MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 2, 1965

INTÉGRALE VECTORIELE DE DANIELL

IGOR KLUVÁNEK, Košice

Il est bien connu que la notion de l'intégrale de Daniell rend de bons services dans la théorie de la représentation des fonctionelles linéaires de divers sortes. Or, lorsq'on considère les opérations plus générales, notamment celles dont les valeurs appartiennent à un espace de Banach, il est naturel de généraliser respectivement aussi la notion de l'intégrale de Daniell. Le but du travail présent est de donner une théorie de l'intégrale de Daniell généralisée de sorte que les valeurs de l'intégrale peuvent appartenir à un espace de Banach arbitraire. Nous montrerons que la plupart des théorèmes valables pour l'intégrale de Daniell classique peut être énoncée aussi pour la généralisation indiquée. Ce sont surtout les théorèmes concernants la convergence et permettants les applications diverses.

Pour développer la théorie de l'intégrale vectorielle de Daniell nous nous servirons d'une adaptation „vectorielle" de la méthode de F. Riesz présentée dans [1]. La notion de l'intégrale vectorielle de Daniell a été introduite dans [2]. Mais là pour obtenir beaucoup de théorèmes on s'est servi de l'intégrale par rapport à une fonction d'ensemble, par conséquent la théorie de l'intégrale de Daniell proprement dite dans cet exposé n'intervenait pas. L'avantage de la théorie de l'intégrale de Daniell consiste en possibilité d'éliminer la notion de fonction d'ensemble. Nous donnerons ici une application de la théorie de l'intégrale vectorielle de Daniell à la théorie de la mesure vectorielle.

La notion de l'intégrale vectorielle de Daniell est en rélation étroite avec la notion de l'intégrale vectorielle au sens de N. Bourbaki [3]. Cette dernière notion est d'une part plus special, ce qui n'est pas essentiel, quant au domain de l'application considérée. Il ne consiste que de fonctions continues à support compact sur un espace topologique. D'autre part elle est beaucoup plus génerale en permettant pour les valeurs les élements d'un espace linéaire topologique locallement convexe arbitraire. En développant la théorie de l'intégrale dans [3] on sort de l'éspace initial et les valeurs de l'intégrale

de certaines fonctions peuvent appartenir au second dual de cet espace ou bien à un espace encore plus vaste. Au contraire, nous examinerons les prolongements les plus vastes possibles de l'intégrale donnée ne sortant pas de l'espace donné. La specialisation aux espaces de Banach nous permet d'obtenir les propriétées plus détaillées de l'intégrales considérées surtout d'énoncer les théorèmes du type du théorème de Lebesgue et de celui de Beppo Levi.

1. QUELQUES LEMMES SUR LES SÉRIES

Soit X un espace de Banach et X^* son dual. Soient $E_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots$ On dit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ est convergente (fortement) lorsque la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge fortement pour la choix arbitraire des $x_i \in E_i$. On écrit $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ pour $E = \{x : x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,\ x_i \in E_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$. L'ensemble E est appelé somme (forte) de la série $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$. La convergence faible et la somme faible de la série d'ensembles est définie analogiquement.

Pour $E \subset X$ on dénote $\|E\| = \sup \{\|x\| : x \in E\}$.

1.1. Lemme. *Etant donnée une série $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ convergente d'ensembles non-vides, on a $\|\sum_{i=n}^{\infty} E_i\| \to 0$ pour $n \to \infty$ et encore $\|\sum_{i=n}^{m} E_i\| \to 0$ pour $n \to \infty$, $m \to \infty$.*

Démonstration. En supposant qu'on n'avait pas $\|\sum_{i=n}^{\infty} E_i\| \to 0$ il existerait un nombre $\delta > 0$ et une suite croissante des indices $\{n_j\}$ de sorte que $\|\sum_{i=n_j}^{\infty} E_i\| \geqq 3\delta$ pour $j = 1, 2, \ldots$ On peut alors choisir les éléments $x_{i,n_j} \in E_i$ de telle manière, que $\|\sum_{i=n_j}^{\infty} x_{i,n_j}\| \geqq 2\delta$, $j = 1, 2, \ldots$. Il en découle l'existence des nombres $k_j > 0$ de sorte, que

$$\|\sum_{i=n_j}^{n_j+k_j} x_{i,n_j}\| \geqq \delta, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Posons $j_1 = 1$ et si le nombre j_s pour $s \geqq 1$ est déterminé choisissons le nombre j_{s+1} de telle manière, qu'on ait $j_{s+1} > j_s$ et $n_{j_{s+1}} > n_{j_s} + k_{j_s}$. Pour abrèger nous écrivons $m_s = n_{j_s}$ et $l_s = k_{j_s}$. Pour $m_s \leqq i \leqq m_s + l_s$ posons $y_i = x_{i,m_s}$, $s = 1, 2, \ldots$. S'il n'existe aucun $s = 1, 2, \ldots$ tel que $m_s \leqq i \leqq m_s + l_s$ on choisit $y_i \in E_i$ arbitrairement.

La condition de Cauchy pour la série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ n'est pas remplie, parce que pour chaque n il existe $m_s > n$ et $\|\sum_{i=m_s}^{m_s+l_s} y_i\| \geqq \delta$. Alors, la série $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ ne peut point converger.

La second moitié du lemme découle immédiatement de la première.

1.2. Lemme. *Si la série $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ est convergente, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{E}_i$ l'est aussi.* ($\bar{E}$ dénotant la fermeture de l'ensemble $E \subset X$ pour la topologie forte.)

Démonstration. Soit $x_i \in \bar{E}_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Etant donné $k > 0$, il existe

$y_i \in E_i$ de sorte que $\|x_i - y_i\| < k^{-1}2^{-i}$. La série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ converge; posons $z_k = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$. La suite $\{z_k\}$ remplit la condition de Cauchy en vertu de l'inégalité $\|z_l - z_k\| \leqq k^{-1} + l^{-1}$. Alors, sa limite x existe. Soit $\varepsilon > 0$. Soit k assez grand pour qu'on ait $\|x - z_k\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ et $k^{-1} < \frac{1}{3}\varepsilon$. Soit encore n_0 tel que pour $n > n_0$ on ait $\|z_k - \sum_{i=1}^{m} y_i\| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Alors, pour $n > n_0$ on a

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} x_i\| \leqq \|x - z_k\| + \|z_k - \sum_{i=1}^{n} y_i\| + \|\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\| < \varepsilon.$$

1.3. Lemme. *Si la série $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ est faiblement convergente et $0 \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ elle l'est aussi fortement.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme D'Orlicz et de Pettis. On n'a qu'à démontrer, que pour la choix arbitraire des $x_i \in E_i$ la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ soit convergente fortement. Mais d'après l'hypothèse cette série converge faiblement aussi après avoir remplacé quelques-uns de ses termes par zéro. Le lemme d'Orlicz et de Pettis (cf. [4], Théorème IV, 1,1) assure la convergence forte de cette série.

1.4. Lemme. *Soient $E_{in} \subset X$, $0 \in E_{in}$, $i = 1, 2, \ldots;$ $n = 1, 2, \ldots$ Supposons l'existence de $E_n = \sum_{i=1}^{\infty} E_{in}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et l'existence de $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Alors on a $E = \sum_{i,n=1}^{\infty} E_{in}$ pour chaque réarangement de la série double en une série simple et encore $E = \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} E_{in})$.*

Démonstration. On voit facilement que E est la somme faible de la série $\sum_{i,n=1}^{\infty} E_{in}$ réarangée arbitrairement. Parce qu'on a $0 \in E_{in}$, d'après le lemme 1.3 cette série converge aussi fortement. Or, la somme faible et celle forte d'une série convergente fortement coïncident. La seconde assertion du lemme on démontre pareillement.

2. INTÉGRALE VECTORIELLE DE DANIELL

2.1. Sois P un ensemble non-vide arbitraire. Soit L un espace de Riesz de fonctions réelles sur P, c'est-à-dire L est un ensemble de fonctions sur P avec les propriétés suivantes:

(a) $f_1, f_2 \in L \Rightarrow c_1 f_1 + c_2 f_2 \in L$ (c_1, c_2 réels);
(b) $f \in L \Rightarrow |f| \in L$.

Nous nous servirons des notations $f_1 \vee f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$, $f_1 \wedge f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|)$, $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$. Evidemment, on a $f_1 \vee f_2$, $f_1 \wedge f_2 \in L$ lorsque $f_1, f_2 \in L$.

L^+ signifie l'ensemble de toutes les fonctions $f \in L$, $f \geqq 0$.

Nous écrivons $f_n \searrow f$ si pour tout $p \in P$ on a $f(p) = \lim_n f_n(p)$ et $f_n \geqq f_{n+1}$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Les notations $f_n \nearrow f$ et $f_n \to f$ auront un sens analogue.

L'espace de Riesz L est dit σ-réticulé si pour toute suite $\{f_n\}$ de fonctions $\in L$ majorée dans L on a aussi $\sup_n f_n = \lim_n \bigvee_{i=1}^{n} f_i \in L$. L'espace de Riesz L est σ-réticulé si et seulement s'il contient la limite de toute suite $\{f_n\}$ convergente de fonctions de L majorée dans L.

2.2. Soit X un espace de Banach. On appelle intégrale vetorielle de Daniell sur L avec les valeurs dans X (simplement intégrale vectorielle) chaque transformation $I : L \to X$ jouissante des propriétés suivantes:

(1) *$I(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 I f_1 + c_2 I f_2$ pour $f_1, f_2 \in L$ et c_1, c_2 réels.*
(2) *On a $\|If_n\| \to 0$ lorsque $f_n \searrow 0$, $f_n \in L$, $n = 1, 2, \ldots$*

On appelle intégrale vectorielle faible une transformation $I : L \to X$ avec les propriétés (1) et

(3) *Pour tout $x^* \in X^*$ on a $x^* I f_n \to 0$ lorsque $f_n \searrow 0$, $f_n \in L$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Evidemment chaque intégrale vectorielle est en même temps une intégrale vectorielle faible.

Etant donnée une transformation $I : L \to X$ pour tout $f \geqq 0$ nous posons

$$I(L, f) = \{I\varphi : |\varphi| \leqq f, \varphi \in L\}, \qquad I(L^+, f) = \{I\varphi : \varphi \leqq f, \varphi \in L^+\}.$$

Une intégrale vectorielle ou intégrale vectorielle faible I sur L est dite saturable si, pour chaque $f \in L^+$ et $f_n \in L^+$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} I f_n$ est faiblement convergente.

On dit qu'une intégrale vectorielle (intégrale vectorielle faible) I sur L avec les valeurs dans X est faiblement relativement compacte si, pour tout $f \in L^+$, l'ensemble $I(L, f)$ est faiblement relativement compact dans X.

2.3. Si X est l'espace de tous les nombres réels ou complexes une intégrale I sur L avec les valeurs dans X s'appelle intégrale scalaire. Lorsqu'on a $If \geqq 0$ (en conséquence If est réel) pour $f \in L^+$ l'intégrale I s'appelle intégrale positive. En ce cas il s'agit de l'intégrale de Daniell proprement dite.

Pour deux intégrales scalaires et réelles J_1, J_2 nous écrivons $J_1 \leqq J_2$ si pour $f \in L^+$ on a $J_1 f \leqq J_2 f$.

D'après [5] chaque intégrale scalaire est relativement bornée, c'est-à-dire, pour $f \in L^+$, l'ensemble $I(L, f)$ est borné. Il en découle que pour chaque intégrale scalaire I existe une intégrale positive J telle, qu'on a $|If| \leqq Jf$ pour $f \in L^+$. Nous désignons par $|I|$ la plus petite intégrale J jouissante de cette propriété. L'intégrale positive $|I|$ s'appelle variation de l'intégrale I. Lorsque I n'admet que les valeurs réelles on a $|I| f = |I(L, f)|$ pour $f \in L^+$.

Dans la théorie classique de l'intégrale de Daniell (cf. [1], [5], [6], [7]) on démontre le théorème suivant:

Etant donnée une intégrale scalaire I_0 sur L_0 il existe un espace de Riesz $L_1 \supset L_0$ et une intégrale scalaire I_1 sur L_1 telle que $I_1 f = I_0 f$ pour $f \in L_0$ et les propositions suivantes ont lieu:

(a) *L_1 est un espace complet pour la seminorme $\|f\| = |I_1|(|f|)$ et L_0 est dense dans L_1.*

(b) *Si $f_n \in L_1$, $f_n \nearrow f$ et s'il existe une constante K telle que $|I_1| f_n \leqq K$, alors $f \in L_1$ et $|I_1|(f - f_n) \to 0$ et, par conséquence, $I_1 f_n \to I_1 f$.*

(c) *Si $f_n \in L_1$, $g \in L_1$, $|f_n| \leqq g$ et $f_n \to f$, on a aussi $f \in L_1$ et $I_1 f_n \to I_1 f$.*

Dans ce qui suit on donnera les conditions sous lesquelles les propositions analogues ont lieu aussi pour les intégrales vectorielles.

2.4. Soit I une intégrale vectoriele faible sur L avec les valeurs dans l'espace de Banach X. L'intégrale faible I est relativement bornée, c'est-à-dire l'ensemble $I(L, f)$ est borné dans X pour chaque $f \in L^+$.

En effet, pour tout $x^* \in X^*$ l'ensemble $x^* I(L, f)$ est borné d'après 2.3. En conséquence du théorème bien connu, affirmant que chaque ensemble dans un espace de Banach faiblement borné l'est aussi pour la topologie forte, l'ensemble $I(L, f)$ est borné.

Pour $f \in L^+$ on pose $\|I\| f = \|I(L, f)\|$.

De ce que nous venons d'établir il découle que $\|I\| f < \infty$ pour tout $f \in L^+$.

2.5. *Soit I une intégrale vectorielle faible sur L avec les valeurs dans X. Chacune des conditions* (i), (ii), (iii), (iv), (v) *est suffisante pour qu'elle soit intégrale vectorielle forte, c'est-à-dire pour qu'il ait lieu* (2).

(i) *I est saturable*

(ii) *I est relativement faiblement compacte.*

(iii) *L est σ-réticulé.*

(iv) *X est un espace faiblement complet d'après les suites, c'est-à-dire chaque suite d'élements de X fondamental pour la topologie faible est faiblement convergente.*

(v) *Il existe une intégrale positive J sur L de sorte que $\|If\| \leqq J|f|$ pour tout $f \in L$.*

En effet, pour démontrer que la condition (i) est suffisante, envisageons une suite $\{f_n\}$ décroissante et tendante vers 0 dont les éléments sont tirés de L. Si η_i est egal à 0 ou 1 pour $i = 1, 2, \ldots$, on a $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i (f_i - f_{i+1}) \leqq f_1$. Il en découle d'après l'hypothèse que la série $\sum_{i+1}^{\infty} \eta_i I(f_i - f_{i+1})$ est faiblement convergente. Le lemme d'Orlicz et de Pettis entraîne la convergence forte de la série $\sum_{i=1}^{\infty} I(f_i - f_{i+1})$, d'où notre assertion.

Les démonstrations pour les conditions (ii), (iii), (iv) et (v) sont analogues ou évidentes.

Dans ce n° soient donnés un ensemble abstrait P, un espace de Riesz L_0 de fonctions sur P et une intégrale vectorielle I_0 sur L_0 avec les valeurs dans un espace de Banach X. Le but que nous nous donnons est de démontrer pour I_0 une proposition analogue à 2.3 (a). Il existe une intégrale vectorielle I_1 sur L_1 telle qu'on a $L_0 \subset L_1$, $I_1 f = I_0 f$ pour $f \in L_0$ et si nous définissons seminorme $\|f\| = \|I_1\|(|f|)$ dans L_1, alors L_1 devient un espace complet pour cette semi-norme et L_0 un ensemble dense dans L_1.

3.1. Un ensemble $E \subset P$ est dit négligeable pour I_0 (simplement négligebale si aucune confusion n'est à craindre) lorsqu'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions de L_0^+ telle, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, f_n)$ soit convergente et la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ diverge pour tout $p \in E$.

En vertu de l'égalité $I_0(L_0, f_n) = I_0(L_0^+, f_n) - I_0(L_0^+, f_n)$ pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, f_n)$ soit convergente, il faut et il suffit qu'il y en ait de la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0^+, f_n)$.

Nous nous servirons du terme traditionel „presque partout" (p. p.) en indiquant que le fait en question subsiste partout, sauf peut-être en tous points d'un ensemble négligeable.

Il est facile à démontrer que l'ensemble négligeable pour I_0 l'est aussi pour toute intégrale scalaire $x^* I_0$ avec $x^* \in X^*$.

Lemme. *On a $\|I_0 f_n\| \to 0$, lorsque $f_n(p) \searrow 0$ presque partout* (cf. [1] n° 61).

Démonstration. D'après l'hypothèse il existe une suite $\{g_n\} \subset L_0^+$ telle que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, g_n)$ existe et on a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(p) = \infty$ pour tout p dont on n'a pas $\lim_n f_n(p) = 0$. Observons que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, g_n)$ est borné parce que d'après 2.4 l'ensemble $\sum_{n=1}^{m} I_0(L_0, g_n)$ l'est et en vertu du lemme 1.1 on a $\|\sum_{n=m+1}^{\infty} I_0(L_0, g_n)\| \to 0$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, en multipliant g_n au besoin par une constante, on peut supposer que $\|\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, g_n)\| < \varepsilon$. Cela étant écrivons

$$\|I_0 f_n\| \leqq \|I_0(f_n - \sum_{i=1}^{n} g_i)^+\| + \|I_0(f_n - \sum_{i=1}^{n} g_i)^-\| + \|\sum_{i=1}^{n} I_0 g_i\|.$$

Evidemment $(f_n - \sum_{i=1}^{n} g_i)^- \leqq \sum_{i=1}^{n} g_i$ et $I_0(L_0, \sum_{i=1}^{n} g_i) \subset \sum_{i=1}^{n} I_0(L_0, g_i)$, par conséquent $\|I_0(f_n - \sum_{i=1}^{n} g_i)^-\| < \varepsilon$. On a aussi $\|\sum_{i=1}^{n} I_0 g_i\| < \varepsilon$. Mais $(f_n - - \sum_{i=1}^{n} g_i)^+ \searrow 0$, alors $\|I_0(f_n - \sum_{i=1}^{n} g_i)^+\| \to 0$. Il s'ensuit que $\limsup_n \|I_0 f_n\| \leqq \leqq 2\varepsilon$. Or, ε étant arbitraire, on a $\lim_n \|I_0 f_n\| = 0$.

3.2. Dénottons par $L_{\frac{1}{2}}$ l'ensemble de toutes les fonctions f réprésentables sous forme $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ p. p. où $f_n \in L_0^+$ et $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, f_n)$ converge. Pour la fonction f de ce type nous posons $I_{\frac{1}{2}} f = \sum_{n=1}^{\infty} I_0 f_n$.

Il s'ensuit de l'hypothèse que la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_0 f_n$ converge. Alors, pour légitimer la convention faite, il nous reste à démontrer que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} I_0 f_n$ ne dépend pas du choix particulier des fonctions f_n. Or, d'après la théorie de l'intégrale scalaire (cf. 2.3), pour tout $x^* \in X^*$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} x^* I_0 f_n$ est la même pour chaque série de fonctions $f_n \in L_0^+$ avec $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ p. p. En conséquence $I_{\frac12} f$ ne dépend que de la fonction en question.

Manifestement $L_0^+ \subset L_{\frac12}$, $L_{\frac12} + L_{\frac12} \subset L_{\frac12}$ et $cL_{\frac12} \subset L_{\frac12}$ pour $c \geqq 0$. Pour $f \in L_0^+$ on a $I_{\frac12} f = I_0 f$; pour $f_1, f_2 \in L_{\frac12}$ on a $I_{\frac12}(f_1 + f_2) = I_{\frac12} f_1 + I_{\frac12} f_2$ et pour $f \in L_{\frac12}$ et $c \geqq 0$ on a $I_{\frac12}(cf) = c I_{\frac12} f$.

On a encore $L_{\frac12} \vee L_{\frac12} \subset L_{\frac12}$ et $L_{\frac12} \wedge L_{\frac12} \subset L_{\frac12}$.

Pour vérifier cette dernière assertion envisageons deux fonctions $f, g \in L_{\frac12}$. Alors on a $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$, $g(p) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(p)$ p. p. où $f_n, g_n \in L_0^+$ et $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, f_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, g_n)$ existent. Posons $h_1 = f_1 \vee g_1$ et $k_1 = f_1 \wedge g_1$ et pour $n = 2, 3, \ldots$

$$h_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i\Big) \vee \Big(\sum_{i=1}^{n} g_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n-1} f_i\Big) \vee \Big(\sum_{i=1}^{n-1} g_i\Big),$$

$$k_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i\Big) \wedge \Big(\sum_{i=1}^{n} g_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n-1} f_i\Big) \wedge \Big(\sum_{i=1}^{n-1} g_i\Big).$$

Evidemment $h_n, k_n \in L_0^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(p) = f(p) \vee g(p)$, $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(p) = f(p) \wedge g(p)$ p. p. On a encore $h_n \leqq f_n + g_n$ et $k_n \leqq f_n + g_n$ or, $I_0(L_0, h_n) \subset I_0(L_0, f_n) + I_0(L_0, g_n)$ et $I_0(L_0, k_n) \subset I_0(L_0, f_n) + I_0(L_0, g_n)$. Il s'ensuit, que les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, h_n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0, k_n)$ existent, d'où $f \vee g, f \wedge g \in L$.

Notons que pour $f \in L_{\frac12}$, $\varphi \in L_0^+$, $\varphi \leqq f$ on a $f - \varphi \in L_{\frac12}$.

La notation $I_{\frac12}(L_{\frac12}, f)$ a un sens évident.

La rélation $I_{\frac12}(L_{\frac12}, f) \subset \overline{I_0(L_0^+, f)}$ pour tout $f \in L_{\frac12}$ est une conséquence immédiate de la définition.

3.3. Soit $f \in L_{\frac12}$. Le sens de f_n soit le même comme sous 3.2. Soit $0 \leqq \varphi \leqq f$, $\varphi \in L_0$. Si nous posons $\varphi_1 = \varphi \wedge f_1$ et par récurrence $\varphi_n = (\varphi - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i) \wedge f_n$ pour $n = 2, 3, \ldots$ en tenant compte de l'inégalité $\varphi(p) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ p. p., nous aurons $\varphi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p)$ p. p. On a $\varphi_n \geqq 0$, alors d'après le lemme 3.1 $I_0 \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} I_0 \varphi_n$. Il s'ensuit $I_0(L_0^+, f) \subset \sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0^+, f_n)$. D'une manière analogue $I_0(L_0^+, f - \sum_{i=1}^{m} f_i) \subset \sum_{n=m+1}^{\infty} I_0(L_0^+, f_n)$ pour $m = 1, 2, \ldots$. Il en découle d'après le lemme 1.1 qu'on a $\|I_0(L_0^+, f - \sum_{i=1}^{m} f_i)\| \to 0$ et en vertu de l'égalité $\|I_{\frac12}(L_{\frac12}, f - \sum_{i=1}^{m} f_i)\| = \|I_0(L_0^+, f - \sum_{i=1}^{m} f_i)\|$ on a aussi $\|I_{\frac12}(L_{\frac12}, f - \sum_{i=1}^{m} f_i)\| \to 0$ pour $m \to \infty$.

Il résulte de ce que nous venons d'établir que pour toute fonction $f \in L_{\frac12}$ et $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in L_0^+$ de telle manière que $g \leqq f$ et $\|I_{\frac12}(L_{\frac12}, f - g)\| < \varepsilon$. En effet, on n' a qu'à poser $g = \sum_{i=1}^{m} f_i$ pour m suffisamment grand.

3.4. Lemme. *Pour toute suite $\{f_n\}$ de fonctions de la classe $L_{\frac12}$ tendant en décroissant vers 0 presque partout on a $\lim_n I_{\frac12} f_n = 0$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour toute fonction f_n choisissons une fonction $g_n \in L_0^+$, $g_n \leqq f_n$, de sorte que $\|I_{\frac12}(L_{\frac12}, f_n - g_n)\| < 2^{-n}\varepsilon$. Posons $h_n = \bigwedge_{i=1}^{n} g_i$. On aura $0 \leqq h_n \leqq f_n$, $f_n - h_n \leqq \sum_{i=1}^{n} (f_i - g_i)$ et par conséquent $\|I_{\frac12} f_n - I_0 h_n\| < \varepsilon$. Evidemment, on a $h_n(p) \searrow 0$ p. p. D'après le lemme 3.1 on a $\|I_0 h_n\| \to 0$. Il s'ensuite que $\lim\sup_n \|I_{\frac12} f_n\| \leqq \varepsilon$. Or, ε étant arbitrairement petit, on a $\lim_n \|I_{\frac12} f_n\| = 0$.

3.5. Lemme. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $L_{\frac12}$ pour laquelle $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0^+, f_n)$ converge. La somme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ existe presque partout et si $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ presque partout on a $f \in L_{\frac12}$ et $I_{\frac12} f = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac12} f_n$.*

Démonstration. Nous avons $f_n(p) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{ni}(p)$ p. p. pour $f_{ni} \in L_0^+$ avec la série $\sum_{i=1}^{\infty} I_0(L_0^+, f_{ni})$ convergente. Evidemment $\sum_{i=1}^{\infty} I_0(L_0^+, f_{ni}) \subset I_{\frac12}(L_{\frac12}, f_n)$. On a $I_{\frac12}(L_{\frac12}, f_n) \subset \overline{I_0(L_0^+, f_n)}$ ce qui par l'hypothèse en vertu du lemme 1.2 entraîne la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac12}(L_{\frac12}, f_n)$ et celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} I_0(L_0, f_{ni}))$. D'après le lemme 1.4, on peut réarranger cette dernière série arbitrairement en une série simple. In en découle la convergence p. p. de la série $\sum_{n,i=1}^{\infty} f_{ni}(p)$ et si l'on pose $f(p) = \sum_{n,i=1}^{\infty} f_{ni}(p)$ on a $f \in L_{\frac12}$, $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ p. p. et $I_{\frac12} f = \sum_{n,i=1}^{\infty} I_0 f_{ni} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} I_0 f_{ni}) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac12} f_n$.

3.6. Soit L_1 l'ensemble de toutes les fonctions h exprimables sous la forme $h = f - g$ pour $f, g \in L_{\frac12}$. Pour une telle fonction nous posons $I_1 h = I_{\frac12} f - I_{\frac12} g$.

Pour légitimer cette convention il faut montrer que si $f_1 - g_1 = f_2 - g_2$ on a $I_{\frac12} f_1 - I_{\frac12} g_1 = I_{\frac12} f_2 - I_{\frac12} g_2$. Or, sous cette hypothèse on a $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ et par conséquent $I_{\frac12} f_1 + I_{\frac12} g_2 = I_{\frac12} f_2 + I_{\frac12} g_1$, d'où l'assertion.

Lemme. *Lorsque $h \in L_1$, $h \geqq 0$, étant donné $\varepsilon > 0$ on peut choisir la décomposition $h = f - g$ avec $f, g \in L_{\frac12}$ de sorte qu'on ait $\|I_{\frac12}(L_{\frac12}, g)\| < \varepsilon$.*

Démonstration. Pour choisir ainsi f et g, on n'aura qu'à partir d'une décomposition $h = f_1 - g_1$ pour laquelle notre condition n'est pas encore nécessairement vérifiée et de choisir une fonction $\varphi \in L_0^+$ de sorte qu'on ait $\varphi \leqq g_1$ et $\|I_{\frac12}(L_{\frac12}, g_1 - \varphi)\| < \varepsilon$ (cf. 3.3) et à poser $g = g_1 - \varphi$, $f = f_1 - \varphi$. On vérifiera facilement que $f, g \in L_{\frac12}$.

3.7. On voit facilement que $L_0 \subset L_1$, $L_1 + L_1 \subset L_1$, $cL_1 \subset L_1$ pour tout c réel. Lorsque $h \in L_1$ on a aussi $|h| \in L_1$, à savoir si $h = f - g$ avec $f, g \in L_{\frac12}$, on a $|h| = f \vee g - f \wedge g$ avec $f \vee g, f \wedge g \in L_{\frac12}$. Cela signifie que la classe L_1 constitue un espace die Riesz.

L'application I_1 sur L_1 est linéaire, c'est-à-dire elle jouit de la propriété (1) de 2.2. Pour $f \in L_0$ on a $I_1 f = I_0 f$. De la théorie classique de l'intégrale scalaire il découle que $x^* I_1$ est une intégrale scalaire pour tout $x^* \in X^*$. Or, l'application

I_1 est une intégrale vectorielle faible sur L_1. Nous alons démontrer qu'elle l'est aussi au sens fort.

Lemme. *$I_1(L_1^+, f) \subset \overline{I_0(L_0^+, f)}$ pour tout $f \in L_{\frac{1}{2}}$.*

Démonstration. En vertu de la rélation $I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, f) \subset \overline{I_0(L_0^+, f)}$ on n'a qu'à démontrer que $I_1(L_1^+, f) \subset \overline{I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, f)}$. Envisageons, à cet effet, une fonction $\varphi \in L_1$, $0 \leqq \varphi \leqq f$. D'après la définition de la classe L_1 on peut choisir une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions de L_0 convergente vers φ presque partout. La suite $\{\psi_n\}$ où $\psi_n = (0 \vee \varphi_n) \wedge f$ tends aussi vers φ presque partout. On a $\psi_n \in L_{\frac{1}{2}}$, $0 \leqq \psi_n \leqq f$. En vertu du théorème de Lebesgue pour les intégrales scalaires (cf. 2.3 (c)) on a $x^* I_1 \varphi = \lim_n x^* I_1 \psi_n = \lim_n x^* I_{\frac{1}{2}} \psi_n$ pour tout $x^* \in X^*$. Alors $I_1 \varphi$ appartient à la fermeture faible de l'ensemble $I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, f)$. Or, cet ensemble étant convexe, ses fermetures faible et forte coïncident.

Théorème. *L'application I_1 est une intégrale vectorielle (forte) sur L_1.*

Démonstration. Nous n'avons qu'à démontrer que pour toute suite $\{h_n\}$ de fonctions de L_1 tendant en décroissant vers 0 partout on a $\lim_n I_1 h_n = 0$.

Soit $h_n = f_n - g_n$, où $f_n, g_n \in L_{\frac{1}{2}}$ et $\|I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, g_n)\| < 2^{-n}$. Il en découle la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, g_n)$ et en vertu du lemme 3.5 celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(p)$ p. p. On a alors $\lim_n g_n(p) = 0$ et aussi $\lim_n f_n(p) = 0$ p. p. Observons qu'on a aussi $\|I_1(L_1^+, g_n)\| < 2^{-n}$, ce qui découle du lemme. Si nous posons $f_n' = \wedge_{i=1}^{n} f_i$, on aura $h_n \leqq f_n' \leqq f_n$ or, $\lim_n f_n'(p) = 0$ p. p. Alors, d'après le lemme 3.4 on a $\lim_n I_{\frac{1}{2}} f_n' = 0$ et comme on a $f_n - f_n' \leqq g_n$ on a aussi $\lim_n I_1(f_n - f_n') = 0$ d'où il s'ensuit que $\lim_n I_{\frac{1}{2}} f_n = \lim_n (I_{\frac{1}{2}} f_n' + I_1(f_n - f_n')) = 0$. Comme on a évidement $\lim_n I_{\frac{1}{2}} g_n = 0$, nous obtenons le résultat désiré $\lim_n I_1 h_n = \lim_n (I_{\frac{1}{2}} f_n - I_{\frac{1}{2}} g_n) = 0$.

3.8. Théorème. *Soit $\{h_n\}$ une suite de fonctions de L_1^+ telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_1(L_1^+, h_n)$ converge. La série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(p)$ converge presque partout (par rapport à I_0) et lorsque $h(p) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(p)$ presque partout on a $h \in L_1$ et $I_1 h = \sum_{n=1}^{\infty} I_1 h_n$.*

Démonstration. Posons $h_n = f_n - g_n$ avec $f_n, g_n \in L_{\frac{1}{2}}$ et $\|I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, g_n)\| < 2^{-n}$. Il s'ensuit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, g_n)$ converge. On a $f_n \leqq h_n + g_n$ d'où il découle que $I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, f_n) \subset I_1(L_1, h_n) + I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, g_n)$. Cela entraîne que la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, f_n)$ converge. Le lemme 3.5 implique l'existence p. p. des sommes $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(p)$ et si nous posons $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$, $g(p) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(p)$ p. p. on a $f, g \in L_{\frac{1}{2}}$ et $I_{\frac{1}{2}} f = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}} f_n$, $I_{\frac{1}{2}} g = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}} g_n$. Il en découle toutes les propositions du théoreme énoncé.

Corollaire 1. *Pour qu'un ensemble soit négligeable pour I_0 il faut et il suffit qu'il le soit pour I_1.*

Démonstration. Comme l'intégrale I_1 est une prolongement de I_0, tout ensemble négligeable pour I_0 l'est en vertu du lemme 3.7 et 1.2 aussi pour I_1. L'assertion opposée est contenue dans l'énoncé du théorème.

Corollaire 2. *Sous les hypothèses du théorème on a* $\|I_1\|(h - \sum_{i=1}^{n} h_i) \to 0$ (cf. 2.4).

Démonstration. Nous avons a démontrer que $\|I_1(L_1, h - \sum_{i=1}^{n} h_i)\| \to 0$ ce qui est équivalent à $\|I_1(L_1^+, h - \sum_{i=1}^{n} h_i)\| \to 0$. En vertu du lemme 1.1 il suffit de démontrer que $I_1(L_1^+, h - \sum_{i=1}^{n} h_i) \subset \sum_{i=n+1}^{\infty} I_1(L_1^+, h_i)$. On démontre cette dernière rélation d'une manière déjà utilisée sous 3.3.

3.9. Théorème. *Si on pose $\|f\| = \|I_1\|(|f|)$ pour $f \in L_1$ la classe L_1 devient un espace semi-normé complet pour la semi-norme $\|\cdot\|$. L'ensemble L_0 constitue un sous-espace dense dans L_1.*

Démonstration. Nous omettons la vérification que la fonctionelle $\|\cdot\|$ est en fait une semi-norme.

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de L_1 pour laquelle $\|f_n - f_m\| \to 0$ quand $n \to \infty$, $m \to \infty$. Choisissons les indices $m_1 < m_2 < \ldots$ de façon que pour $n > m_k$ on ait $\|f_n - f_{m_k}\| < 2^{-k}$. Alors en particulier $\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\| < 2^{-k}$. Grâce au théorème 3.8 cela entraîne la convergence p. p. de la série $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_{k+1}}(p) - f_{m_k}(p)|$ donc, à plus forte raison, la convergence p. p. des séries $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}}(p) - f_{m_k}(p))^+$ et $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}}(p) - f_{m_k}(p))^-$ vers des fonctions appartenantes à L_1. En désignant par $h_1(p)$ et $h_2(p)$ leurs sommes respectives posons $f = f_{m_1} + h_1 - h_2$. Comme on a $|f - f_{m_{k+1}}| \leqq h_1 - \sum_{j=1}^{k} (f_{m_{j+1}} - f_{m_j})^+ + h_2 - \sum_{j=1}^{k} (f_{m_{j+1}} - f_{m_j})^-$ le corollaire 2 du théorème 3.8 entraîne que $\|I_1\|(|f - f_{m_k}|) \to 0$. Il en découle d'une façon évidente que $\|f - f_n\| \to 0$.

Il nous reste à démontrer que L_0 est dense dans L_1. Soit $h \in L_1$; $h = f - g$; $f, g \in L_{\frac{1}{2}}$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on choisit $\varphi, \psi \in L_0^+$ de sorte que $\|I_0(L_0^+, f - \varphi)\| < \varepsilon$, $\|I_0(L_0^+, g - \psi)\| < \varepsilon$. D'après le lemme 3.7 on a aussi $\|I_1(L_1^+, f - \varphi)\| < \varepsilon$ et $\|I_1(L_1^+, g - \psi)\| < \varepsilon$. En posant $\chi = \varphi - \psi$ nous avons $|h - \chi| \leqq |f - \varphi| + |g - \psi|$ d'où $\|I_1(L_1^+, |h - \chi|)\| < 2\varepsilon$ et par conséquent $\|h - \chi\| = \|I_1(L_1, |h - \chi|)\| < 4\varepsilon$.

La convergence d'une suite suivant la semi-norme introduite dans l'énoncé du théorème est appelée la convergence en moyen. De la démonstration du théorème il découle le

Corollaire. *De toute suite convergente en moyen on peut tirer une suite partielle convergente presque partout.*

4.1. La théorie de complétion de l'intégrale vectorielle donnée dans le n° 3 n'est pas encore satisfaisante dans certains points de vue. Par exemple, du théorème 3.8 on ne peut pas déduire la convergence de toute suite monotone de fonctions de L_1 majorée dans L_1 vers une limite appartenant à L_1. Pour qu'on puisse déduire cette convergence l'intégrale I_1 sur L_1 doit être saturable (cf. la définition sous 2.2). Or, pour que l'intégrale I_1 soit saturable il est, évidemment, nécessaire que l'intégrale I_0 la soit. Nous allons démontrer que la proposition contraire est aussi vraie.

Nous conservons les notations du n° 3.

Théorème. *Pour que l'intégrale vectorielle I_1 soit saturable il faut et il suffit que l'intégrale I_0 la soit.*

Démonstration. La nécessité de condition énoncée étant évidente il nous reste à démontrer que la propriété d'être saturable se conserve quand on passe de l'intégrale I_0 à I_1.

Supposons alors que l'intégrale I_0 soit saturable. En supposant $\varphi_n \in L_0^+$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \leqq \varphi$ pour $\varphi \in L_0^+$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0^+, \varphi_n)$ est convergente en vertu du lemme 1.3 et du fait qu'elle l'est faiblement d'après l'hypothèse de la saturabilité de l'intégrale I_0.

Cela étant soit $f_n \in L_0$, $f \in L_{\frac{1}{2}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f$. Soit $f = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ avec $\varphi_k \in L_0^+$ et la somme $\sum_{k=1}^{\infty} I_0(L_0^+, \varphi_k)$ existant. Définissons les fonctions φ_{nk} par récurrence en posant

$$\varphi_{nk} = (f_n - \sum_{j=1}^{k-1}\varphi_{nj}) \wedge (\varphi_k - \sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{ik})$$

pour $n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots$. (Par la somme $\sum_{i=1}^{0}$ nous comprenons le zéro.) Du fait, qu'on a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ on déduit par induction que $f_n = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{nk}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Evidemment $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{nk} \leqq \varphi_k$. Il s'ensuit d'après les lemmes 1.2 et 1.4 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_0 f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} I_0\varphi_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} I_0\varphi_{nk} \in \sum_{k=1}^{\infty} \overline{I_0(L_0^+, \varphi_k)}.$$

Alors la somme $\sum_{n=1}^{\infty} I_0 f_n$ existe.

Soit maintenant $h_n \in L_1^+$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \leqq h_0$. Ecrivons $h_n = f_n - g_n$ avec $f_n, g_n \in L_{\frac{1}{2}}$ et $\|I_{\frac{1}{2}}(L_{\frac{1}{2}}, g_n)\| < 2^{-n}$. La somme $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}} g_n$ existant, pour démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} I_1 h_n$ existe, il nous reste à démontrer l'existence de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}} f_n$. D'après le lemme 3.5 la série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(p)$ converge p. p. et sa somme appartient à $L_{\frac{1}{2}}$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f_0 + g \in L_{\frac{1}{2}}$. De ce que nous venons d'établir il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{\infty} I_0(L_0^+, f_n)$ existe. Du lemme 1.2 il découle aussi l'existence de la somme $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{I_0(L_0^+, f_n)}$, ce qui implique l'existence de $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{1}{2}} f_n$. Notons encore que d'après le lemme 3.5 la somme p. p. de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ appartient à $L_{\frac{1}{2}}$ et par conséquent la somme p. p. de la série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ appartient à L_1.

4.2. Théorème. *En supposant l'intégrale I_0 saturable toute série $\sum_{n=1}^{\infty} h^n$ de fonctions de L_1^+ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \leqq h_0$ pour $h_0 \in L_1$ converge vers une fonction de L_1^+. Lorsque $h(p) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(p)$ presque partout on a $I_1 h = \sum_{n=1}^{\infty} I_1 h_n$ et $\|I_1\|(h - \sum_{i=1}^{n} h_i) \to 0$.*

Démonstration. Nous avons déjà démontré à la fin de la démonstration du théorème 4.1 la convergence p. p. de la série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ (cette convergence ayant lieu, évidemment, aussi partout) vers une fonction $h \in L_1$ et la rélation $I_1 h = \sum_{n=1}^{\infty} I_1 h_n$. Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty} I_1(L_1^+, h_n)$ converge aussi. Mais on a $I_1(L_1^+, h - \sum_{i=1}^{n} h_i) \subset \sum_{i=n+1}^{\infty} I_1(L_1^+, h_i)$, ce qui implique que $\|I_1(L_1^+, h - \sum_{i=1}^{n} h_i)\| \to 0$ (cf. lemme 1.1). D'après la définition $\|I_1\|(h - \sum_{i=1}^{n} h_i) = \|I_1(L_1, h - \sum_{i=1}^{n} h_i)\| \leqq 2\|I_1(L_1^+, h - \sum_{i=1}^{n} h_i)\|$, d'où notre assertion.

Corollaire. *En supposant I_0 saturable toute suite $\{f_n\}$ monotone de fonctions de L_1 majorée dans L_1 tend vers une fonction de L_1. En désignant f la limite presque partout de $\{f_n\}$ on a $\|I_1\|(f - f_n) \to 0$.*

Démonstration. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$ remplit les hypothèses du théorème d'où notre assertion découle d'une façon évidente.

4.3. Théorème. *En supposant I_0 saturable lorsque les fonctions f_n de L_1 convergent presque partout vers une fonction f et que de plus, il existe une fonction $g \in L_1$ de sorte que $|f_n| \leqq g$ pour tous n, alors, la fonction f appartient aussi à L_1 et $I_1 f_n \to I_1 f$, $\|I_1\|(|f - f_n|) \to 0$.*

Démonstration. En posant $g_n = \lim_m (f_n \vee f_{n+1} \vee \ldots \vee f_{n+m})$, $h_n = \lim_m (f_n \wedge f_{n+1} \wedge \ldots \wedge f_{n+m})$ d'après le corollaire du théorème 4.2 on a $g_n, h_n \in L_1$. La suite $\{g_n - h_n\}$ tend en décroissant vers 0 p. p. et la suite $\{g_n\}$ tend en décroissant vers f p. p. Alors, d'après le corollaire du théorème 4.2 on a $f \in L_1$ et $\|I_1\|(g_n - h_n) \to 0$. Des inégalités $h_n \leqq f_n \leqq g_n$, $h_n \leqq f \leqq g_m$ il découle que $|f - f_n| \leqq g_n - h_n$, d'où $\|I_1 f - I_1 f_n\| = \|I_1(f - f_n)\| \leqq \|I_1\|(|f - f_n|) \leqq \|I_1\|(g_n - h_n)$ et, par conséquent, $I_1 f_n \to I_1 f$ et aussi $\|I_1\|(|f - f_n|) \to 0$.

4.4. Vu les théorèmes établis on voit la signification pour une intégrale vectorielle d'être saturable. Etant donnée une intégrale vectorielle I_0 sur L_0, pour qu'il existe une intégrale vectorielle I_1 sur L_1 telle que $L_1 \supset L_0$, $I_1 f = I_0 f$ pour $f \in L_0$ et telle que les théorèmes 4.2 et 4.3 aient lieu, il faut et il suffit, que I_0 soit saturable. Nous allons, alors, donner quelques conditions suffisantes pour qu'une intégrale vectorielle soit saturable.

Théorème. *Soit I une intégrale vectorielle sur L avec les valeurs dans un espace* de Banach X. *Chacune des conditions* (i), (ii), (iii), (iv) *ci-dessous est suffisante pour qu'elle soit saturable.*

(i) *I est relativement faiblement compacte.*

(ii) *L est σ-réticulé.*

(iii) *X est un espace faiblement complet d'après les suites.*

(iv) *Il existe une intégrale positive J sur L de sorte que $\|If\| \leqq J|f|$ pour tout $f \in L$.*

Démonstration. Soit $f \in L^+, f_n \in L^+$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f$. Comme pour tout $x^* \in X^*$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^* I f_n$ converge, si l'ensemble $I(L^+, f)$, d'où sont tirées les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} I f_n$ est relativement faiblement compact ou X est un espace faiblement complet d'après les suites, la série $\sum_{n=1}^{\infty} I f_n$ elle-même converge faiblement vers un élement de X. Cela démontre la suffisance de la condition (i) et (iii).

La suffisance de la condition (ii) découle du fait, que sous cette condition aussi la somme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ appartient à L.

La suffisance de la condition (iv) est évidente.

Notons que L étant σ-réticulé tout intégrale vectorielle I sur L est relativement faiblement compacte (cf. [2], Théoreme 4.2). Il en découle que la condition (i) est aussi nécessaire pour qu'une intégrale I soit saturable. Par les exemples convenables on peut montrer que les autres conditions du théorème ne sont que suffisantes.

5. INTÉGRATION PAR RAPPORT À UNE FONCTION D'ENSEMBLE

Dans ce n° nous utiliserons les résultats des n^{os} précedents à la théorie de la mesure vectorielle et à la théorie de l'intégration par rapport à une telle mesure.

5.1. Soit P un ensemble abstrait et soit $\mathbf{R}$ un anneau des sous-ensembles de P, c'est-à-dire $\mathbf{R}$ contient avec les ensembles E, F aussi leur some $E \cup F$ et différence $E - F$.

Une fonction μ sur $\mathbf{R}$ avec les valeurs dans un espace de Banach X est appelée une mesure vectorielle lorsqu'on a $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$ pour toute suite $\{E_n\}$ d'ensembles disjoints deux-à-deux de $\mathbf{R}$ avec $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{R}$.

La mesure vectorielle μ est dite relativement faiblement compacte lorsque l'ensemble $\{\mu(F) : F \subset E, F \in \mathbf{R}\}$ est relativement faiblement compact dans X pour chaque ensemble $E \in \mathbf{R}$.

Lorsque la mesure μ est relativement faiblement compacte, l'ensemble $\{\mu(F) : F \subset E, F \subset \mathbf{R}\}$ est borné pour tout $E \in \mathbf{R}$. Il en découle que la mesure scalaire $x^*\mu$ est à variation finie pour tout $x^* \in X^*$, c'est-à-dire elle est majorée par une mesure non-négative.

Un anneau fermé par rapport aux intersections dénombrables d'ensembles est appelé un δ-anneau. Notons que toute mesure définie sur un δ-anneau est relativement faiblement compacte. Cette proposition a été démontrée dans [8].

5.2. Considérons une mesure vectorielle μ sur $\mathbf{R}$ relativement faiblement compacte.

Soit L_0 l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (à coefficients réels) de fonctions caractéristiques d'ensembles appartenantes à $\mathbf{R}$, c'est-à-dire on a $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$ avec $E_i \in \mathbf{R}$ et α_i réels pour tout $f \in L_0$. Pour les fonctions de telle sorte nous posons $I_0 f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(E_i)$.

La mesure $x^*\mu$ étant à variation finie pour tout $x^* \in X$, il découle de la théorie de l'intégration classique (ce qu'on peut démontrer aussi directement) que I_0 est une intégrale vectorielle faible sur L_0.

Nous allons montrer que I_0 est relativement faiblement compacte. En effet, soit $f \in L_0{}^+$. Nous pouvons supposer les ensembles E_i intervenants dans la définition de f deux-à-deux sans points communs. En vertu de la rélation $I_0(L_0^+, f) \subset \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_0(L_0^+, \chi_{E_i})$ nous n'avons qu'à demontrer que $I_0(L_0^+, \chi_E)$ est relativement faiblement compact dans X pour tout $E \in \mathbf{R}$. Mais $I_0(L_0^+, \chi_E)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\mu(F) : F \subset E,\ F \in \mathbf{R}\}$ relativement compact dans X, par conséquent $I_0(L_0^+, \chi_E)$ l'est aussi (cf. [4], Lemme V, 1, 2 et Corollaire III, 2, 3).

Il découle de ce que nous venons d'établir que I_0 est une intégrale vectorielle (forte) sur L_0 (cf. 2.5). Par conséquent la théorie entière développée dans les n^{os} 3 et 4 s'applique. On peut alors construir les prolongements L_1 et I_1 de L_0 et I_0 comme nous l'avons fait dans ces n^{os}. On appele les fonctions appartenantes à L_1 intégrables par rapport à μ et on écrit $\int f d\mu$ au lieu de $I_1 f$.

5.3. Designons par $\mathbf{S}$ la famille d'ensembles les fonctions caractéristiques desquelles sont intégrables. Posons $\mu_1(E) = \int \chi_E d\mu$ pour $E \in \mathbf{S}$. Les propriétés de l'intégrale (cf. surtout le théorème 4.2 et son corollaire) entraînent que $\mathbf{S}$ est un δ-anneau et que μ_1 est une mesure vectorielle sur $\mathbf{S}$. Comme d'après [8] toute mesure vectorielle définie sur un δ-anneau est relativement faiblement compacte, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Etant donnée une mesure vectorielle μ sur un anneau $\mathbf{R}$, une condition nécessaire et suffisante pour que μ puisse être prolongée à une mesure vectorielle μ_1 définie sur un δ-anneau $\mathbf{S}$ contenant $\mathbf{R}$ est que μ soit relativement faiblement compacte.*

5.4. Nous avons défini dans 5.2 l'intégrale par rapport à une mesure vectorielle relativement faiblement compacte définie sur un anneau. Comme toute mesure vectorielle sur un δ-anneau est relativement faiblement compacte, nous pouvons considérer l'intégrale par rapport à une mesure vectorielle arbitraire sur un δ-anneau.

L'intégrale pour les fonctions scalaires par rapport à une mesure vectorielle sur un δ-anneau a été introduite aussi dans [2] par un autre procédé. Or, la définition donnée dans [2] est équivalente à celle du travail présent, mais nous ne donnerons pas la démonstration de ce fait parce qu'on n'en tirera aucune conséquence.

Quant à la condition sur μ d'être relativement faiblement compacte, elle est essentielle pour notre méthode d'introduir l'intégrale vectorielle par rapport à μ et en géneral pour obtenir une théorie satisfaisante. Si μ n'était pas relativement faiblement compacte l'application I_0 de 5.2 pourrait ne pas être intégrale vectorielle, de plus ne pas être une intégrale vectorielle faible. Pour le voir envisageons l'exemple de la mesure scalaire suivant:

Exemple. Soit P l'ensemble de nombres entiers positifs. Soit $\boldsymbol{R}$ l'anneau consistant en sous-ensembles finis de P (l'ensemble vide inclus) et leurs compléments. Définissons $\mu(E)$ comme le nombre d'élements de E pour E fini et comme le nombre d'élements de complément de E multiplié par -1 pour E infini.

En désignant par f_n la fonction caractéristique de l'ensemble $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$ on voit que $f_n \searrow 0$ et en même temps $I_0 f_n = 1 - n$.

5.5. Pour finir notons qu'une intégrale vectorielle engendrée par une mesure vectorielle n'est pas un cas trop exceptionel parmis les intégrales vectorielles de Daniell. En effet, on a le théorème suivant:

Théorème. *Soit I sur L une intégrale vectorielle, L supposant σ-réticulé. Supposons en plus que L_1 contient $f \wedge 1$ avec toute fonction $f \in L_1$. Dans ces conditions il existe un δ-anneau $\boldsymbol{S}$ et une mesure vectorielle μ sur $\boldsymbol{S}$ de sorte que chaque fonction $f \in L$ est intégrable par rapport à μ et on a $If = \int f d\mu$.*

La démonstration de ce théorème ne diffère que peu de la démonstration du théorème 4.1 de [2] et même du théorème analogue pour les intégrales scalaires donné par ex. dans [9]. Alors, nous ne la répéterons pas ici.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Riesz F., Sz.-Nagy B., *Leçons d'analyse fonctionelle*, Budapest 1952.
[2] Клуванек И. (Kluvánek I.), *О некоторых обобщениях теоремы Риса-Какутани*, Чехосл. мат. журнал *13* (*88*) (1963), 89—113.
[3] Bourbaki N., *Intégration, Chap. VI*, Paris 1959.
[4] Day M. M., *Normed Linear Spaces*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin 1958.
[5] Маржик Ян (Mařík J.), *Представление функционала в виде интеграла*, Чехосл. мат. журнал *5* (*80*) (1955), 467—487.

[6] Daniell P. J., *A general form of integral*, Ann. of Math. 2,*19* (1917—1918), 279—294.
[7] Stone M. H., *Notes on integration I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *34* (1948), 336—342; *Notes on integration II*, Ibid. *34* (1948), 447—455.
[8] Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J., *Weak compactness and vector measures*, Canadian J. Math. *7* (1955), 289—305.
[9] Loomis L. H., *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*, New York 1953.

Reçu le 24. avril 1964.

Katedra matematiky
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika,
Košice

ВЕКТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДАНИЕЛЛЯ

Игорь Клуванек

Резюме

Отображение I линейной решетки L действительных функций на множестве P в пространство Банаха X называем векторным интегралом Даниелля на L со значениями в X, если оно обладает следующими свойствами:

(1) $I(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 I f_1 + c_2 I f_2$ для действительных c_1, c_2 и $f_1, f_2 \in L$.

(2) Если последовательность $\{f_n\}$ функций из L всюду монотонно стремится к 0, то $\lim_n \|If_n\| = 0$.

Векторный интеграл Даниелля на L со значениями в X называется насыщаемым, если для любых неотрицательных функций $f_0, f_1, f_2, \ldots \in L$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \leqq f_0$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} If_i$ сходится.

Справедливы утверждения:

А. Если I_0 — векторный интеграл Даниелля на L_0 со значениями в X, то существует векторный интеграл Даниелля I_1 на L_1 со значениями в X такой, что

а) $L_0 \subset L_1$, $I_1 f = I_0 f$ для $f \in L_0$.

б) L_1 является полным полунормированным пространством для полунормы $\|f\| = \sup \{\|Ig\| : |g| \leqq |f|, g \in L_1\}$, в котором L_0 представляет плотное множество.

в) Если $f_n \in L_1$, $f_n \geqq 0$ и для любых $0 \leqq g_n \leqq f_n$, $g_n \in L_1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} I_1 g_n$ сходится, то функция f, определенная равенством $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ всюду, где последний ряд сходится, принадлежит L_1 и $I_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} I_1 f_n$.

Б. Пусть I_0, I_1, L_0, L_1 имеют то же значение, что и в А.

а) Если I_0 насыщаемый, то I_1 тоже насыщаемый.

б) Если I_0 насыщаемый, $f_n \in L_1$, $|f_n| \leqq g \in L_1$, $f_n \to f$, то $f \in L_1$, $If_n \to If$.

В. Пусть $\boldsymbol{R}$ кольцо подмножеств множества P и пусть μ — σ-аддитивная функция на $\boldsymbol{R}$ со значениями в X. На наименьшем δ-кольце $\boldsymbol{S}$, содержащем $\boldsymbol{R}$, существует σ-аддитивная функция μ_1 со значениями в X, являющаяся продолжением μ тогда и только тогда, когда для всякого $E \in \boldsymbol{R}$ множество $\{\mu(F) : F \subset E, F \in \boldsymbol{R}\}$ относительно слабо компактно в X.