MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 15 1965 ČÍSLO 2

ИЗУЧЕНИЕ СТРОЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ ПОРЯДКА n НАД ЗАДАННЫМ ПОЛЕМ

ФРАНТИШЕК КРНЯН (FRANTIŠEK KRŇAN), Братислава

Цель работы состоит в указании преимуществ, которые дает некоторое разложение матрицы — мы называем его ,,допустимым'' разложением — для изучения полугруппы квадратных матриц порядка n над заданным полем. Эту полугруппу мы будем обозначать через $S(n)$ без того, чтобы выписывать ,,над заданным полем''. Под допустимым разложением понимается разложение матрицы типа m/n и ранга $r \neq 0$ в произведение двух матриц L, M, из которых левый сомножитель (матрица L) — типа m/r, правый сомножитель (матрица M) — типа r/n, причем обе матрицы L, M имеют максимально возможный ранг r, т. е. все столбцы (строки) матрицы L (матрицы M) линейно независимы.

I

Теорема 1.1. *Всякую матрицу A типа m/n и ранга $r \neq 0$ можно разложить в произведение вида*

$$A = LM, \tag{1}$$

где L, M — матрицы соответственно типа m/r и r/n и ранга r. Заданием матрицы A и одного из сомножителей ее допустимого разложения (1) второй сомножитель разложения (1) определяется однозначно.

Если $A = LM$, $A = L'M'$ — два допустимых разложения матрицы A, то существует такая регулярная матрица R порядка r, что $M' = RM$ и $L' = LR^{-1}$.

Содержание теоремы известно, см., например, [6]. Я привожу ее для удобства читателя.

Согласно теореме 1.1 всякое разложение матрицы A вида (1) мы получим из некоторого ее допустимого разложения $A = LM$ так, что матрицу M

заменим на матрицу RM, матрицу L — на матрицу LR^{-1}, где R — некоторая квадратная регулярная (= неособая) матрица порядка r.

Мы будем употреблять следующее обозначение: $S(m/n)$ — множество всех матриц типа m/n. $S(m/n; r)$ — множество всех матриц из $S(m/n)$ ранга r. $I(m/n; r)$ — множество всех матриц из $S(m/n)$ ранга не больше r. Если $m = n$, то вместо m/n будем писать только n, т. е. $S(n)$, $S(n; r)$, $I(n; r)$.

В множестве $S(m/n)$ введем понятия: подобность слева, подобность справа.

Определение 1.1. *а) Будем говорить, что матрица $A \in S(m/n; r)$ слева подобна матрице $A' \in S(m/n; r')$, если существует такая матрица $P \in S(n; n)$, что $A' = AP$.*

б) Будем говорить, что матрица $B \in S(m/n; r)$ справа подобна матрице $B' \in S(m/n; r')$, если существует такая матрица $Q \in S(m; m)$ что $B' = QB$.

Определенные отношения будем записывать так:

$$\text{а)}\quad A' \underset{(l)}{\sim} A, \qquad\qquad \text{б)}\quad B' \underset{(p)}{\sim} B.$$

Легко доказывается, что слева (справа) подобные матрицы имеют одинаковый ранг ($r = r'$).

Легко доказывается, что определенные отношения являются отношениями эквивалентности в каждом множестве $S(m/n; r)$, $r \neq 0$.

Соотношение $\underset{(l)}{\sim}$ разбивает систему $S(m/n; r)$, $r \neq 0$ на непересекающиеся классы (обозначим их через $L_i(m/n; r)$ слева подобных матриц ранга r; $i \in J$, J — множество индексов.

Соотношение $\underset{(p)}{\sim}$ разбивает систему $S(m/n; r)$, $r \neq 0$ на непересекающиеся классы (обозначим их через $M_\lambda(m/n; r)$ справа подобных матриц ранга r, $\lambda \in \Lambda$, Λ — множество индексов.

Особенно важную роль для дальнейших рассуждений играют классы матриц $L_i(m/r; r)$, $M_\lambda(r/n; r)$, содержащие множество левых (правых) сомножителей допустимого разложения матрицы $A \in S(m/n; r)$.

Определение 1.2. *Пусть A, $A' \in S(m/n; r)$, $A = LM$, $A' = L'M'$ — допустимые разложения матриц A, A'. Будем говорить, что матрица A' находится в отношении $\underset{(s)}{\sim}$ с матрицей A и записывать $A' \underset{(s)}{\sim} A$, если*

$$L' \underset{(l)}{\sim} L \quad \textit{и одновременно} \quad M' \underset{(p)}{\sim} M.$$

Отношение $\underset{(s)}{\sim}$ в системе $S(m/n; r)$, где $r \neq 0$, также является эквивалентностью. Это непосредственно вытекает из того, что отношение $\underset{(l)}{\sim}$

является эквивалентностью в системе $S(m/r; r)$ и отношение $\underset{(p)}{\sim}$ является эквивалентностью в системе $S(r/n; r)$.

Отношение $\underset{(s)}{\sim}$ разбивает систему $S(m/n; r)$ на непересекающиеся классы матриц.

Определение 1.3. *Непересекающиеся классы системы $S(m/n; r)$, образованные соотношением $\underset{(s)}{\sim}$, назовем s-классами. Через $S_{i\lambda}$ обозначим s-класс, содержащий те матрицы $A = LM \in S(m/n; r)$, для которых $L \in L_i(m/r; r)$, $M \in M_\lambda(r/n; r)$.*

Примечание 1.1. Пусть $A = LM$ — произвольное фиксированное разложение произвольной матрицы $A \in S_{i\lambda}$. Пусть A^* — любая матрица из того же s-класса $S_{i\lambda}$. Пусть $A^* = L^*M^*$, $A^* = L'M'$ — произвольные ее допустимые разложения. Согласно теореме 1.1

$$L' = L^*R^{-1}, \qquad M' = RM^*.$$

Дальше, а) $L^* = LQ, \quad M^* = PM,$

б) $L' = L^*R^{-1} = LQR^{-1}, \quad M' = RM^* = RPM.$

Значит, а) $A^* = L^*M^* = LQPM,$

б) $A^* = L'M' = LQR^{-1}RPM = LQPM.$

Обозначим $QP = S_{A^*}$. Значит, некоторое фиксированное разложение $A = LM$ выбранной матрицы $A \in S_{i\lambda}$ ставит всякой матрице $A^* \in S_{i\lambda}$ однозначно в соответствие такую матрицу $S_{A^*} \in S(r; r)$, $S_{A^*} = QP$ (Q, $P \in S(r; r)$), что $A^* = LS_{A^*}M$. В частности, если $A^* = A$, то $S_A = E_r$ (E_r — единичная матрица порядка r).

Кратко говоря: Если выбрать некоторую матрицу $A \in S_{i\lambda}$ в качестве представителя s-класса и некоторое ее допустимое разложение $A = LM$, то всякую матрицу $A^* \in S_{i\lambda}$ можно записать в виде $A = LS_{A^*}M$, где $S_{A^*} \in S(r; r)$. Значит, при данном выборе допустимого разложения матрицы $A \in S_{i\lambda}$ существует взаимнооднозначное отображение s-класса на множество $S(r; r)$.

Всякую матрицу s-класса можно таким образом сделать производящей матрицей s-класса.

Будем говорить, что матрицы s-класса образуем из данной матрицы ,,внутренним'' умножением на регулярную матрицу.

Результаты раздела I сведем в следующую теорему:

Теорема 1.2. *Отношение $\underset{(s)}{\sim}$ определяет разложение системы $S(m/n; r)$, $r \neq 0$, на непересекающиеся s-классы. Пусть $A = LM$ — допустимое разложение матрицы $A \in S_{i\lambda}(m/n; r)$. Для произвольной матрицы $X \in S_{i\lambda}(m/n; r)$ существует одна и только одна матрица $R_X \in S(r; r)$ такая, что $X = LR_XM$. Наоборот, если $R \in S(r; r)$, то $LRM \in S_{i\lambda}(m/n; r)$.*

II

В разделе II мы изучаем строение полугруппы квадратных матриц порядка n. В множестве $S(n; r)$ введем понятие присоединенной матрицы.

Определение 2.1. *Матрица B называется присоединенной к матрице A, если существует такое допустимое разложение $A = LM$ матрицы A, что $B = ML$.*[1]

Примечание 2.1. Определение 2.1 не определяет присоединенную матрицу однозначно. В самом деле, если матрицу A записать в виде другого произведения

$$A = L'M' = (LR)(R^{-1}M),$$

то имеет место

$$M'L' = R^{-1}MLR = R^{-1}BR = B'.$$

Значит, при переходе от представления матрицы A в виде LM к представлению ее в виде $L'M' = (LR)(R^{-1}M)$ присоединенная матрица B преобразуется в подобную матрицу в обычном смысле. Подобные матрицы имеют один и тот же ранг. Следовательно, ранг присоединенной матрицы не зависит от выбора разложения матрицы A.

Примечание 2.2. Если $A \in S(n; r)$, $r < n$, то присоединенная к ней матрица $B \in S(r)$, значит, не из $S(n)$.

Введем дальнейшие понятия:

Определение 2.2. *Будем говорить, что класс $S_{i\lambda}(n; r)$ имеет дефект d, если ранг матрицы B, присоединенной к матрице $A \in S_{i\lambda}(n; r)$, равен $r - d$; s-класс $S_{i\lambda}(n; r)$ с дефектом $d = 0$ мы будем называть регулярным s-классом ранга r; s-класс с дефектом $d > 0$ будем называть сингулярным s-классом ранга r.*

Примечание 2.3. Дефект s-класса характеризует s-класс. Всякая матрица данного s-класса имеет один и тот же дефект. Доказательство этого утверждения очевидно.

При определении групп в данной полугруппе важно определение идемпотентов полугруппы. Мы докажем, что только в регулярном s-классе существует идемпотент, а именно, в каждом регулярном s-классе существует одна и только одна идемпотентная матрица.

Имеет место теорема:

Теорема 2.1. *Для того, чтобы матрица $A \in S(n; r)$ $(r \neq 0)$ была идемпотентной, необходимо и достаточно, чтобы единичная матрица E_r порядка была присоединенной матрицей к матрице A. В этом случае присоединенная матрица к матрице A определена однозначно.*

[1] Определением 2.1 понятие присоединенной матрицы вводится в смысле, отличном от обычно принятого.

Доказательство.

1. Пусть $A = LM$ — допустимое разложение матрицы A, пусть $B = ML = E_r$.

Тогда $A^2 = LMLM = LM = A$.

2. Пусть $A^2 = A$, т. е.

$$LMLM = LM. \tag{1}$$

Если выполняется (1), то матрица $B = ML$ необходимо регулярна. Согласно теореме 1.1 из (1) получаем

$$\text{и } (ML)M = M, \quad \text{и } L(ML) = L. \tag{2}$$

Но из соотношений (2) вытекает $B = ML = E_r$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает: Идемпотентная матрица ранга r может существовать только в регулярном s-классе ранга r. Мы докажем

Теорему 2.2. *Во всяком регулярном s-классе ранга r существует одна и только одна идемпотентная матрица.*

Доказательство. Пусть $A = LM$ — произвольная матрица из регулярного s-класса ранга r. Образуем матрицу B^{-1}, обратную к матрице $B = ML$. Матрица $A_0 = LB^{-1}M$ идемпотентна, так как

$$A_0^2 = LB^{-1}MLB^{-1}M = LB^{-1}M = A_0.$$

Значит, в регулярном s-классе мы нашли идемпотентную матрицу.

Пусть A_0, A_0' — две идемпотентные матрицы из регулярного s-класса, т. е. $A_0 = L_0M_0$, $M_0L_0 = E_r$, $A_0' = L_0'M_0'$, $M_0'L_0' = E_r$. Из наших допущений вытекает: существуют такие регулярные матрицы P, Q порядка r, что $L_0' = L_0P$, $M_0' = QM_0$. Далее,

$$M_0'L_0' = QM_0L_0P = QP = E_r, \quad \text{т. е. } Q = P^{-1}.$$

Тогда

$$A_0' = L_0PP^{-1}M_0 = L_0M_0 = A_0, \quad \text{т. е. } A_0' = A_0.$$

Теорема 2.2 доказана.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.3. *Всякий регулярный s-класс ранга r есть группа, изоморфная группе всех регулярных матриц порядка r над одним и тем же полем.*

Доказательство. Пусть $A_0 = L_0M_0$ — идемпотент из регулярного s-класса ранга r.

1. Если $A_1, A_2 \in S_{i\lambda}(n; r)$, то

$$A_1A_2 = L_0S_{A_1}M_0L_0S_{A_2}M_0 = L_0S_{A_1}S_{A_2}M_0.$$

S_{A_1}, S_{A_2} — однозначно определенные регулярные матрицы порядка r. Значит, $A_1A_2 \in S_{i\lambda}(n; r)$, причем $S_{A_1A_2} = S_{A_1}S_{A_2}$. Мы установили, что всякий регулярный s-класс есть полугруппа.

2. Для всякой матрицы $A \in S_{i\lambda}(n; r)$

$$AA_0 = (L_0S_AM_0)(L_0M_0) = L_0S_AM_0 = A,$$
$$A_0A = (L_0M_0)(L_0S_AM_0) = L_0S_AM_0 = A.$$

Следовательно, A_0 есть единица в полугруппе $S_{i\lambda}(n; r)$.

3. Обозначим $A' = L_0S_A^{-1}M_0$. Имеет место

$$AA' = L_0S_AM_0L_0S_A^{-1}M_0 = L_0S_AS_A^{-1}M_0 = A_0,$$
$$A'A = L_0S_A^{-1}M_0L_0S_AM_0 = L_0S_A^{-1}S_AM_0 = A_0.$$

Значит, в полугруппе $S_{i\lambda}(n; r)$ с единицей A_0 для каждого элемента $A = L_0S_AM_0$ существует обратный элемент $A' = A^{-1} = L_0S_A^{-1}M_0$.

Таким образом, мы доказали, что регулярный s-класс ранга r есть группа.

Так как всякой матрице A из регулярного s-класса $S_{i\lambda}(n; r)$ ранга r с идемпотентом $A_0 = L_0M_0$ соответствует однозначно определенная матрица $S_A \in S(r; r)$, удовлетворяющая равенству $A = L_0S_AM_0$, то соответствие $A \leftrightarrow S_A$ является, очевидно, изоморфизмом.

Имеет место

Теорема 2.4. *Всякий регулярный s-класс $S_{i\lambda}(n; r)$ есть максимальная группа в полугруппе $S(n)$.*

Доказательство. Обозначим максимальную группу, содержащую ту же единицу $A_0 = L_0M_0$, что и группа $S_{i\lambda}(n; r)$, через $\tilde{S}_{i\lambda}(n)$. Очевидно, $\tilde{S}_{i\lambda}(n) \supseteq S_{i\lambda}(n; r)$. Нужно доказать, что группа $S_{i\lambda}(n; r)$ не может быть расширена присоединением к ней дальнейшего элемента из $S(n)$. Очевидно,

1. для матрицы A_1 ранга $r_1 > r$ матрица $A_0 = L_0M_0$ не является единицей;

2. для матрицы A_2 ранга $r_2 < r$ не существует в $S(n)$ такой матрицы A_2', чтобы выполнялось $A_2A_2' = A_0$.

Остается доказать, что к $\tilde{S}_{i\lambda}(n)$ не может принадлежать матрица из s-класса $S_{i'\lambda'}(n; r)$; $(i', \lambda') \neq (i, \lambda)$.

Допустим, что матрица $A^* = L^*M^* \in S_{i',\lambda'}(n; r)$ принадлежит $\tilde{S}_{i\lambda}(n)$. Тогда необходимо выполняется

$$A_0A^* = (L_0M_0)(L^*M^*) = (L^*M^*)(L_0M_0) = A^*A_0 = A^*.$$

Для этого необходимо, чтобы обе матрицы $M_0L^* = B_1$, $M^*L_0 = B_2$ были регулярными. Далее,

$$A^* = L_0B_1M^* \in S_{i\lambda'}(n; r),$$
$$A^* = L^*B_2M_0 \in S_{i'\lambda}(n; r).$$

Но это означает, что $(i, \lambda') = (i', \lambda) = (i', \lambda')$, т. е. $(i', \lambda') = (i, \lambda)$, а это противоречит предположению. Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Если s-классы $S_{i\lambda}(n; r)$, $S_{j\mu}(n; r)$ являются группами, то эти группы изоморфны.*

Доказательство. Пусть L_iM_λ, L_jM_μ — единицы групп $S_{i\lambda}(n; r)$ $S_{j\mu}(n; r)$. Всякая матрица $A \in S_{i\lambda}(n; r)$ имеет вид $A = L_iS_AM_\lambda$, а всякая матрица $A' \in S_{j\mu}(n; r)$ имеет вид $A' = L_jS_{A'}M_\mu$. Регулярные матрицы S_A, $S_{A'}$ определены согласно примечанию 1.1 однозначно. Легко проверить, что соответсвие $A \leftrightarrow A'$, если $S_A = S_{A'}$, является изоморфизмом.

Примечание 2.4. Легко установить, принадлежит ли некоторая матрица $A \in S(n; r)$ некоторой максимальной группе. Достаточно для этого образовать ее допустимое разложение $A = LM$ и найти присоединенную матрицу $B = ML$. Матрица A принадлежит некоторой максимальной группе тогда и только тогда, когда матрица B регулярна. Если A принадлежит некоторой максимальной группе, то единицей этой группы является идемпотент $A_0 = LB^{-1}M$.

Использованный метод — исследование матриц в виде допустимого разложения $A = LM$ — позволяет сравнительно просто доказать ряд интересных теорем о произведениях s-классов одного и того же ранга r, а также о произведениях s-классов разных рангов. Оказывается, что:

1. Для того, чтобы произведение s-классов $S_{i\lambda}(n; r)$, $S_{j\mu}(n; r)$ было группой, необходимо и достаточно, чтобы оба s-класса $S_{i\mu}(n; r)$, $S_{j\lambda}(n; r)$ были регулярными, т. е. группами. (В этом случае рассматриваемое произведение равно $S_{i\mu}(n; r)$.)

Необходимость условия очевидна, достаточность же легко доказывается. Умножаемые друг на друга s-классы $S_{i\lambda}(n; r)$, $S_{j\mu}(n; r)$

либо а) оба регулярны (т. е. группы),

либо б) оба сингулярны,

либо в) один из них — регулярный (группа), другой — сингулярный.

Если произведение двух регулярных s-классов $S_{i\lambda}(n; r)$, $S_{j\mu}(n; r)$ есть группа, т. е. если $S_{i\lambda}(n; r)S_{j\mu}(n; r) = S_{i\mu}(n; r)$ — регулярный s-класс, то и $S_{j\mu}(n; r)S_{i\lambda}(n; r)$ — регулярный s-класс.

Произведение единиц умножаемых групп является единицей произведения этих групп. Значит, в этом случае произведение идемпотентов из $S(n)$ есть идемпотент. Произведение двух групп ранга r может быть также сингулярным s-классом, в котором не существует идемпотента. В этом случае произведение идемпотентов из $S(n)$ — единиц умножаемых групп — не является идемпотентом. И наоборот, произведение не идемпотентных матриц может быть идемпотентной матрицей; произведение идемпотентной и не идемпотентной матрицы может быть идемпотентной матрицей.

2. Пусть $S_{i\lambda}(n; r)$ — фиксированный s-класс, $S_{j\mu}(n; r)$, $j \in J$, μ фиксированное — элемент из системы тех s-классов, для которых произведение $S_{i\lambda}(n; r) S_{j\mu}(n; r) = S_{i\mu}(n; r)$ является группой. Об этой системе будем говорить, что это система „допустимых" s-классов. Пусть $A = L_i S_A M_\lambda \in S_{i\lambda}(n; r)$, $C = L_i S_C M_\mu \in S_{i\mu}(n; r)$ — произвольные матрицы. Тогда уравнение $AX = C$ имеет в каждом допустимом s-классе единственное решение.

Обозначим $M_\lambda L_j = B_{\lambda j}$. Должно выполняться $AX = L_i S_A M_\lambda L_j S_X M_\mu = L_i S_A B_{\lambda j} S_X M_\mu = L_i S_C M_\mu = C$, т. е. $S_A B_{\lambda j} S_X = S_C$. Последнее уравнение однозначно определяет $S_X = B_{\lambda j}^{-1} S_A^{-1} S_C$.

Если выбрать, в частности, в качестве матрицы C единицу группы $S_{i\mu}(n; r)$ — обозначим ее через $A_{i\mu}$ —, то все решения уравнения $AX = A_{i\mu}$ дают множество всех правых обратных элементов к элементу $A \in S_{i\lambda}(n; r)$ относительно единицы группы $S_{i\mu}(n; r)$.

Аналогичные заключения можно сформулировать и относительно решения уравнения $YA = C$, $A \in S_{j\mu}(n; r)$, $C \in S_{i\mu}(n; r)$, Y из допустимых s-классов $S_{i\lambda}(n; r)$, $\lambda \in \Lambda$, i фиксировано.

Лемма 2.1. *Если произведение $A_{i\lambda} A_{j\mu}$ двух отличных друг от друга идемпотентов ранга r есть идемпотент ранга r, то и произведение $A_{j\mu} A_{i\lambda}$ необходимо является идемпотентом ранга r и*

$$A_{i\lambda} A_{j\mu} \neq A_{j\mu} A_{i\lambda}. \tag{3}$$

Доказательство. Идемпотент на левой стороне соотношения (3) является единицей группы $S_{i\mu}(n; r)$, идемпотент на правой стороне соотношения (3) является единицей группы $S_{j\lambda}(n; r)$. Значит, утверждение леммы 2.1 справедливо.

Из леммы 2.1 вытекает, что если две идемпотентные матрицы коммутируют, то они имеют обязательно разные ранги.

Покажем, как из данного идемпотента $A_0 \in S(n; r)$ может быть „внутренним" умножением образован идемпотент $D_0 \in S(n; r_1)$; $0 < r_1 < r$.

Справедлива

Лемма 2.2. *Пусть $A \in S(n; r)$ — идемпотентная матрица с допустимым разложением $A = LM$, пусть $C \in S(r; r_1)$, $0 < r_1 < r$. — также идемпотентная матрица. Тогда*

а) *матрица $D = LCM$ есть идемпотентная матрица;*

б) $AD = DA = D$, $D \in S(n, r_1)$.

Доказательство.

$$D^2 = LCMLCM = LCE_rCM = LCM = D. \tag{4 а}$$

$$AD = LMLCM = LE_rCM = LCM = D,\quad DA = LCMLM = LCE_rM = LCM = D. \tag{5 б}$$

Остается доказать, что матрица $D \in S(n; r_1)$; достаточно показать, что матрица, присоединенная к матрице D, является единичной матрицей порядка r_1.

Пусть $C = L^*M^*$ — допустимое разложение матрицы C. Согласно условию $M^*L^* = E_{r_1}$. Имеем

$$D = LCM = (LL^*)(M^*M) = \tilde{L}\tilde{M},$$
$$\tilde{M}\tilde{L} = M^*MLL^* = M^*E_rL^* = M^*L^* = E_{r_1}.$$

Лемма 2.2 доказана.

Легко проверить, что из идемпотентной матрицы $LM \in S(n; r)$ внутренним умножением на матрицу $C = L^*M^* \in S(r; r_1)$, $r_1 < r$, которая не идемпотентна, получим матрицу $D = LCM$, которая не идемпотентна. Это вытекает из того, что присоединенная к ней матрица $M^*L^* \neq E_{r_1}$.

Л. М. Глускин в работе [1] называет множество ненулевых идемпотентов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ранга $\leqq r$ полугруппы $S(n)$ цепью, если $f_i \neq f_{i-1}$ и выполняется $f_i \cdot f_{i-1} = f_{i-1} \cdot f_i = f_{i-1}$. Число k, т. е. число элементов цени, он называет „длиной" цепи. Он доказывает (см. [1], лемма 4), что максимальная длина цепи равна r. Из леммы 2.2 вытекает: Если выйти из произвольного идемпотента ранга r, то можно образовать самые различные цепи ненулевых идемпотентов произвольной длины $\leqq r$.

Лемма 2.2 дает конкретное предписание, как для заданного элемента f_i цепи построить элемент f_{i-1}, находящийся „под" ним.

III

В настоящем разделе мы займемся идеалами в $S(n)$. Сначала мы докажем

Лемму 3.1. *Пусть а) матрица $L \in S(n/r; r)$, тогда $S(n)L = S(n/r)$. Пусть б) матрица $M \in S(r/n; r)$; тогда $MS(n) = S(r/n)$.*

Доказательство. Докажем утверждение б). Утверждение а) доказывается аналогично.

Достаточно доказать, что матричное уравнение

$$MX = M^*, \tag{1}$$

где M^* — произвольная матрица из $S(r/n)$, M — выбранная матрица из $S(r/n; r)$, имеет решение $X \in S(n)$.

Пусть столбцы $j_1, j_2, \ldots, j_r$; $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ матрицы M линейно независимы. Подматрицу матрицы M, образованную этими столбцами, обозначим через $M^{(r)}$. Подматрицу, образованную остальными столбцами матрицы M, обозначим через $M^{(s)}$; $s = n - r$. Подматрицу искомой матрицы X, образованную строками $j_1, j_2, \ldots, j_r$, обозначим через $X^{(r)}$, подматрицу матрицы X, образованную остальными строками, обозначим через $X^{(s)}$ — ее элементы можно выбирать произвольно. Через $M_0^{(r)}$, $M_0^{(s)}$ (соответственно, через $X_0^{(r)}$, $X_0^{(s)}$) обозначим матрицы, которые получатся из матрицы M (соответственно, X), если в последнюю вместо пропущенных столбцов (строк) вложить нулевые столбцы (строки). Уравнение (1) мы решим, если для выбранной матрицы $X^{(s)}$ определим матрицу $X^{(r)}$. Очевидно, уравнение (1) можно переписать в виде

$$M_0^{(r)}X_0^{(r)} + M_0^{(s)}X_0^{(s)} = M^*, \tag{1'}$$

откуда

$$X^{(r)} = (M^{(r)})^{-1}(M^* - M_0^{(s)}X_0^{(s)}).$$

Мы решили уравнение (1) и тем самым доказали лемму 3.1.

Введем понятие относительно минимального правого (левого) идеала ранга $r < n$.

Определение 3.1. *Относительно минимальным правым (левым) идеалом ранга $r < n$ назовем такой правый (левый) идеал в полугруппе $S(n)$, который содержит хотя бы одну матрицу ранга r, но не содержит никакой матрицы ранга большего r, причем никакое его собственное подмножество, содержащее хотя бы одну матрицу ранга r, не является правым (левым) идеалом в $S(n)$.*

Относительно минимальные правые (левые) идеалы мы будем обозначать большими готическими буквами $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{L}$) и в случае надобности будем их снабжать индексами.

Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть $A \in S(n; r)$. Тогда $\mathfrak{R} = AS(n)$ (соответственно, $\mathfrak{L} = S(n)A$) есть относительно минимальный правый (соответственно, левый) идеал ранга r в полугруппе $S(n)$. Если $A = LM$ — допустимое разложение матрицы A, то этот идеал может быть записан в виде $\mathfrak{R} = AS(n) = LS(r/n)$ (соответственно, $\mathfrak{L} = S(n)A = S(n/r)M$).*

Доказательство теоремы 3.1 мы проведем для относительно минимального правого идеала (аналогично доказывается утверждение теоремы для относительно минимального левого идеала) ранга r.

Очевидно, $LMS(n)$ — правый идеал; он содержит матрицу $LME_n = A$ ранга r. Предположение о том, что некоторая матрица LM^*, $M^* \in S(r/n)$ не принадлежит $AS(n) = LMS(n)$, ведет к противоречию, так как по лемме 3.1 в $S(n)$ существует такая матрица X, что $MX = M^*$, т. е. $LMX = LM^*$.

Теорема 3.1 (для относительно минимального правого идеала ранга r) доказана. Одновременно мы установили, что множество всех матриц, порождающих один и тот же относительно минимальный правый идеал $\mathfrak{R} = AS(n) = LMS(n) = LS(r/n)$ ранга r — т. наз. r-класс — является объединением всех s-классов ранга r, содержащих в качестве левого сомножителя допустимого разложения матрицу L. Все эти s-классы $S_{i\lambda}(n; r)$ имеют одинаковый первый индекс i, поэтому удобно обозначить соответствующий идеал этим индексом, т. е. $\mathfrak{R}_i$. Аналогично множество всех матриц, порождающих один и тот же относительно минимальный левый идеал $\mathfrak{L} = S(n)A = S(r/n)M$ ранга r — т. наз. l-класс — является объединением всех s-классов ранга r, содержащих в качестве правого сомножителя допустимого разложения матрицу M. Все эти s-классы $S_{i\lambda}(n; r)$ имеют одинаковый второй индекс λ, поэтому удобно обозначить соответствующий идеал этим индексом, т. е. $\mathfrak{L}_\lambda$.

Имеет место

Теорема 3.2. *Каждый идемпотент онтосительно минимального правого (левого) идеала ранга r является левой (правой) единицей для элементов этого идеала.*

Доказательство. Доказательство проведем для относительно минимальных правых идеалов ранга r; для относительно минимальных левых идеалов доказательство аналогично.

Пусть $A_0 = L_{i0}M_0$ — идемпотент из $\mathfrak{R}_i$ ранга r. Каждый элемент $A \in \mathfrak{R}_i$ можно записать в виде $A = L_{i0}M$. Имеем

$$A_0A = L_{i0}M_0L_{i0}M = L_{i0}E_rM = A.$$

Теорема 3.2 доказана.

Ясно, что пересечением относительно минимального правого и относительно минимального левого идеала одинакого ранга r является s-класс ранга r.

Односторонние идеалы $\mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{L}_\lambda$ являются полугруппами. Образуем множества $\widetilde{\mathfrak{R}}_i = \mathfrak{R}_i - \bigcup S_{i\lambda}(n; r)$ (соответственно, $\widetilde{\mathfrak{L}}_\lambda = \mathfrak{L}_\lambda - \bigcup S_{i\lambda}(n; r)$), где λ (соответственно i) провегают через те индексы, для которых $S_{i\lambda}(n; r)$ — группа. (Кратко говоря: из одностороннего идеала ранга r вычтем объединение всех групп ранга r.) Очевидно, множества $\widetilde{\mathfrak{R}}_i$ и $\widetilde{\mathfrak{L}}_\lambda$ содержат только матрицы ранга $< r$. Мы докажем

Лемму 3.2. *$\widetilde{\mathfrak{R}}_i$ и $\widetilde{\mathfrak{L}}_\lambda$ являются соответственно правым и левым идеалом в $\mathfrak{R}_i$ и $\mathfrak{L}_\lambda$ соответственно.*

Доказательство. Доказательство проведем для $\widetilde{\mathfrak{R}}_i$. Для $\widetilde{\mathfrak{L}}_\lambda$ доказательство аналогично.

Пусть $A_1 = L_iM_1 \in \widetilde{\mathfrak{R}}_i$, $A_2 = L_iM_2 \in \mathfrak{R}_i$ — произвольно выбранные матрицы. Тогда

$$A_1A_2 = L_iM_1L_iM_2 = L_iM_3 \in \widetilde{\mathfrak{R}}_i, \tag{2}$$

так как матрица $M_3L_i = = (M_1L_iM_2)L_i$ имеет ранг $< r$ по той причине, что у матрицы M_1L_i ранг $< r$. Тем самым доказано, что $\widetilde{\mathfrak{R}}_i\mathfrak{R}_i \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}_i$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{R}}_i$ является правым идеалом в $\mathfrak{R}_i$.

Следующая теорема относится к двусторонним идеалам.

Теорема 3.3. *Полугруппа $S(n)$ не имеет других двусторонних идеалов кроме множеств $I(n; r)$, $r = 0, 1, \ldots, n$.*[1]

Доказательство. Если двусторонний идеал I полугруппы $S(n)$ содержит матрицу A ранга r и не содержит никакой матрицы ранга большего r, то, очевидно, $I \subseteq I(n; r)$. Пусть A имеет допустимое разложение $A = LM$. Тогда из теоремы 1.1 и леммы 3.1 вытекает $I(n; r) = S(n/r)S(r/n) = S(n)LMS(n) = S(n)AS(n) \subseteq S(n)IS(n) = I$. Значит, $I = I(n; r)$.

В дальнейшем идеалы будем считать элементами частично упорядоченного множества по отношению к теоретико-множественному включению. В этом смысле мы будем говорить о цепи идеалов (о насыщенной цепи), о низших (о непосредственно низших) идеалах и под.

Из теоремы 3.3 вытекает:

Единственной насыщенной цепью двусторонних идеалов в $S(n)$ является

$$S(n) \supset I(n; n-1) \supset \ldots \supset I(n; 1) \supset I(n; 0),$$

причем $S(n)$, $I(n; 0)$ — тривиальные идеалы.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{R} = LS(r/n)$ ($\mathfrak{L} = S(n/r)M$) — относительно минимальный правый (левый) идеал ранга r в полугруппе $S(n)$. Пусть $C \in S(r; s)$, $s < r$. Тогда $\mathfrak{R}^* = LCS(r/n)$ ($\mathfrak{L}^* = S(n/r)CM$) — относительно минимальный правый (левый) идеал ранга s полугруппы $S(n)$, содержащийся в $\mathfrak{R}$ (в $\mathfrak{L}$).*

Доказательство. Проведем доказательство для $\mathfrak{R}^*$ (аналогично делается доказательство для $\mathfrak{L}^*$). Произведение $CS(r/n)$ есть система матриц $L_CS(s/n)$, где матрица L_C типа r/s является левым сомножителем допустимого разложения матрицы C. Значит,

$$\mathfrak{R}^* = LCS(r/n) = LL_CS(s/n) = L^*S(s/n)$$

---

(1) Приводится новое доказательство известной теоремы.

и поэтому, согласно теореме 3.1, $\mathfrak{R}^*$ — относительно минимальный правый идеал ранга s в $S(n)$. Включение же $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{R}$ очевидно.

Если выбрать $s = r - 1$, то с помощью матрицы $C \in S(r; r-1)$ из идеала $\mathfrak{R}^{(r)}$ ранга r получится идеал $\mathfrak{R}^{(r-1)}$ ранга $r-1$, который находится непосредственно под ним.

Так можно образовать самые различные цепи относительно минимальных правых (левых) идеалов каждой длины $\leqq r$.

О двустороннем идеале $I(n; 1)$ известно (см. [1]), что он является вполне простой полугруппой в смысле Риса (см. [3]), что в свою очередь (см. [1]) эквивалентно утверждению, что он изоморфен полугруппе S троек (a, i, λ), $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$; I, Λ — множества индексов, a — элементы группы G, к которой присоединен нуль 0. Каждой паре индексов (i, λ) поставлен в соответствие элемент $p_{i\lambda} \in G \cup 0$, причем для всякого фиксированного λ (i) не все $p_{\lambda i}$ равны нулю. Умножение в S определяется следующим образом:

$$(a, i, \lambda)(b, j, \mu) = (ap_{\lambda j}b, i, \mu).$$

Для наших целей удобно записывать тройки в порядке (i, a, λ). На основании результатов разледа I выше приведенный результат работы [3] доказывается очень просто, если матрицы $A \in I(n; 1) - 0_{nn}$ записать в виде

$$L_iS_AM_\lambda = L_i(a)M_\lambda \tag{2}$$

при фиксированной матрице L_iM_λ, порождающей класс $S_{i\lambda}$; S_A — регулярная матрица порядка 1, содержащая, следовательно, единственный элемент $a \neq 0$ из поля. В $I(n; 1)$ содержится и нулевая матрица 0_{nn}. Соответствие $L_i(a)M \leftrightarrow (i, a, \lambda)$ для $a \neq 0$ взаимнооднозначно. Нулевой матрицей можно расширить каждый s-класс $S_{i\lambda}(n; 1)$. Если в (2) положить $S_{0_{nn}} = (0)$, то мы вправе поставить матрице 0_{nn} в соответствие любую из троек $(i, 0, \lambda)$.

Пусть $A, B \in I(n; 1)$, $A = L_i(a)M_\lambda$, $B = L_j(b)M_\mu$ (в качестве A или B мы допускаем и матрицу 0_{nn}). Тогда

$$AB = L_i(a)M_\lambda L_j(b)M_\mu = L_i(a)B_{\lambda j}(b)M_\mu.$$

$(a)B_{\lambda j}(b)$ — матрица порядка 1, содержащая единственный элемент, который мы обозначим через $ap_{\lambda j}b$, где $p_{\lambda j}$ — элемент матрицы $B_{\lambda j}$ порядка 1; $p_{\lambda j} = 0$, если класс $S_{j\lambda}$ — сингулярный.

Из наших рассуждений вытекает:

Если $\quad A \leftrightarrow (i, a, \lambda), \quad B \leftrightarrow (j, b, \mu),$

то $\quad AB \leftrightarrow (i, a, \lambda)(j, b, \mu) = i, ap_{\lambda j}b, \mu).$

Тем самым изоморфизм полугрупп S, $I(n; 1)$ доказан.

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о том, как преобразуют матрицы $S(n)$ линейное n-мерное векторное унитарное пространство X_n в себя. Оказывается, что если оперировать с матрицами в разложенном виде, то это дает значительные удобства и наглядную геометрическую интерпретацию.

В дальнейшем мы будем рассматривать только матрицы над полем комплексных чисел. Если A — такая матрица, то через $\bar{A}$ мы будем обозначать матрицу с элементами, комплексно сопряженными к элементам матрицы A.

Всякое линейное преобразование $\mathscr{A}$ пространства X_n в себя определяется матрицей $A \in S(n)$. Преобразованием $\mathscr{A}$ вектор $x \in X_n$ отобразится на вектор $y = Ax$. Полугруппа линейных преобразований комплексного пространства X_n в себя изоморфна исследуемой полугруппе квадратных матриц $S(n)$ над полем комплексных чисел.

Пусть $A = L_i M_\lambda$ — любая матрица из s-класса $S_{i\lambda}(n; r)$. Столбцы матрицы L_i образуют базис некоторого r-мерного подпространства X_n — обозначим его через $P_i^{(r)}$. Если использовать другое допустимое разложение $A = L_i^* M_\lambda^*$ данной матрицы, то L_i, L_i^* будут принадлежать одному и тому же классу слева подобных матриц. Столбцы матрицы L_i^* образуют другой базис того же подпространства $P_i^{(r)}$. Следовательно, каждому классу слева подобных матриц однозначно поставлено в соответствие некоторое подпространство $P_i^{(r)}$, характеризуемое индексом i и размерностью r. Элементами этого подпространства являются векторы $L_i t$, $t \in X_r$. Запись $P_i^{(r)} = L_i t$, $t \in X_r$ в дальнейших рассуждениях означает представление подпространства $P_i^{(r)}$ в базисе, определяемом столбцами матрицы L_i, t — r-мерный вектор; его координаты t_i, $i = 1, \ldots, r$ являются координатами вектора из $P_i^{(r)}$ в выбранном базисе.

Вполне аналогично строчечные векторы матриц $\bar{M}$, $\bar{M}^*$ определятот два разных базиса некоторого подпространства — обозначим его через $Q^{(r)}$ — пространства X_n. Как известно, для пространства $Q^{(r)}$ существует однозначно определенное $s = (n - r)$-мерное подпространство $J_\lambda^{(s)}$ являющееся ортогональным дополнением подпространства $Q^{(r)}$. Пусть $J_\lambda^{(s)} = N_\lambda^{(s)} u$, $u \in X_s$ — представление подпространства $J_\lambda^{(s)}$. Ортогональность элементов базиса подпространств $Q^{(r)}$, $J^{(s)}$ выражается матричной записью $M^{(r)} N^{(s)} = 0_{rs}$; 0_{rs} — нулевая матрица типа r/s. Тем самым каждому классу справа подобных матриц ранга r однозначно поставлено в соответствие некоторое подпространство $J_\lambda^{(s)}$. Каждому классу $S_{i\lambda}$ ранга r тем самым однозначно поставлена в соответствие пара $(P_i^{(r)}, J_\lambda^{(s)})$ подпространств пространства X_n. Подпространство $P_i^{(r)}$ есть т. наз. под-

пространство преобразования, подпространство $J_\lambda^{(s)}$ есть т. наз. ядро преобразования.

Легко доказать справедливость утверждений:

1) преобразованием, заданным произвольной матрицей $A \in S_{i\lambda}$, все пространство X_n отобразится на подпространство $P_i^{(r)}$.

2) множество всех векторов, которые произвольной матрицей $A \in S_{i\lambda}$ отображаются на нулевой вектор, образует подпространство $J_\lambda^{(s)}$. Пара подпространств $(P_i^{(r)}, J_\lambda^{(s)})$, принадлежащая классу $S_{i\lambda}(n; r)$, может иметь пересечением

а) нулевое подпространство,

б) подпространство размерности d; $1 \leqq d \leqq \min(r, s)$.

Теорема 4.1. *Для того, чтобы пересечение подпространств* $P_i^{(r)}$, $J_\lambda^{(s)}$ *было подпространством размерности* d, *необходимо и достаточно, чтобы дефект матрицы* $B_{\lambda i} = M_\lambda L_i$ *был равен* d.

Доказательство. Определить пересечение подпространств $P_i^{(r)}$, $J_\lambda^{(s)}$ означает определить те $x \in X_n$, для которых

(1) $\quad$ и $x \in J_\lambda^{(s)}$, т. е. $M_\lambda x = 0_{r1}$

(2) $\quad$ и $x \in P_i^{(r)}$, т. е. $x = L_i t$, $t \in X_r$.

Из (1) и (2) вытекает, что вектор t из соотношения (2) должен удовлетворять системе однородных уравнений

$$M_\lambda L_i t = B_{\lambda i} t = 0_{r1}. \tag{3}$$

Но система (3) имеет

1. тогда и только тогда единственное, т. е. нулевое решение, когда матрица $B_{\lambda i}$ регулярна, т. е. когда ее дефект $d = 0$.

2. d линейно независимых решений тогда и только тогда, когда дефект матрицы $B_{\lambda i}$ равен d, т. е. ее ранг равен $r - d$.

В этом случае решением системы (3) является любой вектор $t = Tu$, где T — матрица типа r/d, столбцами которой являются линейно независимые решения системы (3), u — d-мерный вектор. Векторы из пересечения подпространств $P_i^{(r)}$, $J_\lambda^{(s)}$ имеют вид

$$x = L_i T u = L_{i\lambda} u, \tag{4}$$

где $L_{i\lambda} = L_i T$ — матрица типа n/d. Ее столбцы определяют базис d-мерного подпространства, являющегося пересечением подпространств $P_i^{(r)}$, $J_\lambda^{(s)}$. Определением этого подпространства мы доказали теорему 4.1.

В разделе II мы ввели понятия регулярного и сингулярного s-класса. Легко проверить, что преобразование, заданное матрицей A из регулярного s-класса $S_{i\lambda}$ регулярно преобразовывает подпространство $P_i^{(r)}$, значит:

Если
$$x = L_i u, \quad y = L_i v, \quad x \neq y \quad (\text{т. е. } u \neq v),$$
то
$$Ax \neq Ay.$$
Действительно,
$$Ax = L_i M_\lambda x = L_i M_\lambda L_i u = L_i B_{\lambda i} u = L_i u^*;$$
аналогично
$$Ay = L_i B_{\lambda i} v = L_i v^*$$
(мы обозначили $B_{\lambda i} u = u^*$, $B_{\lambda i} v = v^*$).

Но из регулярности матрицы $B_{\lambda i}$ вытекает:
$$u \neq v \Rightarrow u^* \neq v^*, \text{ т. е. } Ax = L_i u^* \neq L_i v^* = Ay.$$

Если матрица $A \in S_{i\lambda}$ идемпотентна, то $B_{\lambda i} = E_r$, вследствие чего идемпотентная матрица тождественно отображает подпространство $P_i^{(r)}$ на себя. Из приведенной интерпретации легко следует, что регулярный s-класс есть группа.

Матрицами из сингулярного s-класса определены преобразования, сингулярные в подпространстве $P_i^{(r)}$, т. е. отображающие его на собственное подпространство размерности $r - d$, где d — дефект матрицы $B_{\lambda i}$.

Результаты раздела III могут быть также интерпретированы геометрически.

Относительно минимальный правый идеал ранга r, $\mathfrak{R}_i = L_i S(n/r)$, $1 \leqq r < n$ характеризуется тем, что преобразования, определенные матрицами из $\mathfrak{R}_i = L_i S(r/n)$ ранга r имеют подпространством преобразования подпространство $P_i^{(r)} = L_i t$, и преобразования, определенные матрицами из $L_i S(r/n)$ ранга $< r$, имеют подпространством преобразования собственное подпространство подпространства $P_i^{(r)}$.

Относительно минимальный левый идеал $\mathfrak{L}_\lambda = S(n/r) M_\lambda$, $1 \leqq r < n$ характеризуется тем, что преобразования, определенные матрицами из $\mathfrak{L}_\lambda = S(n/r) M$ ранга r имеют ядром преобразования подпространство $J_\lambda^{(s)}$, а преобразования, определенные матрицами из $\mathfrak{L}_\lambda = S(n/r) M$ ранга $< r$, имеют ядром преобразования подпространство, содержащее в качестве собственного подпространство $J_\lambda^{(s)}$.

Теорема 3.2, относящаяся к идемпотентам ранга r относительно минимальных идеалов ранга r, имеет также наглядную геометрическую интерпретацию. Наглядную геометрическую интерпретацию имеет также теорема 3.4, посвященная цепям относительно минимальных односторонних идеалов. Матричная операция, с помощью которой, например, осуществляется переход от одного относительно минимального левого идеала к другому относительно минимальному левому идеалу, находящемуся под ним, преобразовывает подпространство преобразования этого идеала в собственное подпространство этого подпространства.

В заключение мы рассмотрим одно свойство полугруппы $I(n; r)$.

Л. М. Глускин в работе [2] называет множество M кольца всех эндоморфизмов линейного пространства r-кратно транзитивным, если для произвольных r линейно независимых векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ и произвольно выбранных векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(r)}$ (не обязательно линейно независимых) существует в подмножестве M такой эндоморфизм $\mathscr{A}$, что $\mathscr{A} x^{(i)} = y^{(i)}$, $i = 1, \ldots, r$. Имеет место

Теорема 4.2. *Двусторонний идеал $I(n; r)$ полугруппы $S(n)$ есть r-кратно транзитивная система в полугруппе всех линейных преобразований пространства X_n в себя (в множестве всех эндоморфизмов пространства X_n).*

Доказательство. Пусть
$$(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1r} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots, \lambda_{nr} \end{pmatrix} = L,$$
$$(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(r)}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \ldots, \lambda_{1r}^* \\ \lambda_{21}^*, \lambda_{22}^*, \ldots, \lambda_{2r}^* \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n1}^*, \lambda_{n2}^*, \ldots, \lambda_{nr}^* \end{pmatrix} = L^*.$$

Мы должны найти такую матрицу A, что

(1) $$AL = L^*.$$

Для матрицы L существует такая матрица $M \in S(r/n; r)$, что

(2) $$ML = Q; \qquad Q \in S(r; r).$$

Пусть $A = \tilde{L} M$, где M — матрица из соотношения (2) и $\tilde{L}$ — пока что неопределенная матрица из $S(n/r)$.

Из (1) с учетом (2) получаем
$$\tilde{L} M L = \tilde{L} Q = L^*, \text{ т. е.}$$
$$\tilde{L} = L^* Q^{-1}.$$

Мы установили, что для каждой матрицы M, удовлетворяющей соотношению (2) при некоторой регулярной матрице Q, существует такая однозначно определенная матрица $\tilde{L}$, что матрица $A = \tilde{L} M$ отобразит набор r линейно независимых векторов $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)})$ на произвольный заданный набор r векторов $(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(r)})$. Но множество матриц вида $A = \tilde{L} M$, $\tilde{L} \in S(n/r)$ образует идеал $I(n; r)$.

Теорема 4.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Глускин Л. М., *О матричных полугруппах*, Изв. АН СССР, серия мат. *22* (1958), 439—448.

[2] Глускин Л. М., *Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств*, Изв. АН СССР, серия мат. *23* (1959), 841—870.

[3] Rees D., *On semigroups*, Proc. Cambridge Phil. Soc. *36* (1940), 387—400.

[4] Хаусхолдер А. С., *Основы численного анализа*, Москва 1956.

[5] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, Москва 1954.

[6] Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R., *Základy maticového počtu, jeho aplikace v dynamice a diferenciálních rovnicích*, Praha 1958.

[7] Наймарк М. А., *Нормированные кольца*, Москва 1956.

Поступило 9. 7. 1963.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

ON THE STUDY OF THE STRUCTURE OF THE SEMIGROUP OF SQUARE MATRICES OF THE ORDER n OVER A GIVEN FIELD

František Krňan

Summary

In the present paper the structure of the semigroup $S(n)$ of the square matrices of the order n over a given field is approached by the method of decomposition of singular matrices of the rank $r \neq 0$ into the product $A = LM$ of two matrices of the types n/r, r/n of the maximal rank r. This so-called „admissible“ decomposition leads to the equivalences introduced by the definition 1.1: left similarity, right similarity and the equivalence $(\tilde{s})$ by which the s-classes $s_{i\lambda}$ are formed, characterized by two indices: the index i of the left factor and the index λ of the right factor of the admissible decomposition of the matrix $A = LM$. The matrix B is called associated to the matrix A if there exists such an admissible decomposition $A = LM$ of the matrix A that $B = ML$. There exists only one associated matrix to the idempotent matrix of the rank $r \neq 0$, that is, an identity matrix E_r of the order r. If one of the matrices that are associated to the matrix A is regular, then the s-class containing the matrix A is called regular. Each regular s-class is a maximal group (theorem 2.4). An idempotent of the s-class is the identity of this group. These groups of the rank r are isomorphic with the group of regular matrices of the order n. Properties of idempotents of $S(n)$ and chains of idempotents are discussed further.

Each class of left (right) similar matrices of the rank r determines in $S(n)$ the relative minimal right (left) ideal of the rank r. The union of all relatively minimal one-sided ideals gives the unique two-sided ideal of the rank r. Chains of ideals are being determined.

Theorem 3.5 discusses the formation of chains of ideals. The ideal $I(n; 1)$ is discussed, which is a completely simple semigroup in the sense of Rees (see [3]).

By the matrix $A = L_i M_\lambda \in S_{i\lambda}(n; r)$ the linear transformation of an n-dimensional complex vector space X_n into itself is given. All matrices of s-classes with the same index i have for a subspace of the transformation the same r-dimensional subspace $P_i^{(r)} = L_i t$, whose base is formed by the column vectors of the matrix L_i. All matrices of the s-classes with the same index λ have kernels of the transformations, i.e. they annul, the same $s = (n - r)$-dimensional subspace $J^{(s)} = N^{(s)} u$, orthogonal to the subspace, whose base vectors are row vectors of the matrix $\overline{M}_i$. The paper shows some applications and geometric interpretations of the proved results.