MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 2, 1965

PRŮMĚR GRAFU SYSTÉMU VLASTNÍCH PODPOLOGRUP KOMUTATIVNÍ POLOGRUPY

BOHDAN ZELINKA, Liberec

Budiž S pologrupa, $\mathscr{S}$ systém všech jejích vlastních podpologrup. Grafem $G(\mathscr{S})$ systému $\mathscr{S}$ nazýváme graf, jehož uzly představují prvky $\mathscr{S}$ a dva uzly jsou v něm spojeny (jedinou) hranou právě tehdy, jestliže odpovídající podpologrupy mají neprázdný průnik. J. Bosák [2] dokázal, že v případě, že S je komutativní, periodická a obsahuje více než tři prvky, je $G(\mathscr{S})$ souvislý a jeho průměr [1] je roven nejvýše dvěma. V tomto článku je totéž tvrzení dokázáno bez předpokladu, že S je periodická. Tím je zároveň pro komutativní případ řešen problém 1 z [2].

Věta. *Budiž S komutativní pologrupa obsahující více než tři prvky. Potom graf $G(\mathscr{S})$ je souvislý a jeho průměr je roven nejvýše dvěma.*

Důkaz. Budiž S komutativní pologrupa s více než třemi prvky a A, B její disjunktní vlastní podpologrupy. Poněvadž každá pologrupa obsahuje jako svoji podpologrupu pologrupu vytvořenou jedním prvkem, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že podpologrupy A, B jsou po řadě vytvořené prvky a, b. Dokážeme, že existuje vlastní podpologrupa pologrupy S, mající s A i s B neprázdný průnik a tedy vzdálenost jim odpovídajících prvků v $G(\mathscr{S})$ nepřevyšuje dvě. Jsou-li obě konečné, obsahují idempotenty $e \in A$, $f \in B$ a důkaz vyplývá z toho, že $\{e, f, ef\}$ je vlastní podpologrupa pologrupy S, která má s A i s B neprázdný průnik. Uvažujme tedy dva případy: (1) A je nekonečná, B je konečná; (2) A i B jsou nekonečné.

V případě (1) obsahuje B idempotentní prvek p. Předpokládajme, že podpologrupa Q vytvořená prvky a^2, p je totožná s S. Znamená to speciálně, že $a = a^{2k}p$, kde k je přirozené číslo. Máme nyní

$$a^2 = a^{2k}pa^{2k}p = a^{4k}p^2 = a^{4k}p = a^{2k}(a^{2k}p) = a^{2k}a = a^{2k+1}.$$

To je ovšem spor s tím, že A je nekonečná (v tom případě by všechny mocniny a

musely být navzájem různé). Pologrupa Q je tedy vlastní podpologrupou podpologrupy S, která má neprázdný průnik s A i s B.

V případě (2) uvažujme pologrupu vytvořenou prvky a^2, b^2. Je-li tato pologrupa vlastní podpologrupou pologrupy S, tvrzení zřejmě platí. Uvažujme tedy případ, že tato pologrupa je totožná s S. V tom případě je speciálně $a = a^{2k}b^{2l}$, $b = a^{2m}b^{2n}$, kde k, l, m, n jsou přirozená čísla. Dokážeme, že

$$a^{2k-1}b^{2l} = a^{2m}b^{2n-1}.$$

Máme

$$(a^{2k-1}b^{2l})(a^{2m}b^{2n-1}) = (a^{2k-1}b^{2l})(b^{2n-1}a^{2m}) = (a^{2k-1}b^{2l-1})(b^{2n}a^{2m}) = \\ = (a^{2k-1}b^{2l-1})b = a^{2k-1}b^{2l},$$
$$(a^{2k-1}b^{2l})(a^{2m}b^{2n-1}) = (b^{2n-1}a^{2m})(a^{2k-1}b^{2l}) = (b^{2n-1}a^{2m-1})(a^{2k}b^{2l}) = \\ = (b^{2n-1}a^{2m-1})a = a^{2m}b^{2n-1}.$$

Tím jsme zároveň dokázali, že $h = a^{2k-1}b^{2l} = a^{2m}b^{2n-1}$ je idempotent a tedy neleží v A ani v B. Dále máme pro libovolné přirozené $r > 1$

$$a^r h = a^r(a^{2k-1}b^{2l}) = a^{r-1}(a^{2k}b^{2l}) = a^{r-1}a = a^r,$$
$$b^r h = hb^r = (a^{2m}b^{2n-1})b^r = (a^{2m}b^{2n})b^{r-1} = bb^{r-1} = b^r.$$

(Platí ovšem i $ah = a$, $bh = b$.) Označme nyní $c = a^{2k-1}$, $d = b^{2l}$. Pologrupa vytvořená prvkem c (resp. d) budiž C (resp. D); je to zřejmě podpologrupa pologrupy A (resp. B) a je nekonečná. Je zřejmě $cd = h$, $c^r h = c^r$, $d^r h = d^r$. Jsou-li s, t přirozená čísla, $s > t$, máme

$$c^s d^t = c^{s-t}(c^t d^t) = c^{s-t}(cd)^t = c^{s-t}h^t = c^{s-t}h = c^{s-t} \in C.$$

Pro $s < t$ máme

$$c^s d^t = (c^s d^s)d^{t-s} = (cd)^s d^{t-s} = h^s d^{t-s} = hd^{t-s} = d^{t-s} \in D,$$

konečně pro $s = t$

$$c^s d^t = c^s d^s = (cd)^s = h^s = h.$$

Množina $C \cup D \cup \{h\}$ je tedy podpologrupou pologrupy S. Je to vlastní podpologrupa, protože zřejmě neobsahuje b; přitom má neprázdný průnik s A i s B.

LITERATURA

[1] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.
[2] Bosák J., *The graphs of semigroups*, Theory of graphs and its applications, Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963, Praha 1964.

Došlo 21. 4. 1964.

Katedra matematiky
Vysoké školy strojní a textilní,
Liberec

THE DIAMETER OF THE GRAPH OF THE SYSTEM OF PROPER SUBSEMIGROUPS OF A COMMUTATIVE SEMIGROUP

Bohdan Zelinka

Summary

In this paper we consider a graph whose vertices are proper subsemigroups of a given commutative semigroup with more than three elements; two vertices are joined by an edge if and only if the corresponding subsemigroups have a non-empty intersection. It is proved that the diameter of this graph is equal at most to two.