемма 3.2. *Пусть S — полугруппа с единицей. Тогда*

а) *правые увеличительные элементы, и только они, обратимы слева и необратимы справа,*

б) *левые увеличительные элементы, и только они, обратимы справа и необратимы слева.*

На основании леммы 3.1 мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 3.1а. *Пусть в полугруппе S существует хотя бы один правый увеличительный элемент полугруппы S. Тогда полугруппа S содержит единственный максимальный собственный левый идеал L^*, и дополнение этого идеала является объединением двух подполугрупп, одной из которых является $S^{(r)}$, а второй — $(\mathscr{L} - S^{(r)})$, если S не имеет единицы, и $\mathscr{G}$, если S имеет единицу. Значит:*

$$S = L^* \cup (\mathscr{L} - S^{(r)}) \cup S^{(r)}, \quad \text{или} \quad S = L^* \cup S^{(r)} \cup \mathscr{G}.$$

Доказательство. Из леммы 3.1 и из теоремы 2.1б вытекает существование единственного максимального собственного левого идеала. Полугруппу можно записать в виде:

$$S = L^* \cup \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$$

Теперь будем различать два случая. Если полугруппа не имеет единицы, то $\mathscr{G}$ — пустое множество. Правда, тогда не всякий элемент обратимый слева обязан быть правым увеличительным, т. е. $(\mathscr{L} - S^{(r)})$ может быть и непустым множеством. То, что $S^{(r)}$ является полугруппой, мы знаем из введения. Нужно еще показать, что и $(\mathscr{L} - S^{(r)})$ является полугруппой. Пусть $x, y \in (\mathscr{L} - S^{(r)})$. Значит, ни x, ни y не является правым увеличительным элементом. Предположим, что $xy \in S^{(r)}$. Тогда существует некоторое собственное подмножество $A' \subset S$ такое, что $A'xy = S$. Но поскольку $x \bar{\in} S^{(r)}$, то имеет место $A'x = A'' \neq S$; $A''y = A'xy = S$, $A'' \neq S$. Последнее соотношение противоречит допущению, так как $y \bar{\in} S^{(r)}$. Значит, xy должно принадлежать $(\mathscr{L} - S^{(r)})$.

Если полугруппа обладает единицей, то согласно лемме 3.2 имеет место и обратное: всякий элемент обратимый слева, который необратим справа, является правым увеличительным. Значит, $\mathscr{L} = S^{(r)}$. Правда, тогда справедливо:

$$S = L^* \cup \mathscr{L} \cup \mathscr{G} = L^* \cup S^{(r)} \cup \mathscr{G}$$

Из [1] мы знаем, что $\mathscr{L}$, $\mathscr{G}$, а также их объединение образуют полугруппы.

Аналогично доказывается и

Теорема 3.1б. *Пусть в полугруппе S существует хотя бы один левый увеличительный элемент полугруппы S. Тогда полугруппа S содержит единственный правый максимальный собственный идеал R^*, и дополнение этого идеала является объединением двух подполугрупп, одной из которых является $S^{(l)}$, а второй — $(\mathscr{R} - S^{(l)})$, если S не имеет единицы, и $\mathscr{G}$, если S имеет единицу. Значит,*

$$S = R^* \cup S^{(l)} \cup (\mathscr{R} - S^{(l)}), \quad \text{или} \quad S = R^* \cup S^{(l)} \cup \mathscr{G}.$$

Теорема 3.2. а) *Если полугруппа S содержит более одного максимального собственного левого идеала, то S не может содержать правых увеличительных элементов.*

б) *Если полугруппа S имеет более одного максимального собственного правого идеала, то S не может содержать левых увеличительных элементов.*

в) *Если полугруппа S имеет более одного максимального собственного двустороннего идеала, то S не может содержать ни правых, ни левых увеличительных элементов.*

Доказательство. Утверждения а), б) вытекают из теорем 3.1а, 3.1б. Докажем в): Если бы S содержала, например, правый увеличительный элемент x, то имело бы место $SxS \supseteq (Sx)x = Sx = S$, т. е. x был бы вполне максимальным, так что S содержала бы согласно [5] единственный максимальный собственный двусторонний идеал.

Примечание 3. Из доказательства пункта в) теоремы 3.2 вытекает, что в случае, когда полугруппа S содержит правые увеличительные элементы, она содержит не только единственный максимальный собственный левый идеал L^*, но и единственный максимальный собственный двусторонний идеал M^*. Аналогичное утверждение мы получим и для случая, когда в полугруппе S существуют левые увеличительные элементы полугруппы S.

Примечание 4. Если в полугруппе S существуют, например, правые увеличительные элементы полугруппы S, то, вообще говоря, это еще не влечет за собой существование левых увеличительных элементов полугруппы S ([1], стр. 178). Но из [1] известно, что если полугруппа S обладает единицей и если в ней существуют правые увеличительные элементы полугруппы S, то существуют и левые, и наоборот.

Из примечания 3, примечания 4, а также из теоремы 2.2 вытекает:

Теорема 3.3. *Пусть в полугруппе S с единицей существуют либо правые увеличительные, либо левые увеличительные элементы полугруппы S. Тогда в полугруппе S существуют L^*, R^* и M^*, и для M^* справедливо:*

$$M^* \subseteq L^* \cap R^*.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Москва 1960.

[2] Шварц Ш., *О максимальных идеалах в теории полугрупп I*, Чехослов. матем. журнал *3* (*73*) (1953), 139—153.

[3] Desq R., *Sur les demi-groupes ayant des éléments unités d'un côté*, Comptes rendus Paris *256* (1963), 567—569.

[4] Воробьев Н. Н., *Об идеалах ассоциативных систем*, Доклады АН СССР *83* (1952), 641—643.

[5] Fabrici I., *O úplne maximálnych prvkoch v pologrupách*, Mat.-fyz. časopis *13* (1963), 16—19.

Поступило 21. 11. 1963.

Katedra matematiky Chemickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

ON INVERTIBLE ELEMENTS OF A SEMIGROUP, AND THEIR RELATION TO INCREASING ELEMENTS OF A SEMIGROUP

Imrich Fabrici

Summary

An element x of a semigroup S is called right (left, two-sided) invertible, if $xS = S$ ($Sx = S$, $xSx = S$, respectively). Let $\mathscr{L}$ be the set of all elements of a semigroup S which are left invertible and which are not right invertible; let $\mathscr{R}$ be the set of all elements which are right invertible and which are not left invertible, and finally, let $\mathscr{G}$ be the set of all elements two-si-ded invertible.

In the paper, the following theorems are proved:

1. If in a semigroup S there exists at least one right invertible element, then S contains the unique maximal proper right ideal R^*, and a complement of this ideal is a set $\mathscr{R} \cup \mathscr{G}$ of all right invertible elements.

2. If in a semigroup S there exists at least one two-sided invertible element, then S contains the unique maximal proper right ideal R^*, the unique maximal proper left ideal L^*, and the unique maximal proper two-sided ideal M^*, for which we have: $M^* \subseteq R^* \cap L^*$.

3. If a semigroup S contains more than one maximal proper right (left) ideal, then it cannot contain right (left, respectively) invertible elements.

If a semigroup S contains more than one two-sided maximal proper ideal, then S contains neither left, nor right, nor two-sided invertible elements.

In the second part the relation of invertible elements to increasing elements of a semigroup is investigated.

An element x of a semigroup S is called a right (left) increasing element of the semigroup S, if in S there exists such a proper subset S', that $S'x = S$ ($xS' = S$, respectively).

Let $S^{(r)}$ ($S^{(l)}$, $S^{(n)}$) be the set of all elements of a semigroup S, which are right (left, neither left nor right, respectively) increasing elements of the semigroup S. Each of these subsets is a subsemigroup or an empty set.

As regards increasing elements the following theorems are proved:

1. If in a semigroup S there exists at least one right increasing element of a semigroup S, then S contains the unique maximal proper left ideal L^* and the complement of this ideal is the union of two subsemigroups, of which one is $S^{(r)}$ and the second ($\mathscr{L} - S^{(r)}$), if S does not contain the unit, and $\mathscr{G}$, if S contains it.

2. If a semigroup S contain more than one maximal proper left (right) ideal, then S cannot contain right (left, respectively) increasing elements.

If a semigroup S contains more than one maximal proper two-sided ideal, then S can contain neither right, nor left increasing elements.

3. If a semigroup S with the unit contains either right, or left increasing elements, then the semigroup S contanis L^*, R^*, and M^*, and for M^* we have: $M^* \subseteq R^* \cap L^*$.