MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 2, 1965

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НАПРАВЛЕННОГО ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА ПРИ ПОМОЩИ ОТНОШЕНИЯ „МЕЖДУ"

ЗУЗАНА ЛАДЗИАНСКА (ZUZANA LADZIANSKA), Братислава

М. Алтвег характеризовал в работе [2] частично упорядоченное множество при помощи тернарного отношения „между" (См. [1], проблема 1). Мы говорим, что y лежит между и z, если $x \leqslant y \leqslant z$ или $x \geqslant y \geqslant z$. Обозначим это через $\zeta(x, y, z)$. Если не имеет место $\zeta(x, y, z)$, мы пишем $\bar{\zeta}(x, y, z)$. Частичное упорядочение характеризуют свойства Z_1—Z_6 отношения „между", упомянутые в §1.

Свойство Z_6 не выгодно, потому что количество элементов, которые в нем выступают, не является сверху ограниченным. Алтвег ([2], стр. 150) замечает, что нельзя, повидимому, заменить условие Z_6 другим условием, в котором выступало бы только сверху ограниченное количество элементов. В этой заметке покажем, что в случае направленного частично упорядоченного множества возможно Z_6 заменить простейшими постулатами. Напомним, что частично упорядоченное множество называется направленным кверху (книзу), если для всяких двух элементов a, b существует такой элемент c, что имеет место $a \leqslant c$, $b \leqslant c$ ($a \geqslant c$, $b \geqslant c$). Оно называется направленным, если оно направлено кверху и книзу.

К характеризации цепи достаточно три постулаты.

§ 1. Система постулатов М. Алтвега

М. Алтвег в работе [2] показал, что в частично упорядоченном множестве удовлетворяет отношение ζ условиям Z_1—Z_6:

(Z_1) для всякого x имеет место $\zeta(x, x, x)$,

(Z_2) из $\zeta(x, y, z)$ вытеакет $\zeta(z, y, x)$,

(Z_3) из $\zeta(x, y, z)$ вытекает $\zeta(x, x, y)$,

(Z_4) из $\zeta(x, y, x)$ вытекает $x = y$,

(Z_5) из $\zeta(x, y, z)$ и $\zeta(y, z, u)$, $y \neq z$ вытекает $\zeta(x, y, u)$,

(Z_6) если в конечной последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1} = x_0$ имеет место для $0 < i \leqslant 2n + 1$ $\zeta(x_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$ и для $0 < i < 2n + 1$ $\bar{\zeta}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, тогда $\zeta(x_{2n}, x_0, x_1)$.

В работе [3] доказано обратное утвержение: Если на множестве M определено тернарное отношение η, которое удовлетворяет условиям Z_1—Z_6, то возможно при помощи него определить частичное упорядочение на M так, что принадлежающее к нему отношение ζ совпадает с η.

§ 2. Отношение „между" в направленных частично упорядоченных множествах.

Теорема 1. *В направленном частично упорядоченном множестве отношение ζ удовлетворяет условиям:*

(U_1) *к всяким двум элементам x, y существуют такие элементиы u, v что имеет место $\zeta(u, x, v)$, $\zeta(u, y, v)$,*

(U_2) = (Z_2),

(U_3) = (Z_3),

(U_4) = (Z_4),

(U_5) = (Z_5),

(U_6) *из $\zeta(x, x, y)$, $\zeta(y, y, z)$, $\zeta(z, z, x)$ вытекает, что имеет место по крайней мере одно из соотношений $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(x, z, y)$, $\zeta(y, x, z)$,*

(U_7) *из $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(y, y, u)$, $\bar{\zeta}(x, y, u)$ вытекает $\zeta(z, y, u)$.*

Обратно, если какое-нибудь тернарное отношение η, определенное на M, удовлетворяет условиям U_1—U_7, тогда возможно при помощи него определить частичное упорядочение на M так, что принадлежающее к нему отношение ζ совпадает с η и M направлено.

Доказательство. Доказательство первого утверждения просто. Второе утверждение докажем так: Z_1 вытекает из U_1, U_2, U_3, а Z_6 доказывается индукцией, буквальным повторением метода доказательства Z_6 в работе [3].

Теорема 2. *Система* (U) *эквивалентна системе* (A):

(A_1) = (U_1),

(A_2) *из $\zeta(x, y, z)$ вытекает $\zeta(z, z, y)$,*

(A_3) = (U_4),

(A_4) = (U_5),

(A_5) *из $\zeta(y, x, x)$, $\zeta(y, z, z)$, $\zeta(x, z, z)$ вытекает, что имеет место по крайней мере одно из соотношений $\zeta(z, y, x)$, $\zeta(y, z, x)$, $\zeta(z, x, y)$,*

(A_6) из $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(y, y, u)$, $\bar{\zeta}(u, y, x)$ *вытекает* $\zeta(u, y, z)$.

Постулаты системы (A) *независимы.*

Доказательство. 1. Докажем, что из (U) вытекает (A): Очевидно, всякое направленное частично упорядоченное множество с привычным ,,между'' удовлетворяет (A), этим в силу теоремы 1 утверждение доказано.

2. Докажем, что из (A) вытекает (U): Прежде всего покажем, что имеют место U_2 и U_3. Предположим, что $\zeta(x, y, z)$ и рассмотрим два случая: $z \neq y$ и $z = y$.

а) $z \neq y$. Из $\zeta(x, y, z)$ согласно A_2 вытекает $\zeta(z, z, y)$, а из этого опять-таки согласно A_2 вытекает $\zeta(y, y, z)$. В силу A_6 из $\zeta(x, y, z)$ и $\zeta(y, y, z)$ вытекает или $\zeta(z, y, z)$, или $\zeta(z, y, x)$. Первый случай ввиду A_3 дает $y = z$, что противоречит предположению. Следовательно, имеет место $\zeta(z, y, x)$, а в силу A_2 и $\zeta(x, x, y)$.

б) $z = y$, значит, нужно доказать: из $\zeta(x, y, y)$ вытекает $\zeta(y, y, x)$ и $\zeta(x, x, y)$. В силу A_1 к x, y существуют u, v такие, что имеет место $\zeta(u, x, v)$, $\zeta(u, y, v)$. Если $v = x$, то имеет место $\zeta(u, y, x)$ а из этого ввиду A_2 вытекает $\zeta(x, x, y)$ и $\zeta(y, y, x)$. Если $v = y$, то имеет место $\zeta(u, x, y)$, а из этого согласно A_2 вытекают $\zeta(y, y, x)$ и $\zeta(x, x, y)$. В дальнейшем мы предполагаем, что $v \neq x$, $v \neq y$. Из $\zeta(u, x, v)$ в силу A_2 мы получаем $\zeta(v, v, x)$, а поскольку $v \neq x$, то согласно а) имеет место $\zeta(x, v, v)$. Аналогично из $\zeta(u, y, v)$ вытекает $\zeta(y, v, v)$. Ввиду A_5 из $\zeta(x, y, y)$, $\zeta(x, v, v)$, $\zeta(y, v, v)$ следует, что имеет место по крайней мере одно из соотношений $\zeta(v, x, y)$, $\zeta(x, v, y)$, $\zeta(v, y, x)$. Если имеет место первое соотношение, то в силу A_2 имеют место $\zeta(y, y, x)$, $\zeta(x, x, y)$. Если имеет место второе соотношение, то из $\zeta(u, x, v)$, $\zeta(x, v, y)$, $x \neq v$ согласно A_4 мы получаем $\zeta(u, x, y)$ а согласно A_2 мы получаем $\zeta(y, y, x)$, $\zeta(x, x, y)$. Если имеет место третье соотношение, то в силу A_2 мы получаем $\zeta(x, x, y)$, $\zeta(y, y, x)$. Итак, мы доказали, что U_2, U_3 имеют место. Свойства U_6, U_7 следуют из A_5 и A_6 применением U_2, U_3, A_2.

Независимость A_1. Определим на множестве $\{a\}$ отношение $\zeta : \bar{\zeta}(a, a, a)$.

Независимость A_2. Пусть на множестве действительных чисел имеет место $\zeta(a, b, c)$, если $a < b < c$ или $a > b > c$.

Независимость A_3. Пусть на множестве $\{a, b\}$ имеет место $\zeta(x, y, z)$ для любых трех элементов x, y, z множества $\{a, b\}$.

Независимость A_4. Пусть на множестве $N \cup \{\alpha, \beta\}$, где N — множество всех натуральных чисел, $\alpha, \beta \notin N$, имеет место $\zeta(a, b, c)$, если: $0 \leqslant b - a \leqslant 1$, $0 \leqslant c - b \leqslant 1$; или $0 \leqslant b - c \leqslant 1, 0 \leqslant a - b \leqslant 1$; или $a = \alpha$, b — произвольно, $c = \beta$; или $a = \beta$, b — произвольно, $c = \alpha$; или $a = \alpha, 0 \leqslant c - b \leqslant 1$; или $a = \beta, 0 \leqslant b - c \leqslant 1$; или $c = \alpha, 0 \leqslant a - b \leqslant 1$; или $c = \beta, 0 \leqslant b - a \leqslant 1$; или $a = b = \alpha(\beta)$, c — произвольно; или a — произвольно, $b = c = \alpha(\beta)$. A_4 не имеет место, например, для $x = y = a$, $z = a + 1$, $u = a + 2$, $a \in N$.

Независимость A_5. Определим на множестве дейтсвительных чисел $\zeta(a, b, c)$, если имеет место по крайней мере одно из соотношений $a = b$, $b = c$.

Независимость A_6. Пусть $M = M_1 \cup M_2$, где $M_1 = \{t, k, j, l, v\}$, $M_2 = \{t, m, j, n, v\}$, $t \leqslant k \leqslant j \leqslant l \leqslant v$, $t \leqslant m \leqslant j \leqslant n \leqslant v$. Определим для $a, b, c \in M$ $\zeta(a, b, c)$, если a, b, c все из M_1 или все из M_2 и имеет место $a \leqslant b \leqslant c$ или $a \leqslant b \leqslant c$. A_6 не имеет место, например, для $x = m$, $y = j$, $z = n$, $u = l$.

Теорема 3. *Система* (U) *эквивалента системе* (B):

(B_1) = (U_1),
(B_2) *из* $\zeta(x, y, z)$ *вытекает* $\zeta(y, z, z)$,
(B_3) *из* $\zeta(x, y, z)$ *вытекает* $\zeta(x, x, z)$,
(B_4) *из* $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(y, x, z)$ *вытекает* $x = y$,
(B_5) = (U_6),
(B_6) *из* $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(y, u, u)$, $\bar{\zeta}(u, y, x)$ *вытекает* $\zeta(u, y, z)$.

Постулаты системы (B) *независимы.*

Доказательство. 1. Докажем, что из (U) вытекает (B): Очевидно, всякое направленное частично упорядоченное множество с привычным ,,между'' удовлетворяет (B); этим по теореме 1 утверждение доказано.

2. Докажем, что из (B) вытекает (U):

U_2: Предположим, что $\zeta(x, y, z)$. Если $y \neq z$, то в силу B_2 справедливо $\zeta(y, z, z)$, если бы имело место $\bar{\zeta}(z, y, x)$, то согласно B_6 мы получили бы $\zeta(z, y, z)$, а это с $\zeta(y, z, z)$ в силу B_4 дает $y = z$, что противоречит предположению. Значит, должно быть $\zeta(z, y, x)$. Если $y = z$, то нужно показать, что из $\zeta(x, y, y)$ вытекает $\zeta(y, y, x)$. Для $x = y$ это очевидно, поэтому предположим $x \neq y$. Из $\zeta(x, y, y)$ ввиду B_3 вытекает $\zeta(x, x, y)$. Если бы имело место $\bar{\zeta}(y, x, x)$, то согласно B_6 из $\zeta(x, x, y)$, $\zeta(x, y, y)$ $\bar{\zeta}(y, x, x)$ мы получили бы $\zeta(y, x, y)$ а это с $\zeta(x, y, y)$ в силу B_4 дает $x = y$, что противоречит предположению. Итак, должно иметь место $\zeta(y, x, x)$, из этого согласно B_3 вытекает $\zeta(y, y, x)$.

U_3: Из $\zeta(x, y, z)$ ввиду U_2 вытекает $\zeta(z, y, x)$, ввиду B_2 справедливо $\zeta(y, x, x)$, а из этого в силу U_2 вытекает $\zeta(x, x, y)$.

U_4: Из $\zeta(x, y, x)$ согласно U_3 мы получаем $\zeta(x, x, y)$, из этого в силу U_2 вытекает $\zeta(y, x, x)$, а это с $\zeta(x, y, x)$ ввиду B_4 дает $x = y$.

U_5: Пусть имеет место $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(y, z, u)$, $y \neq z$. Из $\zeta(y, z, u)$ в силу B_3 мы получаем $\zeta(y, y, u)$, в силу U_2 $\zeta(u, y, y)$, в силу U_3 $\zeta(u, u, y)$, в силу U_2 $\zeta(y, u, u)$. Предположим, что $\bar{\zeta}(x, y, u)$, из этого ввиду U_2 вытекает $\bar{\zeta}(u, y, x)$.

Из $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(y, u, u)$, $\bar{\zeta}(u, y, x)$ согласно B_6 вытекает $\zeta(u, y, z)$, из этого в силу U_2 $\zeta(z, y, u)$, а это с $\zeta(y, z, u)$ ввиду B_4 дает $y = z$, что противоречит предположению. Следовательно, должно быть $\zeta(x, y, u)$.

U_7: Вытекает из B_6, применив U_2, U_3.

Независимость B_1: Как независимость A_1 в системе (A).

Независимость B_2: Определим на множестве действительных чисел $\zeta(a, b, c)$, если $a \leqslant b < c$.

Независимость B_3: Как независимость A_4 в системе (A).

Независимость B_4: Как независимость A_3 в системе (A).

Независимость B_5: Как независимость A_5 в системе (A).

Независимость B_6: Как независимость A_6 в системе (A).

§ 3. *Отношение „между" в цепях*

Теорема 4. а) *В линейно упорядоченном множестве (цепи) отношение ζ удовлетворяет условиям:*

(T_1) *из $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(x, z, y)$ вытекает $y = z$,*

(T_2) *для произвольных трех элементов x, y, z имеет место по крайней мере одно из соотношений $\zeta(z, y, x)$, $\zeta(y, z, x)$, $\zeta(z, x, y)$.*

(T_3) *из $\zeta(x, y, z)$, $\bar{\zeta}(x, y, u)$ вытекает $\zeta(z, y, u)$.*

б) *Обратно, если какое-нибудь тернарное отношение η, определенное на M, удовлетворяет условиям T_1—T_3, то возможно при помощи него определить частичное упорядочение на M так, что принадлежащее к нему отношение ζ совпадает с η и M — цепь.*

в) *Постулаты системы* (T) *независимы.*

Доказательство. К доказательству утверждения (б) очевидно достаточно доказать, что имеют место соотношения (B). Прежде всего покажем, что имеют место

(1) для любых двух элементов x, y справедливо $\zeta(x, x, y)$,

(2) из $\zeta(x, y, z)$ вытекает $\zeta(z, y, x)$.

(1): Из T_2 вытекает, что для каждого элемента x справедливо $\zeta(x, x, x)$. Пусть y — произвольный элемент, если бы имело место $\bar{\zeta}(x, x, y)$, то в силу T_3 имело бы место и $\zeta(x, x, y)$ а это противоречие. Следовательно, имеет место $\zeta(x, x, y)$.

(2): Предположим, что $\zeta(x, y, z)$. Если $x \neq y$, то имеет место $\bar{\zeta}(x, y, x)$ потому что если бы имело место $\zeta(x, y, x)$, то согласно (1) и T_1 должно было бы быть $x = y$. Тогда из $\zeta(x, y, z)$, $\bar{\zeta}(x, y, x)$ ввиду T_3 вытекает $\zeta(z, y, x)$. Если $x = y$, то нужно показать, что из $\zeta(x, x, z)$ вытекает $\zeta(z, x, x)$. Для $x = z$ это тривиально, поэтому мы предположим $x \neq z$. Согласно T_2 имеет

место для x, x, z по крайней мере одно из соотношений $\zeta(z, x, x)$, $\zeta(x, z, x)$. Если имеет место $\zeta(x, z, x)$, то в силу (1) и T_1 $x = z$, что противоречит предположению. Итак, имеет место $\zeta(z, x, x)$. Теперь покажем, что из (T) вытекает (B).

B_1: Пусть x, y — два произвольных элемента, ввиду (1) имеют место $\zeta(x, x, y), \zeta(y, y, x)$, следовательно, в силу (2) справедливо $\zeta(x, x, y)$, $\zeta(x, y, y)$.

B_2: Вытекает из (1) и (2).

B_3: Вытекает из (1).

B_4: Вытекает из T_1 и (2).

B_5: Вытекает из T_2 и (2).

B_6: Вытекает из T_3 и (2).

Независимость T_1: Как независимость A_3 в системе (A).

Независимость T_2: Как независимость A_5 в системе (A).

Независимость T_3: Определим на множестве $\{a, b\}$ соотношение $\zeta(x, y, z)$ если $x = z$. T_3 не имеет место, например, для $x = z = a$, $y = u = b$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G., *Lattice Theory*, New York 1948.

[2] Altwegg M., *Zur Axiomatik der teilweise geordneten Mengen*, Comment. Math. Helv. *24* (1950), 149—155.

[3] Kolibiar M., *Über metrische Vielverbände II*, Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. Math. *7* (1963), 629—636.

Поступило 3. 5. 1964.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied, Bratislava

CHARACTERIZATION OF DIRECTED PARTIALLY ORDERED SET BY MEANS OF BETWEENNESS RELATION

Zuzana Ladzianska

Summary

In this paper such conditions are derived that permit to define a partial ordering coinciding with the original one by means of the betweenness relation of directed partially ordered set.